# MEMORIE

# DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

## DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

S. 1110.B. 4

# MEMORIE

# DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI

## SCIENZE, LETTERE ED ARTI

VOLUME QUARTO

VENEZIA

PRESSO LA SEGRETERIA DELL' I. R. ISTITUTO

NEL PALAZZO DUCALE

1852

COI TIPI DEL SEMINARIO DI PADOVA

## AVVERTIMENTO

In esecuzione dell' Articolo 134 degli Statuti Interni, si dichiara che ogni Autore è particolarmente risponsabile delle opinioni e dei fatti esposti ne' proprii scritti.

# MEMORIE

# CENNI

# SOPRA IL TERRENO DI SEDIMENTO SUPERIORE

## DELLE PROVINCIE VENETE

## E DESCRIZIONE

## DI ALCUNE SPECIE DI POLIPAI FOSSILI CH' ESSO RACCHIUDE

DEL PROF. TOMASO ANTONIO CATULLO

Per quanto vago e fallace sia l' appellativo di terziarii, dato ai terreni di quella lunga serie di monti che si elevano alle radici delle alpi venete, io credo tuttavia valermi di questo vocabolo per indicare le ultime deposizioni lasciate dal mare sui continenti. Questi terreni occupano tratti estesissimi dal Friuli agli ultimi confini dell' agro veronese; ma non da per tutto appaiono composti delle stesse rocce variando essi a seconda della natura de' materiali che il mare conduceva sopra i suoi fondi, ed a seconda de' luoghi ne' quali noi ci facciamo a considerarli. La zona terziaria molto estesa che fascia i sedimenti più antichi del vicentino e del veronese, non ha, mineralogicamente parlando, che pochi rapporti di somiglianza con la zona che occupa la stessa posizione nel bellunese e nel trivigiano, poichè la prima è costituita di calcaria grossolana e di marne azzurrognole,

la seconda consta d'enormi depositi di arenarie che si riferiscono ora al *molasse*, ora a quella specie di glauconia cui diedi il nome di *arenaria verde* (1). Le marne azzurrognole conchigliacee, che soggiacciono alla calcaria e bene spesso alternano con essa, non si possono confondere, come altri hanno fatto, con le marne egualmente azzurrognole del terreno subapennino, giacchè i fossili di quest'ultime si riferiscono ad un'epoca a noi più vicina, e, generalmente parlando, si palesano diversi da quelli che annidano nelle rocce terziarie inferiori del veneto. Con questa osservazione non si vuole inferire che nel veneto manchi la formazione subapennina. Zone piuttosto lunghe e strette di marne subapennine si veggono tra Molavena e Castelnuovo nel Friuli, e in varii luoghi del trivigiano (nel cenedese e nell'asolano), ne' quali rinvenni le conchiglie descritte ne' *Nuovi Annali delle scienze naturali di Bologna* per l'anno 1843 (2). Un altro piccolo tratto di marne calcarifere ho veduto alla Cengia, presso Lonigo (vicentino), molto più recenti delle subapennine, e che hanno i loro prototipi ne' mari di oggidì (3).

I depositi terziarii del veneto hanno maggiori rapporti coi terreni analoghi dell'Ungheria e dell'Austria di quello sia con le colline terziarie adagiate al piede degli Apennini (4). Consultando le opere degli autori che più particolarmente illustrarono il suolo terziario della Pannonia e dell'Austria, si apprende che le rocce, delle quali è costituito, sono *arenaria verde*, *molasse*, *calcaria grossolana* e *marne*, cioè quelle stesse rocce che formano la più gran parte de' terreni di sedimento superiore delle alpi venete. Le specie fossili che troviamo nelle arenarie del bellunese e nella calcaria grossolana di Verona e di Vicenza, sono presso a poco le medesime che occorrono nelle rocce analoghe dell'Ungheria, della quale corrispondenza ho potuto assicurarmi confrontando i nostri fossili con quelli inviati al Gabinetto di storia naturale dell'Università di Padova dal professore sig. Zipser di Neusohl. Anche li signori Verneuil e Murchison si sono accertati che il terreno terziario antico della Russia è identico sotto ogni rapporto a quello de' contorni di Vienna (*Bull. de la Soc. géol. de France* T. XII pag. 63-119).

Le rocce terziarie del veneto si possono ripartire ne' quattro gruppi divisati dal Lyell, il più antico de' quali sarebbe rappresentato dall'*arenaria verde* (Eoceno); il secondo dalla *calcaria grossolana* e dal *molasse* (Mioceno), e li due ultimi dalle *marne pliocene* e *pleistocene*, riconosciuti dal Lyell medesimo ne' suoi viaggi in Italia. Di tutti questi gruppi ho parlato più o meno distesamente in varie memorie pubblicate negli anni addietro, fermo sempre nell'opinione che il più anziano de' detti gruppi possa, geologicamente parlando, rappresentare l'*argilla plastica*, con cui ha comune la giacitura (*Zool. foss.* pag. 243) (5). Io torrò a considerare li due gruppi inferiori nelle loro più grandi generalità, prendendo le mosse dall'*arenaria verde*, che ricopre immediatamente il terreno della creta, e sopporta ora il *molasse* o arenaria grigia (bellunese e trivigiano), ora la *calcaria grossolana* (vicentino e veronese).

L'arenaria verde occupa al nord di Belluno quel lungo tratto di paese che vi ha tra Pedevena e la Pieve di Alpago, cioè comincia a mostrarsi presso Feltre, e progredisce sino a Lamosano nell'Alpago, formando così una zona d'oltre ventisei miglia di lunghezza. Talvolta forma da se sola dei depositi di qualche estensione, lo che non si può dire dell'arenaria grigia, la quale, se in alcuni colli si vede disgiunta dalla verde (Tisoi, Libano, Verzano), in altri appare a quest'ultima sovrapposta (valle dell'Ardo, presso la Vigna ed anche alle Narde). I caratteri generali di questa roccia sono una tinta verde oscura, talvolta così carica che indusse Nose a crederla un basalte con petrificazioni (6); una tessitura granulare piuttosto fina ed una solidità abbastanza forte per poter essere adoperata come pietra da taglio. Consta di grani verdi composti per la più gran parte di ferro silicato, legati insieme da un cemento calcario-argilloso. Vi si ritrovano per entro nodi ora rotondati ora angolari di calcaria compatta, accompagnati da un' infinità di conchiglie marine, fra cui mi fu dato di trovare alcune ampullarie di specie diverse da quelle che annidano nella brecciola di Roncà, come farò vedere in quella parte della Paleontologia veneta che concerne i molluschi cefalati del terreno Eoceno. Prodigiosa è in alcuni luoghi la quantità de' testacei contenuti

in questa roccia, moltissimi de' quali si presentano sotto le sembianze di modelli interni spesso ricoperti d'un sottilissimo velo calcario (Lamosano, Duron, Mas, Pedevena). Le specie meglio conservate e fornite di guscio hanno le loro analoghe nell'arenaria grigia (Valle dell'Ardo), e nella calcaria grossolana del veronese e del vicentino, e pochissime sono quelle fra le determinabili, che si possono risguardare come esclusivamente proprie della roccia che le racchiude. Se le conchiglie dell'arenaria verde, di cui ho potuto finora riconoscere le specie, si ripetono quasi tutte nella zona *miocena*, non dobbiamo per ciò stesso supporre che ambi questi gruppi sieno stati formati sotto l'influenza delle medesime cause; chè anzi la copia assai volte maggiore degli individui che presenta la prima, e il numero ben grande di modelli di cui è impedito riconoscere le specie, conducono a pensare, che il deposito in cui si osservano le mentovate particolarità sia stato formato sotto l'influenza d'una temperatura più elevata di quella sotto cui avveniva l'innalzamento del terreno mioceno. I modelli e le impressioni di specie irriconoscibili, di cui ribocca la nostra roccia, potrebbero appartenere ad una fauna che manca al terreno *mioceno*; lo che, se venisse col decorso del tempo avverato, più non rimarrebbe alcun dubbio sulla convenienza dell'epiteto *eoceno* che applicai a questo vasto ed importante deposito.

Non è di questo luogo entrare in più minuti particolari sulla geognosia e zoologia della roccia, di cui ho finora dato contezza; solo mi credo nell'obbligo di raddrizzare qui un giudizio concernente l'epoca della sua formazione, supposta da taluno anteriore all'aprimento delle valli trasversali alpine, quando è invece posteriore a quel grande avvenimento. Di fatto le gole aperte nel versante meridionale della zona cretacea (nord-nord-ovest di Belluno) contengono depositi più o meno potenti d'arenaria verde, i quali non si estendono però mai così addentro da poter raggiungere le gole juresi che dietro stanno alle cretacee. Da questo fatto si può dedurre, che allorquando il mare innalzava que' cumuli di arenaria verde e grigia, le acque si erano di già molto abbassate e ridotte alla condizione de' laghi; fra cui il più amplo ed esteso, quello doveva essere che dalle radici occidentali del

Monte Serva si allargava in quello spazio che v'ha fra l'Ardo ed il Cordevole, e poscia restringendosi alquanto si prolungava fin verso Feltre (7). Se la falda meridionale de' monti posti al nord-nord-ovest di Belluno è ovunque ricoperta dall'una o dall'altra di dette arenarie, la falda settentrionale della catena che si eleva al sud-sud-ovest della stessa città non contiene traccia alcuna di terreni terziarii (Calmada, Valdart, Faverghera, San Boldo, ecc.), mentre cotesti si lasciano di bel nuovo vedere sull'opposta china della catena risguardante il trivigiano (Tarzo, Fratta, San Pietro, ecc.). Dalla costante posizione de' depositi arenacei sul pendìo meridionale delle alpi bellunesi e trivigiane ho ricavato alcune importanti conseguenze che a tempo debito non mancherò di pubblicare.

Nel vicentino e nel veronese l'arenaria verde non si vede nè così estesa nè così sviluppata come la si osserva presso Belluno. Essa occupa certamente la parte inferiore delle rocce terziarie con cui è intimamente legata, le quali altro non sono che marne più o meno conchigliacee e calcaria grossolana. Quest'ultima occupa una grande estensione di suolo nel veronese, e si mostra in ispecial modo ricca di fossili (colli al nord di Verona, Avesa, Valdonega, ecc.). Si congiunge inferiormente all'arenaria verde, e si compenetra in essa così da poter formare quella specie di amalgama che tanto si affà alla creta cloritica de' contorni di Parigi, cui pure si assomiglia il tramezzo arenaceo-calcario che divide la calcaria grossolana dell'Ungheria dalla creta (Beudant, *Voyage en Hongrie*, Tom. III. pag. 266.). La calcaria trasmutata in roccia cloritica si lascia vedere nel fondo delle valli più prossime a Verona, ove contiene le stesse specie fossili che annidano nelle parti più alte della calcaria medesima, ad eccezione però delle Nummuliti, le quali mancano, o sono così rare, ch'io non seppi mai vederne le tracce, mentre gli strati superiori riboccano di sì fatti corpi. Lo stesso debbo dire di alcuni luoghi dell'agro vicentino, in cui li grani verdi formano parte integrante della porzione più bassa della calcaria in discorso, cioè di quella porzione ch'io considero come un equivalente dell'arenaria verde bellunese (Creazzo, Castel Gomberto, Leonedo, ecc.). Non so se dappertutto la calcaria grossolana nummu-

litica riposi sopra una specie di glauconia calcarifera spoglia di Nummuliti, o se accada il contrario in altri paesi. Ciò che posso asserire si è che l'arenaria verde bellunese contiene presso a poco, come accennai, le stesse specie fossili della calcaria grossolana di Verona, ad eccezione delle Nummuliti [8] che mancano in quasi tutte le arenarie selciose delle provincie venete, tranne quella che vidi adagiata sopra il terreno cretaceo di Teolo negli Euganei, la quale, per quanto ho potuto scorgere, si prolunga fino a Castelnuovo conservando sempre la stessa posizione, e mostrandosi ovunque anteriore alla comparsa delle trachiti [9].

A Roncà (veronese) la calcaria grossolana alterna a più riprese con la brecciola vulcanica, contenente le conchiglie medesime che si trovano nella calcaria (Valle Cunella). Anche gli avanzi ittiolitici della brecciola si ripetono nella calcaria di Roncà ed in quella de' contorni di Verona, e ne sia prova una serie di denti del *Carcharodon sulcidens* di Agassiz [10] e del *Myliobates micropleurus* dello stesso naturalista, che in unione ad altri fossili io deponeva a titolo di dono nel Gabinetto di storia naturale dell'I. R. Università di Padova [11].

In generale, se certe razze d'animali fossili abbondano in alcune situazioni della zona terziaria, in altre scarseggiano o mancano del tutto. Nel golfo, entro cui si deponeva la calcaria grossolana di Verona, univansi condizioni molto propizie alla moltiplicazione e dimora degli Echinidi, giacchè le loro spoglie sono numerosissime in questa roccia [12]; laddove nel vicentino se ne scorgono in assai minor numero, tutto che il suolo sia della stessa natura e della medesima epoca di formazione. Sterilissima di Echinidi mi apparì l'arenaria grigia (*Molasse*), e poche sono le specie che finora ho potuto raccogliere nell'arenaria verde, benchè in alcuni luoghi sia ricca di Aculei riferibili al genere *Clypeaster?* Per l'opposto la zona miocena del vicentino è doviziosamente fornita di Polipai d'ogni maniera, di cui appena si scorgono le tracce ne' terreni analoghi del veronese e de' contorni di Belluno. Cotesti appaiono in parte inviluppati dentro le brecciole dei Tovazzi, di Monteviale, di Sangonini, di Montecchio maggiore, di Crosetta, ecc., e sono quelli che per essere suscettibili di bella politura

vengono a preferenza adoperati in certi lavori d'intarsio che si fanno a Firenze (13). In altri punti del vicentino le marne e brecciole miocene danno ricetto agli avanzi di Coccodrilli (Favorita), probabilmente simili a quelli dissotterrati dai terreni analoghi dell'Inghilterra e dalle gessaie della Francia; e reliquie degli stessi rettili ho trovate io medesimo nell'arenaria grigia di Libano nel bellunese, all'occasione di una corsa ivi fatta nel passato autunno 1846 in compagnia del dott. Paolo Segato, medico di Belluno. Di cotesti avanzi non rinvenni che frammenti d'ossa appartenenti a diverse articolazioni, e qualche vertebra munita delle sue apofisi, il tutto inviluppato nella roccia, e più strettamente che nol sono quelle discoperte dall'Arduino ne' colli della Favorita (*Giornale di Griselini* vol. I. pag. 83).

In unione alle ossa trovai fusti di piante della grossezza di due pollici con la corteccia incarbonita, e segnati per lungo da strie poco profonde. Due mesi prima ch'io rivedessi quel sito. il dott. Segato raccoglieva in quelle stesse latomie una serie di vertebre congiunte insieme pel verso delle respettive loro articolazioni, e alquante costole appartenenti pure al coccodrillo di cui, unitamente alle piante, darò contezza in altra occasione. Fra gli avanzi ittiolitici a malgrado delle spezzature e degli spostamenti forse ripetuti, che dovettero soffrire prima di seppellirsi nel limo che li racchiude. ho trovato una serie di vertebre, ed alquanti denti co' margini serrati molto voluminosi. Così le vertebre come i denti spettano al *Carcharodon megalodon* di Agassiz, non il solo della famiglia degli *Squalidi*, che abbia ivi lasciate le sue reliquie, avendone altre molte di *Carcharodon productus*, *polygyrus* e *semiserratus*; e fra codeste li denti lisci de' generi *Otodus*, *Lamna* e *Oxyrhina*, che pur esistono copiose nelle rocce calcario-trappiche del vicentino e del veronese.

Tali sono le osservazioni che ho creduto di far precedere all'illustrazione de' polipai fossili dell'ordine degli *Anthozoari* che ho raccolto nel vicentino, e che in parte provengono dalla collezione Castellini ora esistente nel Gabinetto di storia naturale dell'Università di Padova. Le specie che finora ho determinate sono cinquantasei. nè tutte appartengono ai terreni terziarii. essendone alcune le quali spet-

tano in parte alla formazione della creta ed in parte a quella del Trias d'*Intre Sass* distretto di Livinallungo (14). Io aveva in animo di pubblicare nella presente Memoria tutte le specie finora determinate, ma essendo mia intenzione di dare l'intera serie de' polipai trovati nel veneto, riserbo le venti che rimangono per aggiungerle alle altre non per anche descritte, e riferibili ai generi *Monticularia* (*Hydnophora*, Fischer), *Madrepora*, *Isis*, *Meandrina* (*Meandra*, Oken), *Stylina*, *Sarcinula* e *Astrea*. A questi due ultimi generi appartengono le venti specie superiormente indicate, ed entrano fra le spoglie che trovai sepolte nel terreno mioceno del vicentino.

# AVVERTENZE

*Alla Memoria sopra il* terreno di sedimento superiore *trova il sottoscritto da aggiungervi alcune osservazioni e correzioni, consigliate dagli studii fatti sopra i fossili terziarii dopo la sua pubblicazione.*

In detta Memoria non ammetto fra le rocce *eocene* se non la glauconia terziaria del Bellunese, e con essa la parte più bassa della calcaria grossolana del Veronese piena di grani verdi, quando invece io doveva comprendere anco la *gran zona nummulitica* divisata dal dottor Ewald, nella quale esistono effettivamente delle specie fossili non mai trovate finora nella *zona nummulitica superiore*. Tali sono il *Terebellum obvolutum*, il *Trochus Boscianus*, il *T. cumulans*, una specie di *Scalaria* forse inedita, ed alcune Patelle. Le attuali mie idee sul maggiore sviluppo ch'io doveva accordare alla zona *eocena* del Vicentino e del Veronese, sono state già consegnate in una Nota testè pubblicata *Sulla non ammissibilità della Fauna fossile annunziata dal sig. Ewald come caratteristica della grande formazione nummulitica del terreno terziario* (Padova coi tipi del Seminario, Marzo 1848).

Pag. 3 lin. 4 dopo il vocabolo *continenti* si aggiunga: «D'altronde non saprei per ora mettere a calcolo le osservazioni pubblicate da Elia di Beaumont sulle *lacune* ch'egli suppone esistere in tutti i luoghi della Francia in cui l'argilla plastica trovasi immediatamente sovrapposta alla creta, non già divisa da un deposito di età intermedia fra la creta ed il terreno *eoceno* come si ammira in altri luoghi della Francia medesima, giacchè questo deposito manca onninamente nelle alpi venete» (*Bull. de la Soc. géol de France, Mars* 1847).

Pag. 4 lin. 3 dopo il binomio *Arenaria verde* si aggiunga: «Però un ingente deposito di molasse conchigliaceo si scoprì non ha guari nell'alto Vicentino rimuovendo la gradinata della parrocchiale di Schio, il quale contiene le stesse specie fossili che sono inviluppate nella calcaria *miocena* de' Frati, che gli è vicina, ad eccezione delle nummuliti e di qualche raro ittiolito della famiglia degli Scomberoidi (Sphyrena Bolcensis) trovato in quest'ultima roccia».

Pag. 8 lin. 11: A Roncà (Veronese) la calcaria *eocena* si mostra anteriore all'apparizione delle rocce vulcaniche, benchè in alcuni luoghi (Val Cunella) li suoi depositi alternino apparentemente con li depositi o pseudostrati della brecciola, derivata dalla stessa causa che produsse il basalte, e ciò per le ragioni allegate nella nota più sopra citata. Gli avanzi ittiolitici della brecciola si ripetono nella calcaria miocena del Vicentino e del Veronese, come lo aveva dichiarato in una Memoria inserita nel Giornale di Brugnatelli (1826), e riportata per estratto nella nota suddetta.

CATULLO

# DESCRIZIONE DELLE SPECIE

## CARYOPHYLLIA GRUMI, nob.

Tav. I fig. 2

*C. subcylindrica, flexuosa, transversim subannulata, cellula terminali excavata, lamellis inaequalibus duodecim majoribus, elevatis; basi truncata. Magnitudine naturali.*

Cariofillia conica, incurvata, con rughe traversali prominenti, che circondano più o meno completamente il polipaio. Cellula terminale alquanto obbliqua, inclinantesi verso il lato concavo della curvatura, fornita di lamelle di varia grossezza, le quali si dirigono dalla periferia verso il centro senza congiungersi insieme, lasciando in questo punto della cellula un vano circolare privo di raggi. Sopra un lato della base v'ha una depressione longitudinale obbliqua che potrebbe indicare il punto di attacco del polipaio, la quale finisce in un'appendice acuminata che si ripiega indietro.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questo fossile, pel suo aspetto cilindrico, si approssima alla figura 4 della tavola XVII riferita da Goldfuss al *Cyathophyllum vermiculare* scoperto ne' terreni di antico sedimento dell' Eifel, ma non combina per nulla nel resto, meno poi con la descrizione dell'autore.

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana terziaria di M. Grumi presso Castel Gomberto nel vicentino.

## CARYOPHYLLIA PSEUDO-CALVIMONTII, nob.

Tav. I. fig. 3 *a*, *b*

*C. solitaria, conico-truncata; cellula terminali oblonga, lamellosa, in centro elevata. Magnitudine naturali.*

Cariofillia conica, troncata nella base, esternamente segnata di grosse strie longitudinali, alcune più eminenti delle altre e di disuguale grossezza. Le depressioni trasversali sono circoscritte da cingoli o rialzi alquanto flessuosi; Stella oblunga fornita di lamelle sottili nella periferia, le quali s' ingrossano a misura che più si avvicinano verso il centro, ch'è molto elevato.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questo fossile ha qualche conformità con la *Caryophyllia Calvimontii* di Lamouroux, rappresentata da Michelin nella tavola XXVII, figura 1 (*Icon. zooph.* pag. 116), da cui però si discosta per più motivi, e principalmente perchè ha il centro della cellula terminale molto elevato, e perchè le depressioni esteriori sono più marcate e più regolari di quelle espresse nel disegno di Michelin.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana de' Grumi presso Castel Gomberto nel vicentino.

## CARYOPHYLLIA DOLIUM, nob.

Tav. I. fig. 4

*C. turbinata, crassa, solitaria, superne sulco profundissimo exarata, cellula orbicolari, subconcava, lamellis crassiusculis granulatis. Magnitudine naturali.*

Cariofillia ovato-conica, solitaria, cinta di rughe trasversali flessuose dipendenti dall'accrescimento del polipaio; avente nel terzo superiore una forte strangolatura e sopra di questa un solco poco profondo, non confondibile con le rughe inferiori. Cellula circolare, leggermente concava, munita di lamelle numerosissime, le quali ne' punti più vicini alla periferia sono in parte granulate.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

È distintissimo dall' *Intophyllum pisiforme* di Goldfuss col quale conserva una lontana simiglianza, in quanto che ha le lamelle stellifere circoscritte, non già diffuse oltre la periferia della cellula, come si ammira nell' individuo figurato da Goldfuss (tab. XIII. fig. 10), cui manca eziandio il solco profondo traversale che abbiamo notato nel nostro.

LOCALITÀ

Fossili nel terreno calcareo-trappico di M. Viale nel vicentino, ove si trova in compagnia di altre specie di polipai convertite in celestina.

## CARYOPHYLLIA CINGULATA, nob.

Tav. I. fig. 5. *a. b. c.*

*C. solitaria, subconica, striata, striis longitudinalibus crassis vel dentatis, exterius transversim sulcata; cellula terminali subrotunda, lamellosa, lamellis inaequalibus; basi truncata. Magnitudine naturali.*

Cariofillia solitaria, subconica, longitudinalmente segnata da strie piuttosto grosse, talvolta dentate e molto distanti fra loro. L'esterno del polipaio appare attraversato da due solchi, uno più profondo dell'altro. Cellula terminale quasi rotonda e munita di grosse lamelle che vanno dal centro alla circonferenza.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questa cariofillia s'allontana da tutte le altre congeneri de' nostri terreni terziarii, per la grossezza delle strie longitudinali e per la distanza che v' ha tra una stria e l'altra. In uno de' due esemplari meglio conservati che possiedo, la stella terminale è per intero ricoperta dalla brecciola vulcanica, che per essere inattacabile dagli acidi, non mi fu possibile di toglier via con mezzi meccanici senza il pericolo di distruggere ad un tempo le lamelle del disco.

Nella tavola presento il disegno d'ambidue questi esemplari.

LOCALITÀ

Fossile nella brecciola del M. della Crocetta e nella calcaria grossolana di Castel Gomberto nel vicentino.

## CARYOPHYLLIA CYATHUS, Lam.

Tav. I. fig. 6.

*Cariofillia solitaria, conica, con la base molto incurvata verso il lato sinistro; cellula terminale concava munita di lamelle, avente nel centro li residui della papilla. Grandezza naturale.*

OSSERVAZIONI

È la specie più facilmente riconoscibile in grazia della forma sempre costante degli individui d'ogni età, benchè in alcuni io abbia rimarcata la mancanza della papilla centrale, derivata certo dagli accidenti che accompagnarono la petrificazione. Qualche autore riguarda la *Caryophyllia cyathus* come un individuo della *Caryophyllia ramosa* in età giovanile, ma Lamouroux, e con esso molti altri, la considerano come una specie distinta (*Encycl. méthod.* 1834 pag. 167).

LOCALITÀ

Questo fossile che trovasi anche nel terreno terziario superiore del Piemonte, esiste nelle marne pliocene dell'Asolano in compagnia d'alcune specie del genere *Turbinolia.*

## CARYOPHYLLIA PANTENIANA, nob.

Tav. I. fig. 7

*C. Conica, exterius striata; striis exilissimis; cellula terminali subconcava, lamellosa; lamellis brevissimis, margine extenso subrotundato; basi obtusa. Magnitudine naturali.*

Cariofillia conica, soleata per lungo da strie sottilissime, cinta trasversalmente da due forti depressioni, una maggiore dell'altra; cellula terminale subconcava provveduta di lamelle molto esili e vicine tra loro. Margine della cellula subrotondo; base ottusa.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Io la credeva dapprincipio una mediocre varietà della *Caryophillia Moreausiaca* di Michelin (*Icon. zooph.* pag. 85. Tab. XVII fig. 1), benchè quest'ultima manchi di depressioni trasversali; ma oltre a questo divario, m'avvidi che il nostro individuo si scosta dalla specie di Michelin per altri riguardi, cioè per avere la cellula terminale più ampla, il margine meno angoloso e le lamelle più sottili e più vicine fra loro.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria della creta di Valle Pantena presso Calogne a sinistra della strada che mette a Bellori (veronese). La specie descritta dal naturalista francese appartiene alla calcaria corallifera del dipartimento della Mosa.

## CARYOPHYLLIA GLOBULARIS, nob.

Tav. I. fig. 8. *a*, *b*, *c*.

*C. globosa, striata; striis majoribus minoribusque alternis; cellula terminali rotunda, subconcava; lamellis inaequalibus. Magnitudine naturali.*

Cariofillia breve, globosa, rigata da strie di varia grossezza, le sottili poste negl'intervalli che rimangono fra le più grosse. Cellula rotonda, poco incavata, munita di lamelle disuguali.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

È patente a prima giunta la somiglianza che v'ha tra questa specie e la *Caryophyllia globosa* illustrata da Michelin (*Icon. zooph.* pag. 17. Tab. IV fig. 4); ma la parte inferiore di quest'ultima si prolunga in una specie di piede appena abbozzato, laddove la nostra finisce in una base rotonda che inclina all'ovale. In un punto eccentrico della base le strie si congiungono insieme nel modo che ho cercato

d' indicare nella fig. *c.* della tavola suddetta. Un' altra differenza si ravvisa nella cellula terminale molto più ampla e profonda nell' individuo descritto da Michelin, e poco incavata nel nostro.

LOCALITÀ

Fossile nella creta di M. Castello presso Valdagno nel vicentino. Collezione Castellini.

## CARYOPHYLLIA SUBVASIFORMIS, nob.

Tav. I. fig. 9. *a*, *b*.

*C. adhaerens, simplex, subvasiformis, striata, striis longitudinalibus numerosis; plicis transversim inaequaliter distantibus; cellula terminali scutelliformi, lamellosa; basi truncata. Magnitudine naturali.*

Cariofillia aderente, semplice, simulante la forma di un vase; rigata longitudinalmente da strie molto numerose, più grosse verso la base; circondata tutto all' intorno da pieghe ineguálmente distanti fra loro. Cellula imbutiforme profonda, provveduta di lamelle che dal margine ove hanno principio, non si prolungano fino al centro; base troncata.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Osservasi in questo polipaio molti de' caratteri notati da Michelin nella *Caryophyllia vasiforme* per lui descritta e figurata nella sua Iconografia (pag. 88. Tab. XIX fig. 4.), ma attesa la maggiore grossezza della base e la presenza delle pieghe trasversali, sembra che il nostro individuo appartenga ad un' altra specie. Anche la forma della sua cellula riesce differente, essendo alquanto obbliqua, mentre in quella di Michelin è quasi orizzontale. Oltre a ciò, la specie illustrata dal naturalista francese spetta al terreno oolitico, laddove la nostra è stata annoverata da Castellini, cui prima apparteneva, fra le specie fossili della calcaria grossolana del vicentino.

## CARYOPHYLLIA BITHALAMIA, nob.

Tav. I. fig. 10. *a*, *b*.

*C. subconica, truncata, striata, striis alterne crassis et exiguis; cellula terminali prolifera, lamellosa; lamellis aequalibus in centro elevatis; basi truncata.*

Cariofillia subconica, troncata alla base, rigata da strie grosse e sottili alternanti, che si fanno più cospicue a misura che più s'avvicinano alla cellula inferiore prolifera e si prolungano sopra la papilla emisferica che si vede nel centro della seconda cellula. Base troncata.

### OSSERVAZIONI

È inutile far osservare che questa specie non può essere paragonata a nessuna delle Cariofillie finora descritte dagli Autori in causa del corpo conico, striato, fornito di lamelle stellifere che si erige dal centro del disco inferiore e che porta esso stesso una papilla centrale lamellosa. Io considerava questa specie, unitamente all'altra che gli succede, come tipi d'un nuovo genere che appellai *Caryophyllopsis* (15), il quale veniva approvato dal conte Münster che nel 1834 onorava di una sua visita la mia collezione; ma vista poi l'infinita varietà di forme che gli animali delle Cariofillie hanno potuto dare ai loro polipai, ho creduto di mutare consiglio e di riferire quelle specie al genere *Caryophyllia*.

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana della Trinità, a due miglia da Montecchio Maggiore nel vicentino.

## CARYOPHYLLIA BIFORMIS, nob.

Tav. I. fig. 11. *a*, *b*, *c*.

*C. solitaria, conico-elongata, compressa, plicis 20 longitudinalibus asperis usque ad basim; cellula terminali oblonga, lamellosa, vel excavata vel subplana in disco prolifera; lamellis aequalibus subcrenulatis; basi recurva, saepe acuminata. Magnitudine naturali*

Cariofillia solitaria, conico-allungata, compressa, munita di 20 pieghe longitudinali, aspre al tatto, che dall'apice si prolungano fino alla base; cellula terminale oblunga, lamellosa, ora concava ed ora piana, e sempre prolifera. Base incurvata, che finisce in punta acuta.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

È analoga, come dissi, alla specie precedente, ma la sua base è appuntita e il cono che s' innalza dalla cellula prolifera appare molto più lungo e privo della papilla stellifera che si vede nella *Caryophyllia bithalamia*, la quale in luogo di pieghe crenulate è segnata inferiormente da strie sottili che vieppiù s' ingrossano verso l'apice.

Della *Caryophyllia biformis* si trovano frammenti spettanti ad individui di varie grandezze, i quali considerati isolatamente si prenderebbero come specie fra di loro diverse, non già quando si pongono al confronto con un esemplare perfetto della specie a cui appartengono.

A canto il disegno di questa specie ho poste le figure de' due frammenti che raccolsi nello stesso luogo in cui ho trovato l' individuo intiero. La figura *c*, benchè sembri in apparenza una turbinolia, spetta ad un giovane individuo della specie nostra; mentre la figura *b*, che ha tutto l'aspetto d'una Cariofillia troncata, rappresenta la parte superiore della specie suddetta.

LOCALITÀ

Fossile nelle marne terziarie di Valle di Lonte non lungi da Castel Gomberto nel vicentino.

## CARYOPHYLLIA PEDATA, nob.

Tav. III. fig. 3

*C. adhaerens, conica, pedunculata; longitudinaliter striata, transversim rugosa; rugis flexuosis impariter distantibus; cellula terminali subprofunda, irregulari, lamellosa, basi attenuata, leviter incurva. Magnitudine naturali.*

Cariofillia conica, peduncolata, striata per lungo, cinta di rughe traversali flessuose inegualmente distanti fra loro, cellula terminale subrotonda, irregolare, lamellosa; base lievemente incavata.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Dubito se questo fossile appartenga al genere delle Cariofillie o se sia piuttosto una Turbinolia. La base troncata è un carattere che poco serve per distinguere le prime dalle seconde, giacchè anco le Turbinolie sono polipai infissi, non già liberi come supponeva Lamarck. Esso però ha l'aspetto delle Cariofillie appendicolate, e per questo titolo lo stimai una Cariofillia; ma non prenderò contesa con chi volesse considerarlo una Turbinolia.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana della Trinità presso Montecchio Maggiore nel vicentino. Finora non possiedo di questa specie che un solo esemplare.

## CARYOPHYLLIA BISULCATA, nob.

Tav. II. fig. 1.

*C. conica, turbinata, leviter recurvata, externe striata. Cellula terminali flexuosa lamellosissima, ab utroque latere sulcis longitudinaliter excavata; basi adhaerente. Magnitudine naturali.*

Cariofillia conica, turbinata, leggermente incurva verso la base, rigata per lungo da strie. Cellula terminale, lamellosa, compressa ne' lati in grazia di due solchi molto profondi longitudinali che non si estendono fino alla base.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questa specie si distingue dalle altre Cariofillie in causa de' solchi laterali, che partono dal margine della cellula e si prolungano fino un poco al di sopra dell'estremità della base. La superficie è inoltre attraversata da due solchi, i quali sono molto profondi sulle facce maggiori del polipaio e appena discernibili ne' fianchi.

LOCALITÀ

Fossile nelle marne terziarie della Valle di Lonte e nella calcaria grossolana di Castel Gomberto nel vicentino.

## CARYOPHYLLIA PSEUDOCERNUA, nob.

Tav. II. fig. 2. *a*, *b*.

*C. affixa, infundibuliformis, prolifera, striata; cellula terminali flexuosa, lamellata; lamellis crebris, radiantibus, raro bifurcatis. Magnitudine naturali.*

Cariofillia aderente, imbutiforme, prolifera sui lati, esteriormente striata. Cellula terminale ampla e flessuosa, munita di lamelle spesse, sottili, talvolta bifide presso il margine.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

La credeva dapprima un individuo della *Turbinolia cernua* di Goldfuss (*Petrefacta Germ.* T. I. p. 52 Tab. XV. fig. 8); ma la cellula della specie nostra è flessuosa ne' margini, e non mai inchinata all' ingiù come si osserva nella specie di Goldfuss. È anche soprattutto distinguibile per avere le lamelle bifide presso il margine della cellula, e perchè le strie esteriori si prolungano dal margine superiore alla base senza soffrire veruna interruzione, mentre nella figura di Goldfuss appaiono interrotte da risalti traversali (fig. *c. faciei externae magnitudine aucta*). L' individuo che ho presente porta sopra uno de' lati una protuberanza stellifera molto bene pronunziata, e nella base appare longitudinalmente troncato. Sono dubbioso se, per avere il fusto munito di una gemma, io poteva tuttavia riporre questa specie fra le Cariofillie, come anco se il margine alquanto flessuoso della cellula sia carattere sufficiente per crederla invece una Lobofillia. Starò contento al giudizio qualunque egli sia che si vorrà dare circa questi miei dubbii. Giusta la classificazione proposta dall' Ehrenberg, non mai spuntano gemme dal fusto delle Cariofillie, quindi è probabile che la *Caryophyllia pseudocernua* venga da taluni considerata una spe-

cie particolare del genere *Dendrophyllia* di Blainville, nè io mi opporrò a questo giudizio.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana della Trinità presso Montecchio Maggiore nel vicentino.

## LITHODENDRON PSEUDOFLABELLUM, nob.

Tav. II. fig. 3. *a*, *b*, *c*.

*L. erectum, ramosum; ramis truncatis, per septa transversa contextis; in flabellum dispositis; stellis elliptico-sinuatis, irregularibus; lamellis obscuris. Magnitudine naturali.*

Litodendro a rami cilindrici, troncati, esternamente forniti di strie longitudinali, con stelle ellittico-sinuose, solitamente disposti a ventaglio, e attraversati da cordoni molto grossi, che si ripetono di spazio in ispazio.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Le differenze che ho notate in questa specie dipendono dal modo col quale i rami appaiono uniti tra di loro. In alcuni individui i rami esterni laterali si mostrano poco divergenti, talchè il polipaio assunse una forma che si avvicina alla fasciculare (fig. *a*): in altri divergono alquanto dalla perpendicolare, e danno al fossile la figura d'un ventaglio (fig. *b*); ed altri si trovano solitarii (fig. *c*). Questi ultimi si prenderebbono per altri tanti individui del *Lithodendron funiculus* di Michelin al quale si conformano perfettamente (*Icon. zooph.* pag. 93. Tab. XIX. fig. 9).

LOCALITÀ

Il *Lithodendron pseudoflabellum* trovasi con qualche frequenza nella calcaria grossolana ed anche nella brecciola cinerea oscura del M. della Crocetta, un miglio al nord-est di Vicenza. Da questa località ho raccolte anni sono molte specie di polipai riferibili a generi diversi. dei

quali diedi notizia in una nota inserita nel *Giornale di Fisica di Pavia* (Bim. II per l'anno 1819). Alcune delle specie della Crocetta si ripetono nella calcaria grossolana di Costa Bissara che di là è poco distante.

## LITHODENDRON FUSINIERI, nob.

Tav. III. fig. 2.

*L. fasciculatum, erectum; ramis subcylindricis, striatis; in flabellum dispositis, stellis excavatis, irregularibus, lamellosissimis. Magnitudine naturali.*

Litodendro fasciculato, con rami subcilindrici, compressi inferiormente e disposti a ventaglio. Ciascuno presenta segni visibilissimi del ricevuto accrescimento, e tutti sono vergati per lungo da strie piuttosto cospicue. Cellule terminali incavate molto irregolari, fornite di lamelle numerosissime.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questo fossile si allontana notabilmente dal *Lithodendron flabellum* rappresentato nella figura 4 della tavola XXI di Michelin, a cui taluno potrebbe forse crederlo affine. In quello che descriviamo i rami laterali sono molto inclinati, mentre nell'esemplare di Michelin divergono assai poco dalla direzione verticale. Nel nostro individuo tutti i rami sono segnati per lungo da solchi alquanto profondi e ciascheduno porta seco le impronte dell'ingrandimento acquistato coll'età, a differenza di quanto si scorge ne' rami del *Lithodendron flabellum* di Michelin che sono affatto liscii.

### LOCALITÀ

Fossile nella brecciola della Crocetta, ove l'ho trovato in una delle corse ivi fatte in compagnia del chiarissimo fisico sig. Ambrogio Fusinieri di Vicenza.

## LITHODENDRON IRREGULARE? Michelin

Tav. III. fig. 4.

Polipaio incrostante, subcompresso, formato di fusti conici disposti a ventaglio, striati longitudinalmente, con cellule terminali talvolta concave, talvolta convesse, ed anche piane, munite di lamelle stellifere molto cospicue. Grandezza naturale.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Nella forma e brevità de' cilindri si avvicina al disegno attribuito da Michelin al *Lithodendron irregulare* (Tab. XL fig. 14), ma ne differisce rispetto alla maggiore grossezza e disposizione de' cilindri, alla diversa figura delle cellule, ed alla sottigliezza delle strie longitudinali, che nel nostro fossile sono appena discernibili e quasi del tutto obliterate. Sulla faccia esterna del polipaio si veggono delle forti depressioni trasversali che mancano nella suddetta figura. Non so se queste differenze derivino dall'età più adulta dell'individuo che ho presente, o si debbano piuttosto considerare come specifiche.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Creazzo nel vicentino. La specie illustrata da Michelin appartiene invece al terreno cretaceo.

## DENDROPHYLLIA IMPURA, nob.

Tav. I. fig. 1. *a*, *b*.

*D. ramosa, ramis cylindricis, laevigatis, dichotomis; cellulis terminalibus excavatis, non lamellosis. Magnitudine naturali.*

Dendrofillia ramosa, a rami quasi eretti o leggermente flessuosi, cilindrici, dicotomi, allargantisi verso l'apice a foggia d'imbuto e privi quasi affatto di strie longitudinali. Cellule terminali incavate, subflessuose, mancanti di lamelle stellifere. Una parte de' rami è ricoperta di crosta stalattitica, attraversata dal solchi obbliqui molto irregolari, forse estranea al polipaio.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

La mancanza pressochè assoluta di strie longitudinali e di lamelle stellifere mi ha fatto dapprima entrare nel sospetto che fosse una specie particolare del genere *Michelina* creato da Koninck (*Anim. foss. des terr. houillers de Belgique*, pag. 29), ma i caratteri della forma e disposizione delle cellule terminali in questo genere non combinano per nulla con quelli della specie che ho sott'occhio. A ciò si aggiunga che la parte superiore de' rami si allarga negl' individui adulti della specie nostra in una sorta d' imbuto, mentre in quelli d'età giovanile questa parte comparisce circoscritta da un risalto di figura variabile, talvolta triangolare.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Castel Gomberto nel vicentino.

## DENDROPHYLLIA INAEQUALIS, nob.

Tav. III. Fig. 1. *a*, *b*, *c*.

*D. caespitosa, ramis cylindricis divergentibus vel erectis; cellulis terminalibus excavatis vel planis; lamellis crassiusculis aequalibus. Magnitudine naturali.*

Dendrofillia a rami inferiormente congiunti, cilindrici, talvolta divergenti, talvolta dritti, segnati longitudinalmente da solchi piuttosto profondi. Cellule terminali escavate ed anche piane, munite di lamelle stellifere eguali fra di loro.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Se non avessi avuto sotto gli occhi molte varietà di questo polipaio, alcune si sarebbero potute risguardare come specie particolari in causa della diversa distribuzione e lunghezza de' rami, ed anche per la varia conformazione delle cellule ora concave, ora piane ed ora mancanti di lamelle. Negl' individui adulti i rami sono grossi quanto il dito mignolo della mano, rare volte si suddividono in altri rami

e quasi tutti si congiungono insieme pel verso della base. Alcune varietà si accostano al *Cyathophyllum caespitosum* rappresentato da Goldfuss nella tavola XIX fig. 2 dell'opera sopra i fossili della Germania. Della *Dendrophyllia inaequalis* conservo undici esemplari, da cui ho scelto i meglio conservati per darne le figure.

LOCALITÀ

Questa specie trovasi con molta frequenza nella calcaria grossolana di Sant'Urbano presso Montecchio Maggiore nel vicentino, ed anche a Monte Viale dove si sono rinvenuti individui trasmutati in stronziana solfata cerulea.

## DENDROPHYLLIA MARASCHINI, nob.

Tav. III. fig. 5.

*D. erecta, striata, ramis brevibus, truncatis, cellulis rotundis, lamellosis, excavatis, vel planis. Magnitudine naturali.*

Dendrofillia a rami dritti, brevi, con cellule terminali rotonde, lamellose, talvolta concave, talvolta piane.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Non è la *Dendrophyllia irregularis* di Blainville figurata da Michelin (Tab. X. fig. 21) a cui peraltro molto si assomiglia, ma i rami nel nostro esemplare sono più lunghi e le cellule mancano della pupilla centrale indicata da Michelin nella frase specifica.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Sant'Urbano e di Montecchio Maggiore nel vicentino. Di questa specie, tanto frequente nelle Collezioni del veneto, io ho ricevuto il primo esemplare dal fu ab. Maraschini, cui la ho dedicata fino dal 1819 sotto il nome di *Caryophyllia Maraschini.*

## LOBOPHYLLIA SUCCINCTA, nob.

Tav. II. fig. 4.

*Loboph. crassa, ramosa, ramis cylindricis erectis, striatis, plicis accrementorum transversis inaequalibus; cellulis terminalibus lamellosis; lamellis numerosissimis irregularibus; centro papilloso. Magnitudine naturali.*

Lobofillia grossa, ramosa, rami cilindrici dritti, talvolta lievemente curvati, striati per lungo; muniti di pieghe trasversali di varia grossezza, rappresentanti i segni dell'ingrandimento ricevuto coll'età. Cellule terminali con lamelle raggianti numerosissime, che mai arrivano fino al centro e che talvolta sembrano dentellate. Centro papilloso.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questa specie ammette alcune differenze dipendenti forse dall'età tanto nella lunghezza de' cilindri e nella forma delle pieghe trasversali, quanto nella profondità e figura delle cellule terminali talvolta rotonde, talvolta ellittiche. Ha molta analogia colla *Lobophyllia cylindrica* di Michelin (*Icon. zooph.* pag. 90 Tab. XX, fig. 2), dalla quale si distingue perchè i suoi rami non partono da un tronco comune, ma concorrono insieme a formare la base. Non possiedo l'opera di Philips sulla geologia dell' *Yorkshyre* per riconoscere se la *Caryophyllia cylindrica* di questo autore, citata da Michelin, conserva con la nostra maggiori punti di simiglianza. Di tutti gli autori che ho per le mani non trovo alcuna figura che sia applicabile a questa specie, a meno che non si volesse crederla affine ad un polipaio disegnato da Bourguet nella tavola X del *Trattato sulle petrificazioni.*

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana della Trinità e di Castel Gomberto nel vicentino.

## LOBOPHYLLIA GREGARIA, nob.

Tav. II. fig. 5 *a*, *b*

*L. glomerata, ramosa; ramis conicis acervatis, transversim rugosis, longitudinaliter striatis; cellulis excavatis lamellosis, lamellis crassiusculis inaequalibus. Magnitudine naturali.*

Lobofillia in rami conici aggruppati fra loro, solcati trasversalmente da pieghe più o meno regolari, e rigati per lungo da strie, che appaiono interrotte o si fanno capillari negli intervalli occupati dalle pieghe. Cellule terminali escavate, fornite di lamelle piuttosto grosse che vanno dal centro alla circonferenza.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Differisce dalla specie precedente per la forma e disposizione de' rami, i quali sono decisamente conici, con la base diretta verso il centro inferiore e con le cellule disposte circolarmente attorno il cono centrale ch' è diritto e alquanto più grosso degli altri. Alcuni de' coni sono proliferi, e portano sui lati i rudimenti di coni novelli, i quali hanno cellule convesse e lamellose.

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Montecchio Maggiore e nelle marne terziarie sabbionose di Brendola tanto ricche di Foraminifere, non ancora descritte da alcuno.

## LOBOPHYLLIA PSEUDO-ROCHETTINA, nob.

Tav. II. fig. 6 *a*, *b*

*L. aggregata, conica, sulcata, sulcis longitudinalibus profundatis; cellulis inaequalibus lamellosissimis; lamellis crassis, per interstitia decurrentibus. Magnitudine naturali.*

Lobofillia in coni aggregati, rigati per lungo da solchi profondi; cellule terminali munite di lamelle grosse numerose, che si estendono anche nello spazio che v' ha tra una cellula e l'altra.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Nella struttura e grandezza delle cellule, come pure nella disposizione e decorrenza delle lamelle si assomiglia all'*Astrea Rochettina* di Michelin (*Icon. zooph.* pag. 55. Tab. XII fig. 2). Mostra anco di avere molt'analogia con la *Madrepora cavernosa* figurata da Esper nella tavola XXXVII del primo supplimento; ma in quella che descriviamo, la parte inferiore del polipaio è composta di rami conici stretti insieme, con le basi dirette verso il centro, come si ravvisa nella specie precedente. Veduta pel verso delle cellule, si confà talmente con la specie di Michelin, che si potrebbe con facilità scambiare con essa. L'ho chiamata *Lobophyllia pseudorochettina* per alludere a questa simiglianza.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana della Trinità presso Montecchio Maggiore nel vicentino.

## LOBOPHYLLIA CALYCULATA, nob.

Tav. II. fig. 7 *a*, *b*, *c*

*L. erecta, striata, ramosa; ramis calyculatis; cellulis subrotundis, sinuosis, in cellula terminali connectentibus; lamellis inaequalibus; basi attenuata adhaerente. Magnitudine naturali.*

Lobofillia dritta, striata, ramosa: rami conici caliciformi, con cellule esteriormente rotondate, lamellose, che s'aprono internamente per congiungersi nella cellula terminale del centro, molto lunga e ristretta. Base del ceppo assottigliata e aderente.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questa specie si discosta dalle altre che le sono congeneri per la lunghezza e la forma del tronco provveduto di nodi brevissimi, ed anche

pei rami conici divergenti che porta sulla cima. La cellula terminale, entro cui confluiscono tutte le altre, comparisce molto ristretta in grazia d'una forte curvatura che ha ricevuto nel lato opposto e che ho cercato di rappresentare nella seconda delle figure sopra indicate.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana della Trinità presso Montecchio Maggiore.

## LOBOPHYLLIA CONTORTA? Michelin

Tav. IV. fig. 10.

Lobofillia subramosa, superiormente dilatata, rami brevi sinuosi, striati; cellule allungate, profonde, flessuose, comunicanti fra loro, e munite di lamelle ineguali. Grandezza naturale.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Ad onta di qualche differenza che ho notata tra l'individuo che conguagliai dubbiamente alla *Lobophyllia contorta* di Michelin e la descrizione che ne dà l'autore, pure non seppi risolvermi a riguardarlo come una specie distinta. Fui tentato da principio a crederlo tale in grazia delle pieghe trasversali che lo cingono tutt'all'intorno; ma vista la molta simiglianza che conserva nel rimanente con la figura 12 tavola X di Michelin, pensai che questa svarianza non dovesse oltrepassare le differenze che costituiscono le varietà.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Castel Gomberto nel vicentino, dove alquanti anni addietro si sono disseppelite le ossa di un grande cetaceo, probabilmente di *Manatus*, ora custodite nel Gabinetto dell'I. R. Università di Padova.

## LOBOPHYLLIA PULCHELLA, nob.

Tav. IV. fig. 11.

*L. adhaerens, conica, subfungiformis, pedicellata, cellula flexuosa, lamellosa; lamellis crassis rare dichotomis, inaequalibus; centro excavato. Magnitudine naturali.*

Lobofillia aderente, conica, subfungiforme, prolungantesi inferiormente in una specie di pedicello cilindrico, munito sul lato sinistro di un grosso tubercolo; cellula terminale flessuosa con lamelle crasse, talvolta dicotome presso il margine. Centro incavato.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Le serie longitudinali appena si lasciano vedere nella parte inferiore della cellula, e mancano in tutto il resto del corpo. Ho dato di questo polipaio due disegni; il primo rappresenta l'inclinazione della cellula verso la base, non che la forte piegatura di forma triangolare sofferta dal margine; la seconda offre la figura turbinata del lato opposto.

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Sant'Urbano nel vicentino. Il piede di alcuni individui manca del tubercolo laterale; e ove la piegatura del margine è appena visibile, il numero de' lobi è sempre maggiore.

## LOBOPHYLLIA HIBERNA, nob.

Tav. IV. fig. 12.

*L. adhaerens, truncata, extrinsecus striata; striis crassiusculis inaequalibus; cellula terminali lobata; lobis rotundatis, lamellosis, lamellis crassis, angulosis, saepe undatis. Magnitudine naturali.*

Lobofillia aderente, troncata, esteriormente solcata da strie longitudinali piuttosto grosse

e ineguali. Cellula terminale circondata da lobi muniti di lamelle grosse angolose, spesso ondulate.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Sembra a prima giunta una Meandrina, ma le stelle apparentemente prodotte dai risalti laterali de' lobi sono contigue fra di loro e vanno tutte a finire nella cellula maggiore del centro ch'è alquanto incavata.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria di Sant' Urbano nel vicentino.

## LOBOPHYLLIA BERTOLINA, nob. (14)

*L. conica, truncata, transversim rugosa, longitudinaliter striata; cellula elongata, lamellosa; lamellis inaequalibus impariter distantibus; margine flexuoso. Magnitudine naturali.*

Lobofillia conica, troncata, trasversalmente rugosa, solcata per lungo da strie piuttosto grosse; cellule molto allungate, munite di lamelle inegualmente distanti fra di loro; margine flessuoso, lobato.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Le pieghe rientranti del margine non solo s' insinuano fin presso il centro della cellula, come si scorge nella specie precedente, ma si prolungano esteriormente verso la base senza però oltrepassare la metà della lunghezza del polipaio.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Sant'Urbano nel vicentino.

## LOBOPHYLLIA FORMOSISSIMA, nob.

*L. adhaerens, infundibuliformis, prolifera, striata; cellula terminali saepe elongata, flexuosa, lamellosa; lamellis inaequalibus. Magnitudine naturali.*

Lobofillia aderente, infundibuliforme, prolifera, striata longitudinalmente, avente la cellula terminale molto allungata, flessuosa, munita di risalti collinari e di lamelle di grandezza ineguale.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Il labbro della cellula inferiore non circonda intieramente il corpo di questa Lobofillia, come si ammira nella *Caryophyllia bithalamia,* ma si arresta in un certo punto della periferia, e lascia discoperto uno de' lati; laonde guardata pel verso che manca del labbro, comparisce fornita di una sola cellula, non già di due. Per iscansare ogni equivoco, e perchè non si creda essere la mancanza del labbro l'effetto di una rottura ivi sofferta dal polipaio, ho avuto cura di figurare la specie sotto tre differenti aspetti. Coll'esame della figura 3 è facile avvedersi che lo spazio, del quale si parla, è opera dell'animale che si fabbricò il polipaio. Di fatto le strie longitudinali dovrebbero mancare nel tratto non occupato dalla cellula se questa avesse un tempo esistito, ed invece si veggono correre dall'apice alla base senza veruna interruzione. In molti luoghi del vicentino ove esiste la calcaria grossolana ho veduto questa specie, ma difficile assai mi fu sempre lo staccarla dalla roccia a cui tenacemente aderisce. Le cavità lamellifere circoscritte dai risalti collinari della cellula superiore ne rimangono sempre ostruite, nè si può ricorrere al magistero degli acidi per iscoprirvi le lamelle, senza danneggiare ad un tempo le parti più sporgenti del polipaio, composte esse stesse di calcaria spatificata.

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Monte Grumi presso Castel Gomberto nel vicentino.

## TURBINOLIA CASTELLINI, nob.

Tav. IV. fig. 1

*T. crassa, ventricosa, basi incurva, striata; striis alternatis minimis et majoribus; cellula terminali concava lamellosa; lamellis crassis in centro obscuratis. Magnitudine naturali.*

Turbinolia grande, ventricosa, incurvata nella base, rigata longitudinalmente da strie grosse e sottili alternanti fra loro; cellula terminale ellittica, lamellosa, rotondata nel margine e col centro oscurato. Grandezza naturale.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Nella *Turbinolia Castellini* non si distingue l'andamento delle lamelle del centro per essere questa parte ostrutta dalla roccia in maniera da non poterla in guisa alcuna discoprire. Tutto che questa specie sia la più voluminosa delle *Turbinolie* finora raccolte nel veneto, essa non può certo paragonarsi in grandezza alla *Turbinolia bilobata* di Michelin, che arriva ad una altezza e ad una larghezza non inferiori a diciotto centimetri (*Icon. zooph.* pag. 269. Tab. LXII, fig. 1).

### LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana del Monte Grumi presso Castel Gomberto, Collezione Castellini.

## TURBINOLIA LINGULA, nob.

Tav. IV. fig. 2.

*T. elongato-conica, compressa, striata; striis minimis numerosissimis; cellula terminali valde elliptica, excavata, lamellosa; lamellis majoribus quindecim, parvulis septuaginta quinque; basi obtusa vel rotundata. Magnitudine naturali.*

Turbinolia conico-allungata, compressa, rigata per lungo da strie molto sottili e numerose: cellula terminale ellittica, con lamelle di varia grandezza; le maggiori sono in numero di 15, le piccole di 75. Base ottusa o rotondata.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questa specie si distingue dalla *Turbinolia conulus* di Michelin (*Icon. zooph.* pag. 287. Tab. LXVI, fig. 2) con la quale ha qualche conformità per essere molto più schiacciata e più lunga, e per avere i contorni de' lati disuguali, cioè uno convesso e l'altro leggermente incavato. Una delle facce de' lati medesimi è attraversata da pieghe le quali non si ripetono nella faccia del lato opposto. Io ho avuto la cura di rappresentarla da ambedue i lati.

LOCALITÀ

Fossile nelle marne terziarie cerulee di Valle di Lonte presso Castel Gomberto nel vicentino.

## TURBINOLIA MITELLA, nob.

Tav. IV. fig. 3.

*T. compressa, mitriformis, striata, transversim rugosa; cellula elliptica, profunda, lamellosa; lamellis decem majoribus, aliis minimis, basi obtusa, leviter incurva. Magnitudine naturali.*

Turbinolia compressa, mitriforme, longitudinalmente striata; munita di pieghe trasversali più o meno flessuose; cellula terminale ellittica, profonda, con lamelle di varia grossezza, le maggiori in numero di dieci. Base ottusa o troncata.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

In ambi i lati questa specie presenta una sorta di rugosità longitudinale che dal margine della cellula si prolunga fino alla base sotto forma d'un cordone alquanto flessuoso. Nella figura ho creduto di rap-

presentare queste due rugosità de' lati, benchè ricordate io non le abbia nella descrizione.

LOCALITÀ

Fossile nella marna sabbioniccia di Brendola nel vicentino, deposito molto interessante per la copia infinitamente grande de' testacei microscopici che contiene. Sarebbe cosa importante il paragonare questi minimi della creazione organica con gli animali analoghi illustrati da Soldani e da Orbigny, ond'essere in grado di rilevare l'analogia zoologica de' terreni della Toscana e della Francia contenenti foraminiferi, con quelli del vicentino.

## TURBINOLIA INFLATA, nob.

Tav. IV. fig. 4.

*T. conica, ventricosa, striata; striis exterioribus minimis numerosis; cellula rotundata, centro profundo; lamellis inaequalibus, saepe interruptis, basi leviter incurva.*

Turbinolia conica, ventricosa, rigata longitudinalmente da strie finissime, numerose; cellula terminale rotonda, incavata nel centro, con lamelle d'ineguale grossezza, spesso interrotte. Base lievemente incurvata.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Avrebbe la forma di una regolarissima trottola se la base non fosse un po' incurvata da un lato. Le strie esteriori appaiono quasi obliterate presso la base, lo che potrebbe forse derivare dall'alterazione che ha sofferto il polipaio sotterra.

LOCALITÀ

Fossile nelle marne azzurrognole o turchiniccie di Brendola ed in quelle di Valle di Lonte nel vicentino.

## TURBINOLIA PLANA, nob.

Tav. IV. fig. 5

*T. affixa, infundibuliformis, striata; cellula subelliptica, plana; lamellis crassiusculis undulatis; basi incurva. Magnitudine naturali.*

Turbinolia imbutiforme, segnata per lungo da strie eguali tra loro; cellula leggermente ellittica, piana, munita di lamelle piuttosto grosse e ondulate. Base alquanto incurvata.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Questo fossile, confrontato con le specie congeneri che ho dinanzi, si allontana per avere la cellula quasi perfettamente piana, non già più o meno incavata come si ammira nelle altre *Turbinolie*. Si discosta del pari dalla *Turbinolia complanata* di Goldfuss (Tab. XV, fig. 8), quantunque abbia come questa la cellula appianata, per essere meno lunga, e perchè è mancante delle pieghe trasversali piuttosto elevate che si veggono nella citata figura. Di questa specie non ho trovato che due soli individui, il maggiore de' quali servì al disegnatore per darne la figura.

### LOCALITÀ

Fossile nelle marne cerulee terziarie di Valle di Lonte dove esiste in unione ai modelli d'Ampullarie che hanno l'apice della spira agatizzato.

## TURBINOLIA FIMBRIATA, Michelin

Tav. IV. fig. 6

T. APPENDICULATA, *Brongn. Terr. calc. trappéens du Vicentin pag.* 85, *Tab.* V (*fig.* 17 *a, b*)

Turbinolia compressa, conica, dritta, segnata longitudinalmente da strie sottilissime e attra-

versata da rughe più o meno apparenti; stella ovato-allungata con lamelle d'ineguale grossezza, alternanti fra loro; margini fimbriati, lamellosi, base acutissima. Grandezza naturale.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Il principale carattere di questa Turbinolia consiste nella struttura de' margini laterali, su cui si scorgono molte prominenze coniche formate di lamelle espanse, inegualmente distanti tra loro. Michelin, stando a questo carattere, collocava la *Turbinolia appendiculata* nel genere *Flabellum* (*Icon. zooph.* pag. 45); ma si consigliò poscia di riporla nel genere al quale l'aveva riferita Brongniart sotto il nome di *Turbinolia fimbriata* (ivi pag. 268). È la specie più conosciuta delle Turbinolie per la copia degli individui che si può raccogliere in tutti i luoghi del veneto, ne' quali esiste.

### LOCALITÀ

Questa specie, che a detto di Michelin è assai rara in Francia, trovasi in quantità sorprendente ne' terreni calcareo-trappici del vicentino e del veronese. È noto che a Roncà la brecciola vulcanica alterna a più riprese colla calcaria grossolana, e che ambe queste rocce contengono presso a poco gli stessi fossili; ma non sarà egualmente noto che la specie di cui si parla abbonda nella brecciola e manca nella calcaria.

Nella Valle di Sangonini (vicentino) si trovano individui di questa specie i quali hanno due o tre coste longitudinali che dalla base si prolungano verso la metà superiore delle facce, senza giungere fino all'apice. Questo carattere è stato anche indicato da Michelin nelle osservazioni che succedono alla descrizione specifica.

## TURBINOLIA UNISULCATA, nob.

Tav. IV. fig. 7.

*T. conica, depressa, superne transversim sulcata; striis exterioribus numerosis; cellula elliptica, lamellosa, basi recurva attenuata. Magnitudine naturali.*

Turbinolia depressa, conico-allungata, munita superiormente d'un solco profondo, rigata per lungo da strie molto distinte presso il margine e che insensibilmente svaniscono verso la base; cellula ellittica, compressa lamellosa, col centro oscurato; base curvata che finisce in punta subacuta.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

In grazia della strangolatura, prodotta dal solco flessuoso che si vede esteriormente al di sotto della cellula, non trovo negli autori alcun disegno che possa riferirsi a questo elegante polipaio.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana de' Tovazzi a Monte Viale nel vicentino.

## TURBINOLIA MUTICA, nob.

Tav. IV. fig. 8.

*T. conica, brevis, striata; striis numerosis ad marginem conspicuis; cellula ovato-oblonga, excavata; lamellis inaequalibus alternis; basi obtusa, incurva, non adhaerente. Magnitudine naturali.*

Turbinolia conica, corta, rigata per lungo da strie filiformi, più grosse e rilevate sull'orlo esterno del margine; cellula terminale incavata, ovale, fornita di lamelle d'ineguale grossezza alternanti fra loro; base ottusa, incurvata, non aderente.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Fra le figure di Turbinolie esibite da Lamouroux, da Goldfuss, da Michelin e da altri autori che si occuparono di zoofitologia, non ne ho trovata nessuna che si assomigli alla nostra.

LOCALITÀ

Fossile nella brecciola di Sangonini nel vicentino.

## TURBINOLIA BERICA, nob.

Tav. IV. fig. 9.

*T. conica, lata, rotundata, striis tenuissimis; cellula rotundata, subconcava; lamellis inaequalibus non interruptis; basi leviter incurva. Magnitudine naturali.*

Turbinolia conica, superiormente larga, rotondata, munita di numerose e finissime strie eguali tra loro; cellula quasi rotonda con lamelle che vanno dalla periferia al centro. Base lievemente curvata.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Si approssima nella forma alla *Turbinolia plicata* di Michelotti (Michelin, *Icon. zooph.* pag. 40. Tab. IX, fig. 2 *a*, *b*), ma in questa le strie longitudinali sono molto grosse presso il margine e assai poco apparenti verso la base, quando nella nostra sono eguali in tutta la lunghezza del corpo. Oltre di che le lamelle della cellula non vengono interrotte da quella specie di risalto centrale che si osserva nella specie figurata da Michelin, ma progrediscono dalla periferia fino al centro.

LOCALITÀ

Fossile nella calcaria grossolana di Monte Berico al di sotto degli strati di marna grigia che a lato del Santuario alternano con la calcaria suddetta.

## STROMBODES? INCURVUS, nob.

Tav. IV. fig. 13-14.

*S. liberus, turbinato-cylindricus, incurvus, longitudinaliter striatus; cellula terminali excavata, lamellosa, lamellis subaequalibus.*

Polipaio solitario, conico, incurvato; fornito di strie longitudinali molto spesse, che dall'apice si prolungano fino alla base. Stella concava subellittica con lamelle stellifere in parte distrutte nel centro.

### DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

Inclinava dapprima a crederlo un individuo del *Cyathophyllum ceratites* di Goldfuss (Tom. I. pag. 37, Tab. XVII, fig. 2) riportato da Ehrenberg al genere *Strombodes* di Schweigger; ma la mancanza assoluta di anelli indicanti l'accrescimento del polipaio mi hanno fatto accorto della differenza. Nel mio fossile le strie longitudinali sono decorrenti, non già interrotte di spazio in ispazio da risalti anulari come si osserva nel *Cyathophyllum flexuosum* di Goldfuss, col quale si assomiglia. Però la specie di Goldfuss presenta due forti inflessioni, per cui la figura si approssima ad un *S*, laddove la nostra offre una sola curvatura. Ho creduto di non sacrificare sotto il taglio l'unico individuo ch'io possiedo di questa specie per vedere se nell'interno vi esistono le tramezze descritte da Schweigger, le quali secondo Ehrenberg sono state prodotte dal materiale terroso, secreto dal polipo durante il suo accrescimento. Questo fossile riferito con dubbiezza al genere *Strombodes*, molto si assomiglia ad altro polipaio di più tenue volume, ma con la cellula meno concava e perfettamente rotonda. Esso combina con la figura 2, *c*. della Tavola XVII di Goldfuss applicata dall'autore ad un giovane individuo del *Cyathophyllum ceratites*; ma posto che sia al paragone, la sua forma riesce più svelta e la cellula terminale più grande. Ho creduto prezzo dell'opera di dare la figura di questo fossile (fig. 14) ([16]) non essendo a mia cognizione che polipai della forma del nostro sieno giunti alle mani del co. Münster

che figurò tutti quelli a lui pervenuti dal Muschelkalk tirolese, dove fu trovato.

LOCALITÀ

Fossile nel Muschelkalk di Livinallungo, nel luogo detto *Anter Sass*, ove la roccia contiene, oltre le conchiglie proprie del trias, infinità di scudetti di *Cidarites* e di aculei riferibili a questo stesso genere di Radiali. Nella medesima località si trovano con qualche frequenza articoli di varie specie di *Crinoidi*, e particolarmente dell' *Encrinites moniliformis* di Müller, del *Rhodocrinites verus* dello stesso autore e dell'*Eugeniacrinites Hoferi* di Münster.

## SARCINULA ARCHIACII? Michelin

Tav. I. fig. 13-14

Polipaio composto di tubi dritti o poco divergenti, spesso contigui fra loro, coll'interno munito di lamelle longitudinali raggianti, che nell'estremità di alcuni tubi si conformano in una stella.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI

I tubi sono per la più gran parte ostrutti d'una calcaria spatica gialliccia che impedisce di vedere le lamelle longitudinali sporgenti dalle pareti interne per unirsi fra loro nel centro. Ove la cavità de' tubi appare vuota, si può distinguere, anche senza il sussidio della lente, un' infinità di strie filiformi longitudinali, talvolta sporgenti sotto forma di lamelle, le quali vanno poi a formare la stella che pur si vede nelle estremità di gran numero di detti tubi.

LOCALITÀ

Fossile nel Muschelkalk di *Anter Sass*, distretto di Livinallungo, nel Monte detto della *Caurt*. Il polipaio consisteva in un grosso masso che ridussi in molti pezzi per meglio studiarne le parti, e per darne alcuni ai paleontologi che mi onorano della loro benevolenza.

(*Letti li 17 Aprile 1847*)

# NOTE

(1) Memoria sopra le arenarie terziarie del Bellunese. *Verona* 1816, 8.

(2) Delle specie subapennine raccolte nel veneto ho riconosciute finora le seguenti: *Venus senilis* Brocchi — *Mactra stultorum*, Linn. — *Pectunculus granulatus*? Lam. — *Isocardia arietina*, Linn. — *Isocardia molavensis*, nob. — *Arca antiquata*, Linn. — *Arca mytiloides*, Brocchi — *Lucina concentrica*, Lam. — *Chama squamosa*, Lam. — *Cardium hians*, Lam. — *Ostrea foliosa*, Brocchi — *Turritella sulcata*, Lam. — *Turritella tricarinata*? Jan — *Cerithium scruposum*, Deshayes — *Buccinum ambiguum*, Desh. — *Conus virginalis*, Brocchi — *Turbinolia decemcostata*, Goldfuss — *Turbinolia cornucopia*, Michelin. A queste specie vuolsi aggiungere quelle raccolte nell'Asolano da Murchison (*Philosoph. Magazin*, juny 1829) non ancora trovate da me.

(3) Le specie delle marne pleistocene della Cengia sono le seguenti: *Pecten pleuronectes*, Lam. — *Pecten unicolor*, Lam. — *Mya truncata*, Lam. — *Pinna tetragona*? Brocchi — *Balanus tintinnabulum*, Linn., la più parte delle quali conservano ancora un avanzo del colore.

(4) Stutz (*Taschenbuch* di Leonhard). — Constant Prevost (*Journ. de Physique*, juin 1820). — Razoumowsky (Observat. minéral. sur les environs de Vienne 1822). — Beudant, Voyage en Hongrie Tom. III.; Resumé pag. 243-252-267, ecc.

(5) Memoria sopra l'arenaria verde del bellunese, *Giorn. dell'Italiana Letteratura*, Tom. XXXV e XXXVI, 1813, 8. — Osservazioni sopra le arenarie terziarie del bellunese, e confronto de' fossili che contengono con quelli della calcaria grossolana del veronese, *Verona* 1816; Tipografia Mainardi, 8. — Lettera intorno un giudizio dell'ab. Maraschini circa il posto occupato dall'arenaria verde, *Giorn. di Pavia* 1824. Tomo XVII. — Memoria epistolare sopra i terreni *plioceno* e *pleistoceno* delle Alpi venete, *Annali di scienze naturali di Bologna* 1843, 8.

(6) Brocchi, che riporta il giudizio di Nose, prese la nostra arenaria per una roccia molto affine al *Grünstein secondario* (Mem. sopra Fassa, pag. 79-80).

(7) Di questi laghi o mari interni, posti a livelli differenti, si veggono parlanti indizii in un gran numero di luoghi delle Alpi venete, ove sonovi terreni terziarii. L'arenaria verde e grigia dell'Alpago è ben novecento metri più elevata di quella di Belluno, ed il Molasse che

vidi l'anno scorso a Campo Torondo presso Dosoledo attinge l'altezza di circa duemila metri dal livello del mare (*Prodromo di Geognosia paleozoica delle Alpi venete* pag. 27. 4. Modena 1847 con tavole e disegni intercalati al testo).

(8) Veggasi la Memoria impressa a Verona nel 1816 superiormente citata.

(9) Memoria epistolare sopra la brecciola di Teolo contenente Nummuliti e infinità di altri corpi marini per la più parte microscopici, *Giorn. dell'Italiana Letteratura*. Bim. di settembre e ottobre 1828, Padova 8.

(10) È il *Carcharias sulcidens* del nostro Catalogo 1842, 8.

(11) Li denti di questa specie di Raia, già descritti e figurati dall' Agassiz, sono stati da questo autore registrati fra gl'ittioliti di terreni non ancora bene conosciuti dai geologi (*Tableau des Poissons fossiles rangés par terrains*, 1844, 4.). Però io esibiva molti anni addietro una dettagliata descrizione di tali denti accompagnata di disegni e li dichiarava proprii del terreno calcareo-trappico di Roncà un anno prima che il Brongniart pubblicasse l'eccellente sua Memoria sopra lo stesso terreno (*Giorn. di Pavia*, Bim. VI. 1820, 4. con due tavole).

(12) Tutte le specie di Echinidi che ho raccolte nel suolo terziario veronese sono state descritte e in parte figurate in diverse Memorie impresse nel Giornale di Pavia, correndo gli anni 1819-20-21-22. In questi scritti parlo incidentemente di molti generi di polipai fossili che fino d'allora aveva tratti dalle marne e calcarie miocene del vicentino, e ciò coll'intenzione che un giorno o l'altro potessero que' cenni tornarmi di utilità (*Catalogo delle specie organiche fossili, raccolte nelle Alpi venete*, pag. 24, nella nota. Padova 1842, 8.).

(13) Questi lavori voglionsi distinguere da quelli che si dicono *a commesso* eseguiti solamente con pietre dure.

(14) I polipai di Levinallungo mi sono giunti alle mani quando il Prodromo di Geognosia paleozoica era già uscito da' torchi, nè potei registrarli tra i fossili del Muschelkalk al quale si riferiscono.

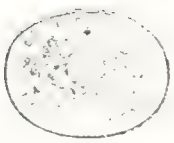
(15) Di questa e della specie che segue darò la figura in un'altra tavola.

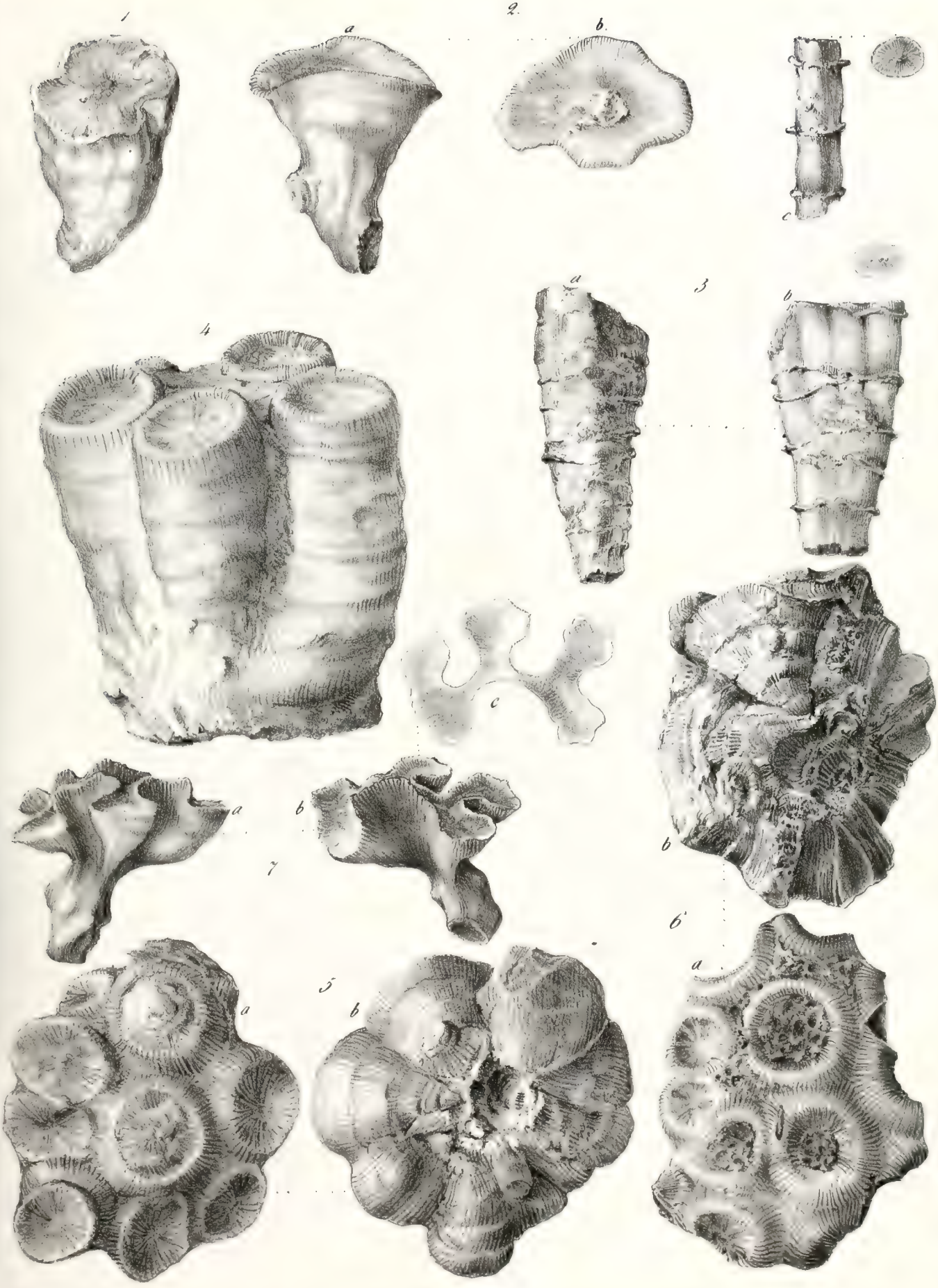
(16) Il conte Münster descrive quattro specie di *Cyathophyllum* trovate nelle marne scissili triassiche di S. Cassiano, distretto di Livinallungo (Beit. Fas. IV pag. 17).

1 *Dendrophyllia impura.* Catullo
2 *Caryophyllia Grumi.* ———
3 ——— *pseudo calvimontii* ———
4 ——— *dolum.* ———

5 *Caryophyllia cingulata.* Catullo
6 ——— *Cyathus.* Lamarck
7 ——— *Panteniana.* Catullo
8 ——— *globularis.* ———

9 *Caryophylia subvasiformis.* Catullo
10 ——— *bithalamia* ———
11 ——— *biformis.* ———

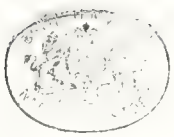


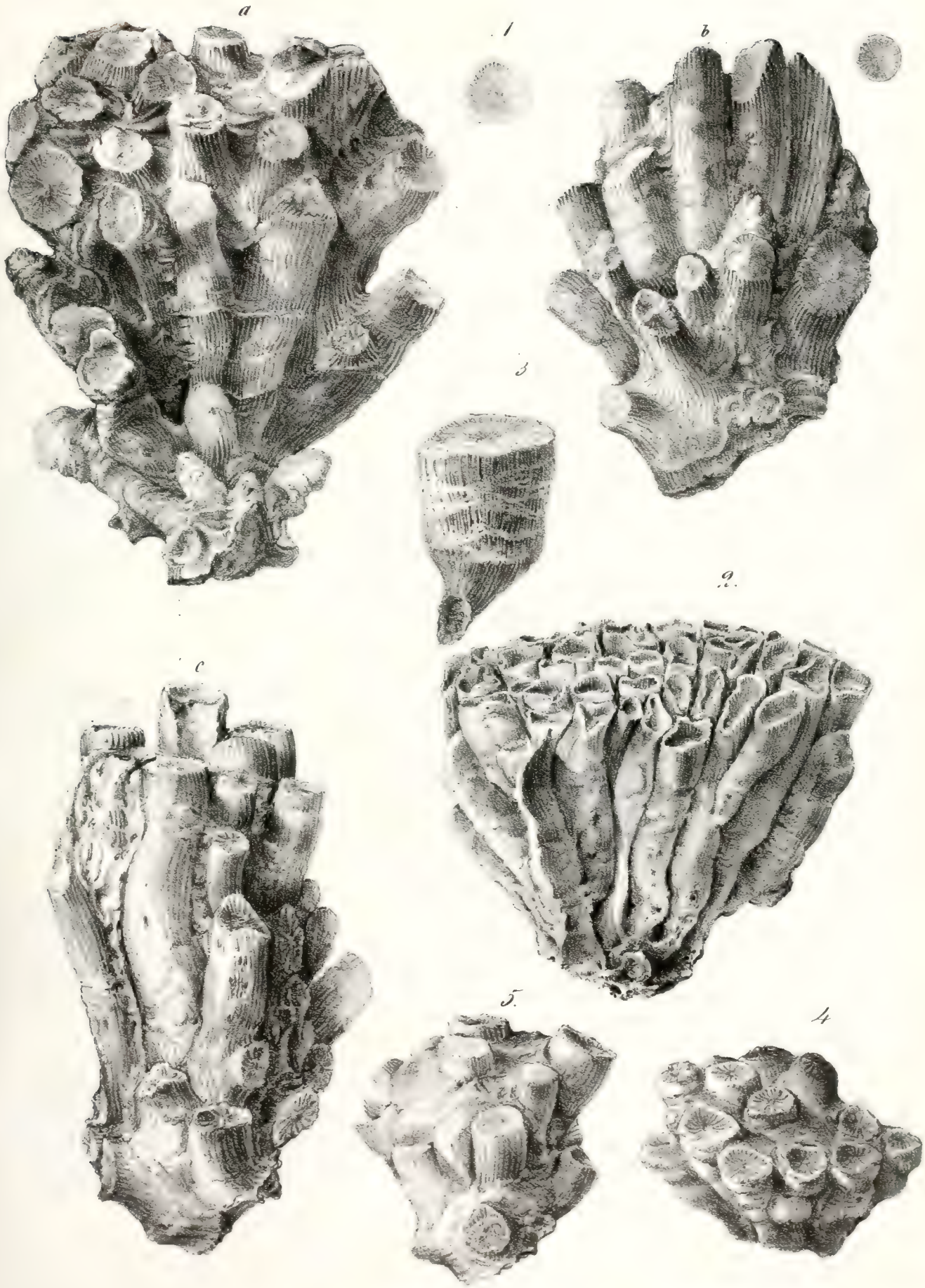



1 *Caryophyllia bisulcata*. Catullo
2 ——— *pseudocernua*. ———

3 *Lithodendron pseudofalbellum*. Catullo
4 *Labophyllia succincta*. ———

5 *Lobophyllia gregaria*. Catullo
6 ——— *pseudorochettina* ———
7 ——— *calycutata*. ———






1 *Dendrophyllia inaequalis.*
2 *Lithodendron Fusinieri*

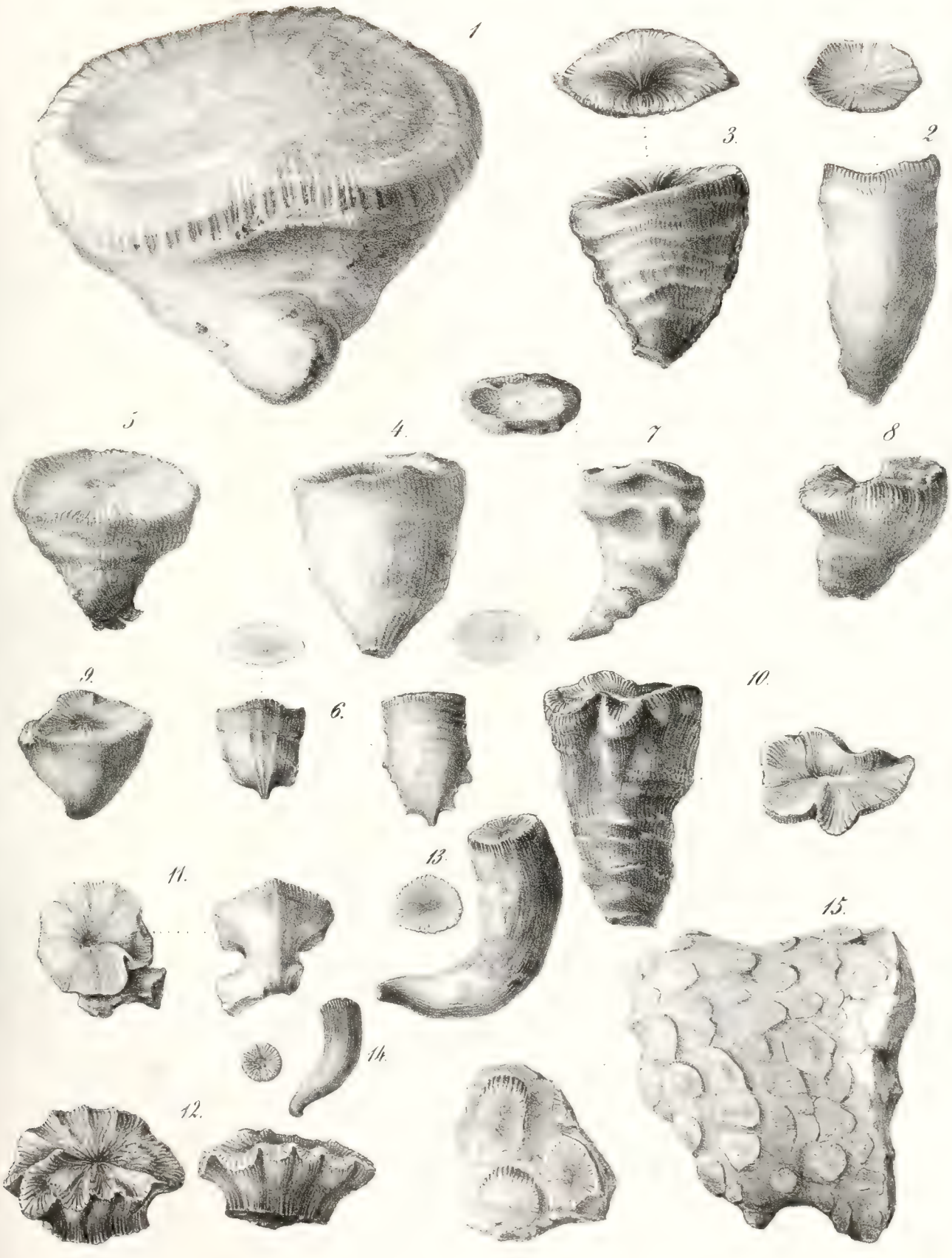
Catullo

3 *Carnophyllia nelata.*
4 *Lithodendron irregulare*

Catullo
Michelin

5 *Dendrophyllia Maraschini*

Catull




1 *Turbinolia Castellum.* — Catullo
2 ——— *lingula.* ———
3 ——— *mitella.* ———
4 ——— *inflata* ———

5 *Turbinolia plana.* — Catullo Michelin Catullo
6 ——— *fimbriata* ———
7 ——— *unisulcata* ———
8 ——— *mutica.* ———
9 ——— *Bertia* ———

10 *Lobophyllia contorta* — Michelin
11 ——— *pulchella* — Catullo
12 ——— *liburna* ———
13 14 *Strombodes incurvus.*
15 *Sarcinula Archiaci.* — Michelin

# DEI FENOMENI ELETTRICI

## DELLA MACCHINA DI ARMSTRONG

### E DELLE CAUSE LORO ASSEGNATE DAI FISICI

### MEMORIA

DEL PROF. AB. FRANCESCO ZANTEDESCHI

Nell'ordinaria Adunanza del 16 Febbraio 1845, io comunicava all'I. R. Istituto una Nota sulle due elettricità nel medesimo getto di vapor acqueo della macchina di Armstrong; e poneva fine alla mia comunicazione, promettendo, che avrei continuate le mie ricerche, e fatto argomento di altra lettura i risultamenti che avessi ottenuto. Ho proseguito le mie esperienze negli anni 1845, 1846; e cercato di studiare i fenomeni sotto i varii rapporti che mi sembravano più interessanti alla scienza: e dov'eran divergenti le opinioni de' fisici, mi sono studiato d'interrogare la natura con insistenza, variando e modificando le circostanze che accompagnano lo sviluppo della elettricità. La Memoria, che ora presento, è divisa in due parti: tratta la prima della fenomenologia elettrica della macchina di Armstrong; nella seconda espongo alcune considerazioni generali intorno alle cause assegnate da' fisici allo sviluppo della elettricità nel vapore.

## I.

### *Dei fenomeni elettrici della macchina di Armstrong.*

La macchina, che ho usata in questi esperimenti, è quella stessa da me descritta nella mia Nota, cioè a un getto solo; io la mantenni sempre isolata, per avere i fenomeni nella maggiore loro semplicità, conoscendo quanta influenza aver possa l'elettricità della terra per mascherarli e confonderli secondo la sua diversa natura e tensione. Le mie esperienze furono fatte nei mesi di Giugno del 1845 e del 1846. Nel Giugno del 1845 la temperatura della sala di fisica dell'I. R. Liceo di Venezia oscillava tra i 18° ai 20° R.; la pressione barometrica si manteneva al di sopra dei 28 pollici; lo stato della atmosfera era sereno; e l'igrometro a vilosa, prima degli esperimenti, segnava 40°, e 55° quello a capello di Saussure. Ho detto che questi erano i gradi igrometrici segnati prima degli esperimenti; perchè nel corso dei medesimi gli igrometri camminavano notabilmente da segnare fino il massimo di umidità. Questa circostanza merita in modo particolare di essere avvertita pella facile intelligenza di alcuni fenomeni, che verrò registrando. Nel mese di Giugno del 1846 la temperatura della sala di fisica era dai 20° ai 22° R.; la pressione barometrica oscillava sempre al di sopra dei 28° pollici; lo stato del cielo era sereno, positiva l'elettricità atmosferica; e gli igrometri segnavano una umidità maggior della media, che nel corso degli esperimenti si avvicinava alla massima, pel successivo afflusso del getto vaporoso. L'acqua, che adoperai ne' miei esperimenti, fu delle cisterne dello stabilimento di S. Caterina in Venezia, che, giusta la comunicazione da me fatta all'I. R. Istituto nell'ordinaria Adunanza del 27 Novembre 1845, bolle quasi allo stesso grado di temperatura dell'acqua distillata. Il combustibile fu sempre carbone comune; e la tensione del vapore è stata successivamente portata fino a cinque atmosfere crescenti, che fu sempre il massimo, al quale io sperimentai. Due furono le serie

delle mie investigazioni; l'una per esplorare lo stato elettrico della caldaia isolata senza il getto del vapore; l'altra per analizzare in ordine alla tensione, alla specie di elettricità e ad altri fenomeni fisici, tanto la caldaia che il getto del vapore, e le loro atmosfere elettriche.

Generalmente si afferma da' fisici, i quali si occuparono della elettricità sviluppata dal vapore delle caldaie, che senza il getto del vapore non si ha alcun fenomeno elettrico; ed io pure ne' primi miei esperimenti fui di questa sentenza, perchè non mi venne fatto di riscontrare neppure col più squisito elettrometro il più piccolo indizio di tensione elettrica; tuttavia pensando, che anche a valvola chiusa, vi è sempre una qualche dispersione di vapore, non mancando mai i prodotti della combustione, che precipuamente per la via del cammino si disperdono nel seno della atmosfera, credetti che il niun effetto ottenuto si fosse derivato da un imperfetto isolamento della macchina, imperocchè la combustione del carbone diede al Volta fenomeni elettrici: esperimento che venne appresso ripetuto in tutto il mondo scientifico, e che in ogni anno rinnovava nel corso delle mie lezioni, parlando della genesi della elettricità atmosferica, prima che fosse messa a mia disposizione una macchina idro-elettrica. Feci impertanto asciugare bene gli isolanti con panno lano riscaldato; e tosto l'elettrometro a fogliette d'oro di Bennet manifestò una tensione elettrica di più gradi, la quale al saggiatore di vetro e di cera lacca apparve essere negativa; la tensione del vapore era di una atmosfera; fu gradatamente portata a due, tre, quattro, e infine a cinque atmosfere, e la tensione dell'elettrometro si mantenne sempre negativa: si fe' vedere un po' più forte di qualche grado; ma non mai vidi un aumento proporzionale al numero delle atmosfere: mi parve piuttosto, che procedesse secondo che era più o meno animata la combustione. Allorchè la tensione del vapore acqueo giugneva a tal grado da sollevare il peso della valvola, uscendo con fremito all'intorno, l'elettrometro di Bennet non poteva più servire, perchè le fogliette andavano a battere contro delle pareti; l'elettrometro a quadrante di Henly, che comunicava colla caldaia, veniva allora a misurare la tensione. Il pendolino segnava fino a quattro gradi; e l'elettricità della caldaia era tuttavia

negativa, come me ne convinsi con replicate prove fatte col saggiatore elettrico.

Assicuratomi con replicati esperimenti dello stato elettrico della caldaia, senza il getto del vapore, io lo venni studiando con getto successivamente a una atmosfera, ad una e mezzo, a due atmosfere, a due e mezzo, a tre, a tre e mezzo, a quattro, a quattro e mezzo, ed a cinque crescenti, e la specie di elettricità della caldaia fu sempre negativa; l'aumento di pressione adunque ne' limiti de' miei esperimenti non cangia la specie di elettricità; bensì ne accresce notabilmente la tensione, come fino dal 1841 aveva scoperto Armstrong. Io vidi, procedendo da una atmosfera sino a cinque, sollevarsi il pendolino fino a 60° H. Non ho potuto però determinare proporzionalità tra la tensione del vapore e quella dell'elettrico; perchè il grado igrometrico va sempre più crescendo colla continuata dispersione del vapore; e perciò sempre più aumentando la dispersione dell'elettrico all'intorno nello spazio. Il pendolino è in una continua oscillazione, dell'ampiezza all'incirca di sei gradi. Un giorno notai che una corrente di aria fresca, che veniva dalla porta della sala, e cospirava colla direzione del getto vaporoso, produsse un aumento di tensione di cinque e più gradi. Concorreva la corrente aerea, disperdendo il vapore, a rendere più isolata la macchina idro-elettrica? Secondo gli esperimenti di Armstrong parrebbe che non esistesse questa proporzionalità. Sotto la pressione di una libbra per pollice quadrato, le lamine d'oro dell'elettroscopio in contatto colla caldaia gli diedero i primi segni dell'elettricità, che potè distinguere dalla elettricità prodotta dalla combustione. A tre libbre per pollice quadrato potè trarre delle piccole scintille in numero di 5 a 6 per minuto. In seguito ciascun accrescimento successivo di pressione produsse uno sviluppo meno crescente di elettricità. L'elettricità sviluppata sotto la pressione di tre libbre per pollice quadrato non si raddoppiò che sotto la pressione di 15 libbre, non si triplicò che a 30 libbre; e fu resa quadrupla a 120, e quintupla alla pressione di 250 libbre (*Archives de l'Électricité* T. I pag. 484 an. 1841). La scintilla che io ne traeva dalla macchina idro-elettrica collo scaricatore di ottone a cinque atmosfere, era bella, vivace, di uno splen-

dore bianco argentino, che in pochi istanti valse a caricare una bottiglia di Leida a forte tensione; ma io non mi fermo sopra di questo fenomeno, dopo quello che fu ottenuto a Londra con apparati potenti, anzi giganteschi, com'è il Franklin del valore di 25 mila talleri, costruito per l'America. Le scariche, che se n'hanno, sono specie di torrenti e di fulmini elettrici, che fendono, squarciano, consumano, abbruciano ed uccidono animali. Il fisico anche colla elettricità del vapore è divenuto quasi emulo delle stesse folgori, che guizzano in mezzo alle nubi e si scagliano sulla terra, menando non di rado guasti e ruine. Perchè dopo tanti anni non si è peranco ovunque provveduto in quel modo e in quella misura che richiede la scienza?

Dall'esame dello stato elettrico della caldaia sempre eseguito con elettrometri comunicanti colla stessa, mediante buoni conduttori metallici, passai ad esplorare lo stato elettrico del cono vaporoso. Le sentenze troppo diverse dei varii fisici, anzi le opposte, che si trovano negli scritti di un medesimo autore, mi fecero gravemente sospettare che qualche circostanza fosse sfuggita alla loro sapiente sagacia, e gli abbia, loro malgrado, condotti in errore. Ma prima che io esponga i metodi, ch'io tenni nell'esplorare l'elettricità dei getti vaporosi, egli è necessario che io premetta alcune determinazioni che si riferiscono alla loro lunghezza visibile, ed alla temperatura del vapore determinata a varie distanze dall'apice di uscita. Io non ho trovato in generale, che la lunghezza del cono vaporoso risponda in un modo assoluto alla tensione del vapore. La sua lunghezza visibile, com'è naturale, si lega necessariamente allo stato igrometrico e alla temperatura del luogo, in cui si esperimenta. La massima lunghezza che io ebbi a cinque atmosfere fu pressochè di quattro metri; e la minima, alla stessa tensione, di un metro e mezzo prossimamente. Ho detto pressochè e prossimamente, perchè i limiti sono sfumati, nè gli potei io cogliere con tutta precisione. In un esperimento, in cui era la tensione del vapore di due atmosfere, la lunghezza visibile del getto vaporoso era all'incirca di un metro; e il vapore immediatamente dopo il punto di uscita era alla temperatura di + 60° R.; alla distanza dalla luce del getto di un decimetro di + 47° R.; a due decimetri di + 39° R.;

a tre decimetri di $+55^{\circ}$ R. In altro esperimento eseguito colla tensione del vapore a cinque atmosfere, la lunghezza visibile del getto era all'incirca di due metri. La temperatura alla distanza di un metro era uguale a quella della sala, cioè di $+20^{\circ}$ R.; alla distanza di due metri la temperatura era inferiore a quella della sala di alcuni gradi; ma a motivo di una oscillazione continua del mercurio, non la potei bene determinare. Il bulbo del termometro a mercurio fu sempre in questi esperimenti tuffato presso all'asse del cono vaporoso.

Ora venendo a parlare dello stato elettrico del getto del vapor acqueo, debbo riferire, che in tre modi lo determinai: 1. col pettine metallico isolato, tuffato colle punte nel vapore del getto, e coll'altra estremità comunicante col bottone dell'elettrometro di Bennet e di Volta: 2. col pettine metallico isolato, avente le punte fuori del getto vaporoso, e l'altra estremità in comunicazione col bottone dell'elettrometro: 3. coll'elettrometro isolato, che incominciando dalla luce muoveva parallelamente al suo asse fino alla base, tenuto però sempre fuori della atmosfera del vapore, onde potesse mantenersi in uno stato sufficiente di isolamento, necessario per indicare e conservare la tensione elettrica. Con tutti e tre questi modi avendo io più volte sperimentato, ho trovato sempre, incominciando dalla luce del getto, elettricità negativa o resinosa, che talvolta fu sensibile fino alla distanza di un metro; andava però diminuendo la tensione a mano a mano, che si allontanava l'apparato dalla luce del getto nella direzione parallela a quella dell'asse del cono vaporoso. Quindi teneva dietro una zona in istato naturale, come lo dimostravano le fogliette dell'elettrometro; e questa zona era di sei ad otto centimetri: appariva di nuovo, vieppiù allontanandosi, la tensione elettrica, ma questa era positiva, come lo dimostrava il saggiatore, e andava crescendo in modo da giungere al suo massimo verso la base del cono visibile. In due soli casi mi venne fatto di riscontrare lo stato naturale alla metà della lunghezza del getto del vapor acqueo; e furono quelli, ne' quali la sua lunghezza visibile ora era di un metro, ed ora di due; in tutti gli altri casi sempre riscontrai, che l'elettricità negativa si estendeva di meno della elettricità positiva. Talvolta non giungeva neppure a 20

centimetri l'elettricità negativa, mentre l'elettricità positiva occupava un'estensione di un metro e più; e la zona, che contrassegnava i confini delle due opposte elettricità, non si manteneva ad una distanza invariata; essa appariva in una continua oscillazione. Sulla lunghezza di un getto di un metro e mezzo circa, alla tensione di cinque atmosfere, ora fu alla distanza di 30 centimetri, ed ora alla distanza di 35 centimetri, mentre, come io ho notato in altro esperimento, fu alla distanza di un metro. Ma sempre costantemente si manifestarono nel medesimo getto di vapor acqueo le due opposte elettricità; sebbene io avessi in altri esperimenti, alle stesse pressioni eseguiti, cangiate le circostanze che si riferiscono alla natura e lunghezza del tubo scaricatore, e all'introduzione di varie sostanze nel getto del vapore, prima che avesse a dissiparsi nella atmosfera. I tubi addizionali, che io ho sostituiti, furono di avorio e di vetro. Quello d'avorio era della lunghezza di 58 millimetri, del diametro di 6 millimetri; e quello di vetro era della lunghezza di 105 millimetri e della larghezza di 5 millimetri. Le specie di elettricità tanto nella caldaia che nel getto non si cangiarono; rimase cioè negativa nella caldaia e nella prima parte del getto, e positiva nella altra parte verso la base. Ma la tensione elettrica notabilmente decrebbe: col tubo d'avorio a cinque atmosfere non ebbi nella caldaia che la tensione di 3° H.; ed a due e tre atmosfere l'elettrometro di Henly non dava alcun segno di elettricità; ma solo l'appalesava l'elettrometro del Volta e di Bennet coll'apertura di 4 a 5 gradi, che col saggiatore fu riconosciuta essere elettricità negativa. Col tubo addizionale di vetro, l'elettrometro di Henly segnò 4 gradi; e 7 prossimamente alla tensione di cinque atmosfere. S'intende ora la ragione, pella quale il Faraday, impiegando un tubo di avorio, ottenne appena indizio di elettricità nel bollitore, e nessun indizio nel getto vaporoso (*Archives* ecc. T. III. pag. 379 an. 1845. *De l'électricité produite par le frottement de l'eau et de la vapeur contre d'autres corps, par M. Faraday*); basta che il bollitore sia stato poco isolato, umido il luogo o l'ambiente, in cui esperimentava l'illustre fisico inglese, perchè potesse disperdersi quella debole elettricità che io vi ho notata: e basta ch'egli abbia sperimentato a pressioni minori che io non feci. So-

stituito un tubo addizionale di metallo, che fu di ottone, isolato dalla caldaia con un tubo di vetro lungo 7 centimetri e del diametro di 5 millimetri, l'elettrometro di Henly sotto due atmosfere salì a 15°; e fatto comunicare il tubo isolato colla caldaia, rimase tuttavia l'elettrometro a 15°. Dal tubo isolato non potei trarre la scintilla; ma la trassi distinta dalla caldaia. Sostituito alla macchina l'ordinario pezzo metallico, l'elettrometro di Henly si portò a 35° sotto la stessa pressione di due atmosfere. Da questi esperimenti impertanto raccolgo, che la natura ed il prolungamento del tubo influiscono energicamente sullo sviluppo della elettricità del vapore; e che questo sviluppo non è limitato alla parte estrema di uscita del getto.

Le sostanze che io cercai di introdurre nel getto del vapor acqueo furono minio e zolfo in polvere, olio di ricino, acqua ragia, olio di mandorle ed olio di oliva. In uno dei comuni tubi addizionali di ottone io feci adattare, mediante una vite, una capsula, che riusciva distante dalla luce di uscita di 55 millimetri, la quale veniva riempita or di una, or di altra sostanza; e il getto vaporoso nell' interno del tubo passava tangente alla medesima. Pell' influenza del minio e dello zolfo nessun cangiamento io potei ravvisare sullo stato elettrico della caldaia e del getto vaporoso. La tensione era fortissima, come la dimostrava l'andamento dell'elettrometro che camminava dai 15 ai 60° H., incominciando dalla pressione di una atmosfera e mezzo, e procedendo fino a cinque, che fu il massimo di tutti i miei esperimenti, ai quali si presta la macchina idro-elettrica del Gabinetto tecnologico dell' I. R. Istituto. Rinnovati poi gli esperimenti, introducendo successivamente nella capsula del tubo addizionale olio di ricino, acqua ragia, olio di mandorle, olio di uliva in una quantità di sei ad otto gocciole, costantemente ho veduto invertersi la specie di elettricità tanto nel bollitore, che nel cono vaporoso. Il bollitore da negativo si rese positivo, e così pure l'adiacente parte del getto; e la seconda da positiva si tramutò in negativa. E qui debbo registrare un particolare fenomeno, che, nella genesi della elettricità del vapore, parmi debba richiamare tutta l'attenzione dell'elettricista. Introdotto nella capsula dell' olio di mandorle, data l'uscita al vapore, che era a quattro

atmosfere, il pendolo dell'elettrometro di Henly s'innalzò tosto a 30° e più; ma subito dopo lo vidi abbassarsi, ridursi a zero, e poi di nuovo risalire alla tensione di 30° e non più. In questo andamento dell'elettrometro io intravvidi il mutamento delle elettricità. Ed in fatti, rinnovato l'esperimento, il saggiatore mi dimostrò che l'elettricità del bollitore da prima era negativa, e così pure quella della adiacente porzione del getto vaporoso, mentre quella della restante parte era positiva; e che appresso l'elettricità del bollitore fu positiva, come pure quella della parte attigua del cono vaporoso, e negativa quella della parte che guardava la base. E al consumarsi dell'olio nella capsula, il pendolo dell'elettrometro si depresse, si ridusse a zero; si sollevò di nuovo guadagnando parte della perduta tensione. Il saggiatore mi dimostrò la riapparizione delle due specie di elettricità, distribuite a quel modo che si erano manifestate prima della introduzione nella capsula della sostanza oleosa; vale a dire negativa nella caldaia e nella prima parte del getto, e positiva nella seconda parte verso la base. In altri esperimenti, ne' quali introdussi nella capsula dell'olio di oliva dopo l'uscita del vapore, il pendolo rimase a zero gradi per alcuni minuti secondi. Fu questo uno stadio di neutralizzazione delle due opposte elettricità; quindi surse la prevalente dell'olio, che si mantenne per alcuni minuti primi, decrebbe appresso, si estinse, come nel caso precedente, e prevalse quella del vapor acqueo. Ma eccetto che nel breve stadio di neutralizzazione, in cui tanto la caldaia che il vapore erano in istato naturale, sempre l'elettricità si manifestò doppia nel getto, con una zona neutra interposta, e del medesimo nome di quella del bollitore nella parte più vicina. Il Faraday, che fino dal 1843 era entrato in questo campo di sottili investigazioni, nelle quali era stato fino dal 1841 preceduto da Armstrong, aveva proposta a se stesso la questione, se v'abbiano sostanze che possano rendere la corrente positiva, ed altre che la possano rendere negativa; e tra le molte che egli annovera, ritrovò l'essenza di trementina e l'olio di oliva, sull'effetto delle quali si esprime a questo modo (*Archives* ecc. T. III pag. 382): «Per sciogliere questa questione, io caricai il descritto apparato di essenza di trementina, che potei lasciar penetrare

a volontà nel passaggio, il qual serve di uscita al vapore. Io chiusi da principio il galletto, e l'ordinario miscuglio d'acqua e di vapore rese il bollitore negativo. Questo stato elettrico fu immediatamente modificato allorchè l'essenza di trementina fu introdotta: *il bollitore divenne fortemente positivo e il getto tutto anch'esso fortemente negativo*. Io ho escluso l'essenza di trementina: l'effetto a poco a poco si cangiò, e in capo a mezzo minuto, il bollitore tornò negativo. Una nuova introduzione di essenza di trementina rese di nuovo il bollitore positivo, e così di seguito. = Il medesimo fenomeno generale è prodotto coll'olio di oliva, vale a dire che la sua presenza rende la corrente del vapore *negativa*, e la sostanza stropicciata *positiva*. Ma come quest'olio, comparativamente all'essenza di trementina, è molto più fisso, lo stato elettrico è molto più permanente, e una piccolissima quantità d'olio introdotta nel globo del vapore o nella cellula o nel tubo di uscita, rende il bollitore positivo per un tempo assai lungo ». Non meno apertamente si esprime il Faraday là ove ragiona della elettricità, che i tubi fanno acquistare al getto del vapore, e di quella che prendono i corpi sottoposti all'attrito del getto medesimo. « Così, egli dice, impiegando un tubo di metallo, di vetro o di legno, per dar uscita al vapore, il bollitore diviene eminentemente negativo e il getto fortemente positivo; se s'impiega per tubo una penna da scrivere, o meglio ancora un tubo d'avorio, il bollitore è appena elettrizzato, e la corrente del vapore è *ugualmente allo stato neutro* ». Noi però abbiamo superiormente notato non esistere questo stato neutro in tutta la lunghezza del getto vaporoso, come viene asserito dal Faraday. « Si può adunque, prosegue il fisico inglese, collocare delle sostanze sia nel *getto neutro* proveniente da un tubo d'avorio, sia nel *getto positivo* proveniente da un tubo di legno o di metallo: in quest'ultimo caso si ottengono degli effetti, che, ove non sieno bene interpretati, danno luogo a degli errori. Così non si ha elettricità sviluppata in un filo metallico isolato allorchè si tiene questo filo, a mezzo pollice circa dall'orificio del tubo di vetro o di metallo, nel getto del vapore che esce dal tubo; ma il filo divien positivo allorchè lo si allontana dall'orificio, e negativo allorchè lo si

avvicina. Egli si comporta così unicamente perchè, quando egli è vicino alla luce del tubo nella parte viva della corrente, egli si elettrizza e si rende negativo, mentre che il vapore e l'acqua divengono così più positivi che per lo avanti; ma allorchè egli è più lontano, e per conseguente in una parte di corrente men rapida, egli serve a scaricare questa corrente dell'elettricità, che aveva acquistata precedentemente nel tubo di uscita, e manifesta allora il medesimo stato elettrico del vapore. Il platino, il rame, lo spago, la seta, il legno, la piombagine ed altre sostanze, tranne la penna da scrivere, l'avorio e il pelo d'orso, possono prendere i due stati elettrici, *secondochè essi si trovano elettrizzati per attrito, o che servono a sottrarre l'elettricità, secondo la loro posizione nella corrente.* Se si adopera un pezzo di rete metallica, si vedrà cangiarsi lo stato elettrico, secondochè si allontana di un ottavo di pollice in una direzione e nell'altra dal luogo della corrente, in cui egli è allo stato neutro. Se in luogo di un getto d'acqua e di vapore elettrizzato, s'impieghi uno, che, uscendo da un tubo di avorio, sia allo stato neutro, i fili e le altre sostanze non possono più acquistare i due stati elettrici. Si possono elettrizzare e rendere negativi; ma non possono servire per iscaricare l'elettrico, che non esiste, nè far loro acquistare lo stato positivo, qualunque sia la distanza, alla quale si collocano nel getto» (*Archives* ecc. T. III. pag. 379-380).

Da questi tratti della Memoria del Faraday, che io ho creduto necessario di riferire per esteso, registrandone fedelmente i luoghi, appare manifesto che egli sempre credette che, in virtù dell'attrito, tutto il getto vaporoso possa rendersi positivo, negativo, neutro. In tutti e tre questi casi si esprime in un modo generale dicendo, *getto neutro, getto positivo, corrente del vapore negativa*. Non v'ha che un luogo nelle Memorie del Faraday, in cui egli registrò che, a qualche pollice di distanza dalla luce del getto, il vapore fu senza potenza elettrica. Ma egli estese questo stato neutro a tutta la lunghezza del getto fino alla base, attribuendo il fenomeno all'acqua leggermente impura, attraverso la quale passa il vapore e che porta seco (*Archives* ecc. T. III. pag. 376). Il Faraday adunque non ha neppure sospettata l'esisten-

za della doppia elettricità nel medesimo getto di vapor acqueo con una zona neutra, che le separa. E l'esempio del filo o della rete metallica, che, collocata a varie distanze nel getto vaporoso, ora fu rinvenuta neutra, ora positiva ed ora negativa, nulla prova contro di me, come vorrebbe far credere qualche fisico, dopo che fu comunicata alla Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia nel 1845 la mia Nota sopra l'elettricità di un getto di vapore (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* T. XX. pag. 970 an. 1845. *Magaz. elect.* Gen. 1846).

Lo stesso Faraday ha apertamente dichiarato, come vedemmo, essere effetti del concorso di due cagioni, elettricità, che acquista un corpo per attrito, immerso nel vapore; elettricità, che acquista un corpo per comunicazione di quella del vapore: l'una è opposta all'altra; e secondo che sono uguali, o prevale la positiva o la negativa del getto del vapore, il corpo immerso nel cono vaporoso è neutro, o positivo, o negativo. Ne' miei esperimenti comparativi superiormente riferiti ho esplorata l'elettricità inerente al vapore, procurando di separarla da quella di attrito, che avrebbe potuto, come accadde al Faraday, neutralizzarla o distruggerla intieramente in qualche caso, e in qualche caso ancora inverterne la specie. Le poche sottili punte del pettine tuffate nel vapore presentano piccola superficie, e perciò danno luogo al minimo di attrito, per cui l'elettricità del getto vaporoso in questo modo esplorata fu della stessa specie di quella, che scandagliai allorchè le punte erano fuori del vapore; o l'elettrometro isolato era portato parallelamente all'asse del cono vaporoso dall'apice fino alla base del medesimo.

Anche lo stato elettrico della atmosfera è stato peculiare oggetto delle mie investigazioni. Dal lato della caldaia, che segnava una tensione negativa di 45° Henly, alla distanza di 9 metri io cominciai ad esplorare coll'elettrometro di Bennet lo stato elettrico dell'aria della sala, e giunto alla distanza di otto metri dalla caldaia, l'elettrometro cominciò a segnare una tensione, che il saggiatore dimostrò essere dovuta ad una carica di elettricità negativa. Infatti, retrocedendo alla distanza di nove metri e più, la tensione tuttavia sussisteva; e scaricato l'elettrometro, le fogliette rimanevano in quella stazione

allo stato naturale. Ricondottomi alla distanza di otto metri, riapparve la tensione nell'elettrometro, che diveniva sempre maggiore, quanto minore era la distanza, alla quale collocava l'elettrometro; e sempre fu prodotta da elettricità condotta negativa o della stessa natura di quella del bollitore. In prossimità della macchina le fogliette dell'elettrometro di Bennet venivano sbattute contro delle pareti, nè più l'istrumento poteva misurare la tensione; in queste posizioni per riconoscerne tuttavia la specie, mi valsi dell'elettrometro a pile di Berhens, detto comunemente di Bonhenberger, tenendo le pilette lontane. Dal pronto piegamento della foglietta veniva avvertito della specie di elettricità. Nel passaggio da una ad altra stazione, teneva il bottone dell'elettrometro in comunicazione col suolo, che toglieva all'istante in cui mi proponeva di esplorare lo stato elettrico di un dato luogo. Pelle deboli tensioni io non feci uso di questo elettrometro, perchè soggiace ad indicazioni erronee, come venne notato da parecchi elettricisti. Portatomi con l'elettrometro di Bennet dal lato della base del cono vaporoso, che pella lunghezza di un metro, incominciando dalla base, era elettrizzato in più, io ebbi tensione elettrica positiva nell'aria fino alla distanza di sette metri e mezzo; la quale, come mi sono assicurato con replicati esperimenti, fu sempre di carica. Questa macchina impertanto, pel vapore che si diffonde nell'aria, che ne accresce continuamente lo stato igrometrico, ha un poter dispersivo superiore a qualsivoglia altra macchina elettrica; e la tensione, che tuttavia essa conserva, chiaramente dimostra essere sommo lo sviluppo dell'elettrico nel vapore. In alcuni giorni, nei quali l'aria della sala era men umida, ho potuto registrare questo fenomeno, che passo a descrivere; il quale non ha niente di nuovo rispetto alla teoria, ma può riuscire molto istruttivo nella investigazione dello stato elettrico della atmosfera. Il vapore nella caldaia aveva una tensione di cinque atmosfere crescenti; all'aprirsi della chiave l'elettrometro di Henly salì a 55°; e negativa era l'elettricità del bollitore; questa stessa specie di elettricità fu sensibile all'intorno della caldaia, dalla parte opposta del getto, fino a due metri, decrescendo continuamente, secondo il crescere della distanza; quindi zero di tensione, o stato naturale delle fo-

gliette: appresso surse una tensione che fu positiva, la quale decresceva colla distanza; essa era massima negli strati prossimi allo zero. Tutto questo io ritrovo in perfetta armonia coi noti principii delle attuazioni elettriche; ma, lo ripeto, io volli registrare un tale fenomeno, perchè istruttivo, e perchè non conosco che nella analisi dei fenomeni elettrici di questa macchina sia stato notato dai fisici. Consimili scandagli io feci dalla parte del getto vaporoso, che alla base era positivo. L'elettricità positiva nell'aria si estese decrescendo fino alla distanza di quattro metri; quindi lo zero e lo stato naturale, susseguito immediatamente da una tensione negativa, che fu sensibile fino alla distanza di otto metri e mezzo. Io non potei al di là di questo limite estendere le mie esperienze pella prossimità delle pareti della sala; ma la decrescente tensione negativa mi rendeva avvertito, che in uno spazio maggiore avrei ritrovato lo zero susseguito da una tensione positiva. In altri esperimenti, ne' quali coll' olio di mandorle aveva resa la caldaia positiva, riscontrai nello spazio ambiente le due opposte elettricità separate dallo zero. Dalla parte opposta al getto vaporoso l'elettricità positiva si estendeva nello spazio fino alla distanza di un metro e mezzo; al qual limite subito dopo appariva lo zero, che era immediatamente susseguito da una tensione negativa, che fu massima negli strati aerei attigui o prossimi allo zero. L'elettricità negativa dalla base del getto vaporoso si estendeva nell' aria fino all' incirca a tre metri, decrescendo a mano che cresceva la distanza; appresso veniva lo zero immediatamente susseguito da una tensione positiva, che nei prossimi strati era la massima; andava essa infievolendosi fino a rendersi nulla. Confrontando ora gli strati elettrici aerei nei due casi che il bollitore era negativo e positivo, ritrovo che nel caso in cui esso era negativo, dalla parte opposta del getto, il massimo della tensione positiva rispondeva agli strati prossimi allo zero; e nel caso in cui lo stesso bollitore era positivo, nei medesimi strati si ritrovava il massimo della tensione negativa. La stessa legge riscontrai pure anche dal lato del getto vaporoso. Non è questo che un caso dei noti principii delle attuazioni bene determinati nei vetri e nei mastici dal Beccaria, dal Barletti e dal Volta; ed ora la macchina di Armstrong

egregiamente si presta a farne una verificazione negli strati aerei, che non conosco sia stata peranco da altri intrapresa almeno a distanze così sensibili; verificazione, che porge eccitamento al fisico a delle utili meditazioni sul modo di distribuirsi e comportarsi dell' elettrico nel seno della atmosfera e ad istituire nuovi interessanti esperimenti a diversa altezza tanto a cielo sereno, che a cielo coperto tranquillo e procelloso. Molto ancora manca alla scienza in questo interessantissimo argomento di meteorologia elettrica, che converrebbe con nuove esperienze in ogni sua parte investigare; ed io a tempo migliore non mancherò di pubblicare i risultamenti delle mie investigazioni e de' miei studii.

Rispetto agli altri fenomeni fisici, come gli elettro-magnetici, ai fenomeni fisiologici e chimici, io non ispenderò troppe parole descrivendo ad uno ad uno tutti gli sperimenti che feci; perchè mi parrebbe di essere troppo minuto e prolisso, narrando come io abbia ottenuto le deviazioni oerstediane, la magnetizzazione degli aghi, il sapore, l'odore, il bagliore, le contrazioni, la scossa, le chimiche decomposizioni dei corpi, fenomeni tutti che furono veduti da' fisici; e d' altronde io non potei in questa parte notare alcuna particolarità, alcun effetto, che da altri non sia stato registrato, e non segua le leggi comuni bene determinate dai fisici. Passo quindi alla seconda parte di questo mio scritto, in cui parmi, che i miei esperimenti dieno luogo a qualche considerazione non del tutto inutile pella scienza.

## II.

### *Delle cause assegnate dai fisici allo sviluppo della elettricità nel vapore*

Tutte quelle cause, che vengono annoverate dai fisici pello sviluppo della elettricità di attrito, furono accampate ancora pell'elettrico che si svolge nel vapore.

Armstrong, a cui tanto deve in questa parte la scienza, nel 1841 dopo avere osservato che nello sviluppo della elettricità, che manife-

sta la sua macchina idro-elettrica, può avere una qualche influenza l'azione calorifica, la pressione del vapore compresso, conchiude: «La precipitazione del vapore pare essere la sola causa, alla quale si possa attribuire l'elettricità del getto». Se si riguarda questa conclusione come esatta, la questione che naturalmente sorge, si è: la precipitazione del vapore dà ella origine alla elettricità del vaso evaporatorio, e a quella della nube del vapore? ovvero l'elettricità che si manifesta nella caldaia è l'effetto della evaporazione, o di qualche altra causa distinta da quella che produce l'elettricità nel getto? Lo stato neutro della caldaia, allorchè il vapore è trattenuto, sembra dimostrare che la medesima causa, la quale produce l'elettricità nel getto, ingeneri ancora l'elettricità opposta nel vaso evaporatorio. Io ho cercato di sciogliere la questione, per ciò che risguarda l'azione della evaporazione, scaricando il vapore, che di tempo in tempo rimane nella caldaia, dopo che tutta l'acqua fu evaporata, e la caldaia fu sempre elettrizzata, qualora la pressione del vapore era considerabile. La cessazione totale del vapore dalla valvola di sicurezza è stata la sola indicazione che io possedessi della perfetta secchezza della caldaia; e se si può affidarsi a questo segno, si deve inevitabilmente conchiudere, che l'elettricità, che è prodotta nel vaso evaporatorio per l'emissione del vapore, è indipendente dalla evaporazione concomitante. Bisogna qui osservare, che l'elettricità, che apparve nella caldaia, dopo che l'acqua fu scacciata, è stata, come prima, sempre positiva. All'appoggio di queste circostanze io penso, che v'hanno certamente delle ragioni per supporre, che la medesima causa che sviluppa l'elettricità nella nube del vapore, produca ancora l'elettricità contraria della caldaia; ma s'egli è così, io non credo che esista alcun principio, che spieghi gli effetti descritti, *soprattutto perchè l'elettricità della caldaia pare al tutto indipendente dalla prossimità del getto.* Il cangiamento, che si opera in date condizioni nello stato elettrico della caldaia e in quello del getto, è difficile a spiegarsi. Qual cangiamento può subire il vapore nella caldaia, pel contatto col metallo caldo, o per qualche altra causa che l'obbliga a sviluppare, condensandosi, l'elettricità opposta a quella, che fornisce ordinariamente? Gli effetti della pressione sembrano così inesplicabili. Egli mi sembra

inconcepibile, che il vapore possa, per la pressione, acquistare una proprietà, che non vien tolta per la espansione; e non ostante noi abbiamo veduto, che l'influenza della pressione sulla elettricità del getto non è distrutta dalla facilità, che ha il vapore di dilatarsi prima di uscire» (*Phénomènes électriques qui accompagnent le dégagement de l'air condensé et de la vapeur comprimée, par* W. G. Armstrong, London and. Edimb. Phil. Mag. Maggio e Luglio 1841, *Archives de l'électricité* T. I. pag. 478 an. 1841). Da questo tratto della Memoria di Armstrong si vede l'incertezza, la difficoltà che incontra l'autore nell'assegnare la causa produttrice dello sviluppo della elettricità nel vapore; per cui, ponendo fine al suo lavoro, esprime il desiderio che altre persone si occupino con zelo di questo genere di ricerche, che presenta un vero interesse. Io noto frattanto tre circostanze registrate dall'autore, che io non ho potuto mai verificare, nei limiti de' miei esperimenti: 1. *lo stato neutro della caldaia, a vapore trattenuto;* 2. *l'indipendenza della elettricità della caldaia dalla prossimità del getto;* 3. *il cangiamento temporario dello stato elettrico della caldaia per un aumento considerabile di temperatura e perciò di pressione.* Egli è vero che l'autore innalzò la pressione fino a 250 libbre per pollice quadrato, ossia a 16 atmosfere e due terzi, mentre io mi ristrinsi entro i limiti di cinque atmosfere; ma l'autore mancò di registrare nella sua Memoria sotto qual pressione incominciò a invertirsi la specie di elettricità. Si limitò a dire per un aumento considerabile di pressione.

Nel 1843 Armstrong dopo una lunga serie di esperimenti conchiuse: «Le esperienze che io ho fatte sulla elettricità del vapore, dopo l'ultima comunicazione indirizzata al Magazzino Filosofico, mi hanno confermato nel precedente mio convincimento, che lo sviluppo dell'elettricità ha luogo al momento, in cui il vapore è sottoposto all'attrito: io sono giunto ad aumentare talmente l'energia degli effetti, che io dubito che alcuna macchina elettrica sia capace di fornire una egual copia di elettricità». (*De l'emploi de la vapeur comme moyen de produire l'électricité* etc. par M. Armstrong. *Phil. Mag.* Genn. 1843; *Archives de l'electricite* T. III., pag. 90 an. 1843). Egli notò essere essenziale, per ottenere uno sviluppo considerevole di elettricità, che il vapore

sia leggermente mescolato con dell'acqua; questa circostanza unita alle altre, che risguardano la natura e la forma dell'orificio, guidò Armstrong alla costruzione del suo apparato elettrico, che è veramente di un effetto meraviglioso. Le mie esperienze si accordano perfettamente con queste osservazioni del fisico inglese. Io pure ho riscontrato sempre l'influenza dell'acqua nell'aumento dello sviluppo della elettricità; ho detto l'influenza dell'acqua nell'aumento dello sviluppo elettrico, perchè anche senza il concorso dell'acqua io ottenni fenomeni elettrici. Parimenti in relazione alla natura e forme degli orificii, ottenni effetti ora maggiori ed ora minori. Con quelli apparecchiati secondo il metodo di Armstrong, ebbi sempre effetti i più cospicui. Il Faraday tuttavia, insistendo sulla influenza dell'acqua nella produzione dei fenomeni elettrici della macchina di Armstrong, affermò essersi assicurato, che l'elettricità non è mai ridestata per il passaggio del solo vapore, ma bensì provocata dal miscuglio dell'acqua col vapore; da cui ne trasse la conclusione, che l'elettricità sia prodotta dall'attrito dei globuli di acqua contro le pareti del canale, o contro le sostanze che si oppongono alla loro uscita, allorchè sono rapidamente strascinati dalla corrente del vapore. Così lo sviluppo della elettricità diviene più intenso, allorchè si aumenta la pressione e la forza di proiezione del vapore (*Atheneum 4 Mars* **1843**; *De l'électricité produite par le frottement de l'eau et de la vapeur contre d'autres corps, par M. Faraday, Archives de l'électricité* T. III. pag. **369**. an. **1843**). Egli esclude intieramente l'evaporazione e la condensazione, o il cangiamento di stato, da cui unicamente dal Volta, dal Saussure e da molti altri fisici si ripeteva l'origine della elettricità atmosferica. « Allorchè il vapore, dice il Faraday, è stato sottoposto alla pressione la più forte, e che la valvola sia sollevata o completamente tolta, non si sviluppa elettricità nel bollitore, ancorchè la produzione del vapore sia considerabile. Se il bollitore fu elettrizzato avanti che la valvola sia aperta, l'apertura di questa valvola e per conseguente lo sviluppo del vapore non influiscono minimamente sulla carica del bollitore. Avendo costruito dei pezzi terminali, che possono dare lo stato positivo, negativo e neutro, io li fissai sul passaggio del vapore, e potei rendere

a piacimento il bollitore positivo, o negativo, o neutro col medesimo vapore, e nel mentre che la quantità del vapore prodotto rimaneva la stessa; lo sviluppo della elettricità non dipende adunque, conchiude Faraday, dalla vaporizzazione ossia dal cangiamento di stato». Io però, come ho superiormente riferito ne' miei esperimenti, non ebbi mai lo stato neutro della caldaia; e pare che lo stesso Faraday si sia in questo luogo dimenticato di quanto aveva altrove scritto affermando che *il bollitore era appena elettrizzato;* e per me la tensione fu di 2 a 3 gradi dell'elettrometro di Henly. Qualche segno di elettricità aveva ottenuto in simili esperimenti anche l'Armstrong. La totale esclusione poi dalla genesi dell'elettrico, della evaporazione e della condensazione o del cangiamento di stato, non parmi sia rigorosamente provata dal Faraday, imperocchè nelle esperienze istituite, aprendo la valvola del bollitore, il niun sviluppo sensibile di elettrico può essere stata una conseguenza della bassa pressione alla quale ha esperimentato. Egli non ha mai oltrepassata la pressione di 13 pollici di mercurio. E nella fissazione dei tubi terminali sul passaggio del vapore, si può sempre dire, che la quantità di elettrico sviluppata nell'attrito coi pezzi addizionali, è prevalente a quella, che sorge nel cangiamento di stato. Le esperienze originali del Volta da tanti fisici ripetute sulla combustione del carbone, della evaporazione dell'acqua della quale si asperge, che sono sempre accompagnate da sviluppo elettrico, comprovano almeno che il cangiamento di stato, che si accompagna con qualche chimica azione, è sorgente di elettricità; e lo stesso Armstrong ha sempre riconosciuto lo stato elettrico, dovuto alla combustione, come egli si esprime. Io ho costantemente veduto ne' miei esperimenti, allorchè la macchina era ben isolata, ed asciutta l'aria ambiente del luogo in cui esperimentava, che la tensione dell'elettrometro di Henly surse fino a 3 gradi, allorchè l'elasticità del vapore era a cinque atmosfere crescenti, e la valvola di sicurezza era chiusa, e chiusa la chiave del getto; ma ne' giorni, ne' quali era molto umida l'aria, meno perfettamente isolato il bollitore, non ebbi tensione elettrica se non col getto del vapore. E questo parmi sia stato il caso del niun effetto osservato dal Faraday. E neppure io posso pienamente convenire con questo illustre

fisico, che la corrente del solo vapore non possa produrre elettrico; ma che vi intervenga necessariamente ed esclusivamente l'attrito dei globuli dell'acqua. Io non posso convincermi, che l'elettricità si sviluppi unicamente pell'attrito dei globuli acquei contro le pareti del canale o contro le sostanze, che si oppongono all'uscita, allorchè sono rapidamente strascinati dalla corrente del vapore. Io non posso indurmi a credere, che il vapore faccia unicamente l'ufficio di potenza motrice, e che l'eccitamento elettrico nasca pell'attrito dei globuli acquei coi corpi solidi. Lo stesso Armstrong, che tanto altamente stima la teoria del suo amico Faraday, e pella quale si dichiarò, come vedemmo, dubita che l'attrito sia la sola causa dello sviluppo della elettricità. Il Faraday tolse di mezzo, egli è vero, alcune difficoltà, che si opponevano allo stabilimento della sua teoria; ma, per confessione di Armstrong, ne lasciò addietro altre che sono molto importanti. « Io credo, scrive Armstrong a Faraday, che gli effetti elettrici sono essenzialmente dovuti all'attrito sia del vapore e dell'acqua mescolata, o dell'acqua sola; e tengo probabile che tutti i fenomeni già osservati si possano rannodare intorno alla teoria, che voi così arditamente e così chiaramente avete annunziata » (*Archives de l'electricité* ecc. T. III. pag. 621. *De la description d'une machine hydro-électrique, construite pour l'École polytechnique, et de quelques experiences faites avec cette machine; extrait d'une lettre adressée à M. Faraday par W.-G. Armstrong*). Gli argomenti che arrecò il Faraday a convalidare la sua sentenza si comprendono tutti in questo, ch'egli senza la presenza dell'acqua, col solo vapore secco, non ottenne mai fenomeno elettrico. Ed io col solo vapore ebbi sempre fenomeni elettrici, sebbene deboli. La tensione non fu mai minore di 7 gradi dell'elettrometro di Henly, e talvolta salì fino a 15 gradi. La forte tensione che si manifesta alla prima uscita del getto, avvertita da Armstrong, verificata da Faraday, è un fatto indubitato, da me pure sempre confermato; ma non è vero, allorchè il tubo d'uscita è riscaldato, che l'elettrico cessi di svilupparsi come ha riferito il Faraday. L'elettrometro da 60, 50, 45 gradi si abbassa fino a ridursi al minimo di 7 gradi, sotto la pressione di 3, di 4 e di 5 e mezzo atmosfere. Ho riscontrato tensione elettrica anche

quando il tubo di uscita fu riscaldato; e per conseguente anche quando non aveva più luogo la condensazione del vapore. Io pure, come praticò il Faraday, ho riscaldato il tubo di uscita con una lampana a spirito di vino, ma sempre ebbi fenomeni elettrici. La mancanza di effetti negli esperimenti del Faraday, che ne' miei sempre si manifestarono, l'attribuisco a tre cagioni: l'una alla lunghezza del tubo di uscita, che fu nell'apparato del Faraday di 4 piedi e mezzo: l'altra alla debole pressione di 8 a 13 pollici di mercurio ed anco di due quinti di un'atmosfera, sotto la qual pressione ha istituiti i suoi esperimenti: (i miei tubi addizionali non oltrepassarono mai la lunghezza di 11 centimetri; nè queste esperienze furono mai istituite sotto una pressione minore di 3 atmosfere e mezzo, come poc'anzi ho detto; e noi d'altronde sappiamo dalle esperienze di Armstrong quanto considerabilmente cresca la tensione elettrica colla pressione, come fu superiormente riferito) la terza all'isolamento imperfetto del bollitore.

L'idea dominante nella teoria del Faraday, che il vapore non sia che un puro agente meccanico, impotente per sè stesso a sviluppare elettricità, lo ha guidato, come vedemmo, a riporre la virtù eccitatrice nell'acqua. I piccoli globuli acquei, che il getto del vapore strascina con sè, stropicciandosi contro de' corpi, e poi distaccandosi, sviluppano il potere elettrico a quella stessa maniera che accade, allorchè si stropiccia un bastone di cera lacca; il corpo stropicciante si trova fornito di una elettricità opposta a quella del corpo stropicciato. Allorchè l'olio di oliva o l'essenza di trementina tramuta l'elettricità della caldaia da negativa in positiva, crede il Faraday, che i soli globuli d'acqua si tramutino virtualmente in globuli di queste sostanze; e che non sia più l'acqua, ma i nuovi liquidi, che esercitino un attrito contro i corpi solidi. In virtù della forza espansiva dell'olio sull'acqua, la quale fu scoperta e magistralmente descritta dal Dott. Ambrogio Fusinieri, avvisa il Faraday che ciascuna particella d'acqua si copra di una pellicola di olio, e che limitandosi l'eccitamento elettrico per attrito alla sola superficie de' corpi, i globuli, sebbene costituiti pressochè intieramente di acqua, colla tenuità della loro pellicola, possano agire, come fossero intieramente formati di olio, e rendere col loro

attrito il legno e il metallo positivi, mentre essi divengono negativi (*Archives* ecc. T. III. pag. 388). Ma la pellicola, che giusta il Faraday, investe i soli globuli acquei, non può ella ancora investire i globuli del vapore? In un luogo della sua Memoria il Faraday afferma, che colla sola essenza di trementina ottenne la caldaia positiva, e che l'effetto si accrebbe ad un alto grado, allorchè l'essenza di trementina fu mescolata con l'acqua distillata (*Archives* ecc. T. III. pag. 391); ed io pure coll'olio di oliva, senza il concorso dei globuli acquei, ebbi la caldaia positiva. Il tubo di uscita era stato fortemente riscaldato da non permettere la retrocessione del vapore. Ma l'eccitamento dovuto all'attrito sorge per una azione puramente meccanica? L'azione chimica non v'interviene in alcuna parte, come nelle esperienze dell'evaporazione di un liquido all'aria libera, senza altra pressione che quella dell'atmosfera, giusta le sperienze di tanti dotti e ai nostri giorni del valente fisico Peltier? Il Faraday è d'avviso che l'azione chimica non abbia parte alcuna nello sviluppo della elettricità in una corrente di vapore; imperocchè egli afferma, che, facendo uso nel globo di acido solforico ora assai allungato ed ora assai concentrato, ed impiegando tubi e coni di zinco, non ebbe mai alcun indizio di elettricità. Io però in analoghe circostanze sperimentando ottenni fenomeni elettrici, deboli bensì, ma indubitati e distinti; e la tensione era maggiore di quella ottenuta col getto del solo vapore acqueo. Del che era prova indubitata l'innalzarsi del pendolo dell'elettrometro di Henly. Io non posso impertanto ammettere la nuda teoria di Faraday, che non riconosce per causa dell'elettricità nel getto del vapore che l'attrito considerato come mezzo puramente meccanico. Anche il Peltier, parlando di questa teoria, afferma che ha riunito il suffragio di pochi fisici, e che è impossibile attribuire l'elettricità sviluppata all'attrito di un liquido contro le pareti solide (*De l'électricité des vapeurs provenant des bouilleurs à haute pression, par M. Peltier. — Séance de la Soc. Phil. du août* 1844, *Institut du* 7 *août* 1844; *Archives de l'électricité* T. IV, pag. 474. an. 1844). Ma di questa sua sentenza non arreca prova alcuna. Io in quella vece ammaestrato da' miei esperimenti sono condotto a conchiudere, che l'attrito non vi inter-

viene nel modo comune; ch'esso serve a mettere in atto delle circostanze, che non concorrono negli ordinarii fenomeni. E per vero dire è legge generale e costante, che il corpo stropicciante acquista una elettricità opposta al corpo stropicciato; e nel caso del getto del vapore, esso sino ad una data distanza ha la stessa elettricità del bollitore. Nè si può dire, che l'elettricità opposta alla caldaia l'acquisti entro al tubo nell'atto dell'attrito, e che nell' uscita espandendosi cambii la sua elettricità, per cui appaia elettrizzato omologamente allo stesso bollitore; perocchè l'espansione che col vapore dell'acqua pura produrrebbe elettricità negativa, questa stessa espansione coll'acqua ed olio produrrebbe una elettricità positiva. Questi due opposti fenomeni non possono adunque attribuirsi alla stessa cagione, ossia alla semplice variazione di forma o di volume; la qual conclusione viene avvalorata dagli effetti che presenta ancora la parte rimota del cono vaporoso dal tubo di uscita. Questa parte col vapore dell'acqua pura è positiva; col vapore e l'olio è negativa. Ove adunque la semplice variazione di volume ed anco il cangiamento di stato fosse sorgente di elettricità, la retrocessione del vapore sarebbe cagione di due opposti fenomeni, cioè dello sviluppo della elettricità negativa e della elettricità positiva. Convien dunque ricorrere a qualche nuovo principio, che leghi tutti questi fenomeni. Nè parmi la pronta separazione del liquido dal vapore, nell'atto che si forma, si possa dire, come propose Peltier, la causa generale di questo sviluppo elettrico; perchè la pronta separazione dovrebbe costantemente presentare il fenomeno al medesimo modo; dovrebbe sempre il liquido, che si isola dal vapor che si forma, assumere la medesima specie di elettricità. Egli è vero che Peltier afferma che i fenomeni elettrici ottenuti dal vapore delle locomotive sono tanto più distinti, quanto è maggiore la velocità del convoglio e la divisione del vapore in globi; e che colla diminuzione della velocità del convoglio scemano i segni elettrici, i quali cessano del tutto, allorchè il convoglio si ferma: egli è vero altresì, che afferma aver ottenuto segni positivi dal vapore elastico e nascente nell'aria, e segni negativi dal vapore moriente, che si riduceva in gocciole d'acqua da bagnare il bottone o il globo dell' elettrometro; ma questi fatti non distruggono minimamente le fatte osservazioni. Avvegnachè il muoversi

più o men rapido della locomotiva parmi possa solo influire sull'isolamento più o meno pronto del vapore dalla locomotiva e dal suolo; e perciò sul dissipamento maggiore o minore della elettricità. Il Peltier poi non ha verificato il caso contrario del vapore con olio, essenza di trementina ecc., per poter giungere ad una illazione generale. Il puro meccanico distacco della gocciola acquea del vapor che si forma, darebbe in questa sentenza ora elettricità positiva, ed ora elettricità negativa. Bisogna adunque ammettere, che in tutti questi cambiamenti di pressione, di temperatura, di volume, di stato, di attrito, di chimica azione v'intervenga l'esercizio di una o più forze molecolari, la direzione e intensità delle quali vengano mutate, secondo la prevalenza di taluna delle circostanze che precedono od accompagnano lo sviluppo elettrico. Per me le due elettricità non sono che effetti di azioni e reazioni, come dimostrai nella mia Memoria *Sul trasporto di materia pesante nelle due opposte correnti dell'apparato voltiano, sulla loro natura e sul moto vorticoso*; letta all'I. R. Istituto il 21 Luglio 1844 (*Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto* 1844); azioni e reazioni che lasciano ancora vasto campo alle meditazioni, sebbene la scienza abbia fatto anche in questo argomento importanti conquiste. Con tale sentenza svaniscono le contraddizioni che si trovano in tutte le altre opinioni; essendo evidente per se stesso, che la reazione debba essere sempre contraria all'azione. Ora dalla macchina di Armstrong trasportandomi col mio pensiero a quanto avviene nella natura, io mi raffiguro nella terra il bollitore, e nei torrenti di sostanze espansibili e di lave dei vulcani, i getti di questa immensa, poderosissima macchina naturale; e nella ordinaria evaporazione, che avviene continuamente in tutta la superficie del globo, lo stato di combustione e di lenta evaporazione della macchina di Armstrong. I chiari fisici Orioli, De Miranda e Paci hanno più volte osservato essere le vulcaniche esalazioni in così forte tensione elettrica da produrre lampi, saette e tuoni, anche sul vertice del pino vulcanico e lungi dalla bocca del cratere, colla stessa frequenza con cui smisurati ed urenti sassi erano proiettati nel vomito d'immense lave di fuoco. E il benemerito prof. Barba osservò il primo, che la stessa cenere spiccata in alto dalla vulcanica esplosione vi si

mantiene per più giorni sospesa sì pel poco peso delle sue parti, che per l'elettrico di cui sono cariche (*Raccolta fisico-chimica italiana del prof. Zantedeschi*, T. I. pag. 135; *Osservazioni di meteorologia elettrica sulle vulcaniche esalazioni, di Domenico De Miranda e Giacomo Maria Paci ecc.; Barba, Considerazioni sul potere meccanico del calorico e dell'elettricismo, Giornale enciclopedico di Napoli N.* 10 *Ottobre* 1818).

Confesso che gli esperimenti instituiti dai sigg. Pouillet e Peltier, e quelli sul vapore dei soffioni toscani fatti dal prof. Matteucci, nel quale non riscontrò alcun segno di elettricità, hanno sparso nelle menti dei fisici gravi dubbii ed incertezze sulla causa generatrice dell' elettricità atmosferica. Secondo la sentenza de' due fisici francesi non si può ritenere come sorgente della elettricità atmosferica, la pura e sola lenta evaporazione dell'acque che bagnano la superficie terrestre; perchè senza chimica azione, non ottennero mai sviluppo elettrico dalla evaporazione. Ma nei soffioni toscani la colonna vaporosa s'innalza carica di acido borico; essa è adunque accompagnata da chimiche azioni; e tuttavia, senza sensibile tensione elettrica. Il Matteucci è d'avviso essere necessario per la formazione del vapore elettrizzato, che questa formazione medesima si faccia con grande tensione e con grande rapidità; e quindi avvisa non essere sufficiente a spiegare l'elettricità atmosferica l'evaporazione delle acque che bagnano la superficie della terra. Secondo questo fisico dee ammettersi che il vapore dell'acqua si trovi elettrizzato, allorchè nel formarsi abbandona i sali, gli acidi o gli alcali con cui era combinato; e che ciò avvenga solo nel caso in cui si converta in vapore quella parte di acqua che si trova combinata col sale o acido o alcali, ed essere per ciò necessario che questa scomposizione e formazione di vapore si operi ad un'alta temperatura, e quindi con rapidità grande. Pare tuttavia che queste due condizioni non manchino nei soffioni toscani; perchè per testimonianza dello stesso Matteucci è fortissima la tensione del vapore dei soffioni, essendo essa capace di lanciare sassi grandissimi a grandi distanze, e di far girare con grande rapidità una ruota di ferro del diametro di quattro metri. Il prof. Orioli attribuì l'essenza della elettricità dei soffioni nella Maremma toscana alla profondità grandissima da cui si

svolgono i vapori, i quali passando pelle fenditure di molti strati, debbono di necessità spogliarsi dell'elettrico (*Atti della terza Riunione degli Scienziati Italiani tenuta in Firenze. Adunanza del dì* 18 *Settembre* 1841 pag. 208 a 210). Questa circostanza posta innanzi dall'Orioli parmi debba essere in gran conto tenuta dai fisici, ancorchè essi non vogliano adottare la semplice e nuda applicazione ch'egli ne fece. È un fatto bene dimostrato dalla macchina idro-elettrica di Armstrong, che la lunghezza del tubo concorre ad infievolire la tensione elettrica del getto vaporoso e della caldaia; è un fatto ben comprovato dalle originali esperienze dello stesso Armstrong, che i fenomeni elettrici si rinvigoriscono a mano a mano che aumenta la tensione del vapore; ma è ancora un fatto egualmente certo, che pel simultaneo concorso del vapore acqueo e dell'olio di oliva l'elettricità per alcuni minuti secondi rimase neutralizzata. Converrebbe ora vedere quale sia l'azione prodotta dal getto del vapore acqueo e dell'acido borico. Converrebbe moltiplicare le esperienze introducendo nei getti vaporosi le sostanze che si trovano nelle esalazioni vulcaniche, come io scrissi all'egregio sig. prof. Paci di Napoli al principio di quest'anno, esortandolo a nuovi esperimenti. Questo distinto fisico sperimentando sulle *fumaiuole delle stufe di s. Germano,* non ebbe alcun fenomeno elettrico. I vapori acquei, solfurei ed acidi esalano da quei spiragli con una specie di intermittenza, talchè sono ora copiosi e violenti, or più e meno lenti, al pari dei fuochi delle vulcaniche eruzioni. Lo stesso risultamento negativo ebbe ne' suoi esperimenti istituiti sulla *Solfatara di Pozzuoli*, e sulle *fumaiuole del Vesuvio;* ma alla *Grotta del Cane,* in cui si svolge incessantemente il gas acido carbonico, ch'è anch'esso un prodotto di quei fuochi vulcanici, de' quali tutt'ora sorprendono gli avanzi, ottenne fenomeni elettrici distinti all'elettroscopio a foglie d'oro. Esaminato lo stato elettrico dell'elettrometro colla cera lacca e col vetro stropicciati, ritrovò sì il gas acido carbonico che i vapori acquosi dalla grotta esalanti elettrizzati positivamente. Consimili risultamenti positivi ottenne pure ripetendo i suoi esperimenti sulla nuova *fumeta* di gas acido carbonico poco discosta dalla *Grotta del Cane* e più vicina alle *Stufe di s. Germano.* Io non debbo qui dimenticare,

che il Faraday, avendo introdotto nel getto vaporoso della macchina di Armstrong dell'acido solforico, afferma aver neutralizzati i fenomeni elettrici del vapor acqueo, che da prima erano assai vigorosi. Pare a questo caso molto simile quello che venne offerto dalla natura al Paci alle fumaiuole del Vesuvio, della Solfatara di Pozzuoli e delle Stufe di s. Germano. Io vorrei, come scrissi allo stesso sig. prof. Paci, che nella medesima verticale si avessero ad istituire esperimenti a varie altezze. I risultamenti negativi, che n'ebbe in tre casi, non potrebbero forse essersi derivati da questo, che avesse sperimentato nella zona neutra? Se questo mio sospetto ha un fondamento, rinnovando l'esperienza ad altezze maggiori, dovrebbe trovarsi uno stato elettrico. Se è vera la mia supposizione, che la terra circondata da una atmosfera vaporosa, la posso risguardare come un'immensa macchina di Armstrong, deve avere gli stati elettrici, quali abbiamo riscontrati nella stessa contrassegnati da una zona neutra. Questo è quello che rimane ancora ad investigarsi; ed io a tempo migliore, fornito dei necessarii apparati, mi occuperò della metereologia elettrica dell'estuario veneto, che interessa sommamente la scienza, pelle particolari circostanze delle acque di queste lagune, che tengono sciolte tante sostanze, le quali nell'atto di separarsi dal vapore acquoso, devono concorrere alla produzione di alcuni fenomeni, che non si avranno a riscontrare sperimentando sulle acque dolci e nella atmosfera sovraincombente ai nostri laghi, come al Benaco ed al Lario, sui quali pure mi propongo in altre stagioni di sperimentare dietro un piano di meteorologia, che già promisi di presentare all'I. R. Istituto.

Dall'esposto frattanto io raccolgo le seguenti conclusioni che sono il frutto de' miei studii e delle mie esperienze in questa parte di fisica:

1. Che la macchina di Armstrong, anche senza il getto vaporoso, è in uno stato elettrico, che va crescendo colla tensione del vapore e colla vivacità della combustione.

2. Che questo stato elettrico è della stessa specie di quello che si manifesta col getto vaporoso acqueo.

3. Ma la tensione a vapore trattenuto è incomparabilmente minore

di quella che si ha col getto, da non potersi determinare a bassa pressione che in uno stato il più perfetto d'isolamento.

4. Che nei limiti di cinque atmosfere crescenti l'aumento di tensione non cambiò mai la specie di elettricità.

5. Che il vapore del getto non è mai neutro, nè tutto positivo, nè tutto negativo.

6. Ma in parte positivo e in parte negativo con una zona neutra che separa le due opposte elettricità.

7. Che la parte positiva si estende ordinariamente di più della negativa.

8. Che la zona neutra è in una oscillazione o movimento continuo.

9. Che la elettricità dalla parte del getto attigua alla caldaia è sempre della medesima specie di quella della stessa caldaia; e che l'elettricità dalla parte del getto al di là della zona neutra è sempre opposta a quella della caldaia.

10. Che d'intorno alla caldaia ed al getto vi è una atmosfera di carica molto estesa della stessa specie di elettricità della caldaia e delle parti attigue del getto.

11. Che in un'aria bastantemente asciutta la prima atmosfera è susseguita da una zona neutra, alla quale vien dietro altra atmosfera elettrica di nome contrario alla prima.

12. Che l'insieme degli esposti fenomeni non può spiegarsi con veruna delle teorie generalmente proposte dai fisici, e bisogna necessariamente ricorrere a nuovi principii.

13. Che le due elettricità della macchina di Armstrong non possono essere che effetti di azioni e reazioni di movimenti molecolari.

14. Che in questi movimenti molecolari v'interviene l'esercizio della forza espansiva della materia.

15. Che l'atmosfera, nell'ipotesi che la terra possa risguardarsi come un'immensa macchina di Armstrong, dee presentare le due opposte elettricità contrassegnate da una zona neutra.

(*Letta il* 9 *Agosto* 1846)

# IDEA

# D'UNA STATISTICA CIVILE

## PER IL VENETO

DEL PROF. BALDASSARE POLI

§ 1. Se lo scopo, anzi l'obbligo del nostro Istituto egli è quello di promuovere gli studii che hanno immediate e precipue attinenze colla prosperità e coltura delle Provincie componenti il territorio Veneto; se all'asseguimento di tanto scopo fa bisogno di conoscerne anticipatamente e la varia condizione e le urgenze ed i mezzi o poteri per rinvenire le vie più atte ad avanzare e migliorare, io per me, quanto fervoroso, altrettanto umile coltivatore delle morali discipline non posso figurarmi in queste argomento o più acconcio o più indispensabile all'uopo di quello d'una *statistica civile*, la quale dandoci contezza di tutte siffatte cose ponga me pure in grado di concorrere all'operosità del nostro corpo scientifico, ed in una al bene pubblico, del quale tutti noi saremo sempre desiderosissimi. Il perchè è mio intendimento di pigliare l'assunto di questa Memoria da una cotale statistica, discorrendone l'*importanza*, i *principii* e l'*esecuzione*. Il primo punto giustificherà per lo meno il buon volere nel mio lavoro. Il secondo additerà le norme alla parte scientifica o alla sua teorica. Il terzo condurrà alla pratica ch'è sempre la più decisiva nelle scienze veramente operative.

§ 2. La importanza della statistica non può più essere nè contestata nè disconosciuta, dacchè per essa soltanto si avvisa il da farsi per ogni popolo o nazione, dacchè qualunque provvedimento dell'autorità tutelante od amministratrice non può iniziarsi che da una esatta notizia di tutti quegli elementi che costituiscono gli stati o le nazioni, a cui si vuole sopraggiungere o sopperire. Ma non è di questa importanza in generale della statistica ch'io ho in mente qui di favellare, ma sì bene di quella al tutto propria e particolare della quale una statistica civile delle provincie nostre sembrami apparatissima.

§ 3. Che esista una vera statistica civile del Veneto, almeno nel significato proprio della parola, io nol saprei immaginare tampoco, anche nel debito apprezzamento di que' rari lavori imperfettissimi che per avventura si conoscono già sopra tale argomento. E acciocchè meglio la sua importanza ed insieme il suo difetto appariscano, giovimi aprire dapprima tutto il mio concetto intorno a simile statistica. La statistica, come a tutti è ben noto, è la esposizione ordinata e compiuta degli elementi o dati costanti e variabili che formano lo stato attuale di una nazione. Quinci tra questi figurano non pure la moralità, la religione, il governo; ma il clima, il territorio, lo stato atmosferico e idraulico, per guisa che la statistica di oggidì, più che statistica, è una geografia omai divenuta. Talmentechè io crederei di non avanzar troppo affermando che le statistiche già note hanno ben poco indosso di quel tanto che occorre per recarle all'indole e al temperamento di civili. E di fatto la statistica civile, come suona il nome di *città* o di *stato*, deve comprendere e mettere in mostra a tratti o punti culminanti e spiccati quegli oggetti dei quali consta lo stato o la città; e come lo stato o la città si compone primamente della popolazione, poscia del governo e delle leggi, indi della moralità e per ultimo della industria o ricchezza; o in una parola del triplice ordine, politico, morale ed economico: così in una statistica civile diventano principali que' dati od elementi che si hanno per nulli o per subordinati in una statistica fisica o geografica, come si fanno accessorii e secondarii nell'una quelli che maggioreggiano nell'altra. Determinato ed espresso in tal guisa il concetto ch'io m'ho d'una statistica civile, chi vorrà

mai farsi assertore o della sua esistenza, o della sua avvenuta effettuazione per riguardo alle Venete Provincie? I pochi ragguagli di statistica che già possediamo, sì per rispetto al Veneto in particolare, come per rispetto alla Italia in generale, mentre da un canto sono troppo scarsi e superficiali, dall'altro non mettono mai dinanzi come materia prima e sostanziale lo stato o la condizione civile del nostro paese, ma piuttosto la fisica o materiale. Laonde per me sta il fatto dell'assoluta mancanza d'una statistica veramente civile per il Veneto ed il conseguente bisogno di tratteggiarne una qualunque che valga a supplirvi; ed è questa per lo appunto alla quale di presente si rivolgono i miei studii.

§ 4. Se si leva a cielo l'astronomia che non può alterare d'un infinitesimo di secondo il moto degli astri, benchè se ne intitoli la leggidatrice, quando si accinge a dischiuderci il catalogo disterminato delle stelle che popolano gli spazii celesti, o a risolvere colla potenza del telescopio le nebulose Magellaniche ancora irreducibili; se si fa plauso alla botanica, quando ne enumera le felci, i muschi, i licheni e tutte quante le crittogame che non moltiplicheranno omai più alla ombra del mistero, ora che la luce fisiologica ne disvela l'origine sì riposta; se si vanta la geografia, quando ne sa dire la curvatura ne' varii punti del globo, e in quale e quanta altezza torreggi il Dawalagiri tra le montagne gigantesche dell'Himalaya; se tiensi in conto la geologia paleontologica, quando ordina e classifica gli sparsi avanzi de' fossili che sì maravigliosamente petrificano negli strati calcarei, per divinare il passato, tuttochè impossente a riordinare e dirigere il presente: chi non vorrà stimare per importante ed utile la statistica civile che ti schiera davanti una popolazione sempre mutabile con tutte le sue fasi e in tutti i suoi movimenti, che te la sminuzza e ripartisce in classi ed in ordini colla esattezza delle cifre, che ti fa notare ad una ad una le sue abitudini, le sue istituzioni ed i suoi prodotti non già al fine di lasciarla tale qual è, pascendo così una vana curiosità od un pensiero infecondo, ma all'arduo proposto di cangiarla e di migliorarla, per quanto il consentono e la sua naturale destinazione e la sua politica esistenza? Egli è questo, o Signori, per me un

inoppugnabile argomento della importanza della statistica civile la quale vi verrò delineando. E di vero ch'ella debba aversi per tale io non ho punto l'animo dubbievole, ove si consideri al suo scopo e alle utilità che ne possono provenire. Quanto allo scopo diretto ed immediato, noi sappiamo che tale statistica applicata al Veneto mira di farci conoscere fondatamente la indole o natura e la condizione sì morale che economica di due milioni di abitanti collocati sopra un suolo privilegiato da natura e dagli uomini, e splendido di care memorie e di gloriose tradizioni; come pure sappiamo che tali sue notizie non debbono andare a perdita come tante altre, ma servire di stimolo a que' tanto sottili provvedimenti dai quali dipendono e il loro ben essere e il loro perfezionamento. Ed è qui dove spiegasi ancora più manifesta la importanza della statistica civile per il triplice vantaggio che ne ridonda alla pubblica amministrazione, all' Istituto ed anco a' privati.

§ 3. Io credo di dire cosa comprovata e verissima affermando che l'amministrazione pubblica attualmente, non può più essere stante ed immobile, ma progrediente e miglioratrice; e che se fuvvi mai tempo nel quale ella dovesse guardarsi dattorno per ordinare, per accrescere e per rinnovare, egli è di certo questo in cui i governi ed i popoli più che condotti, impressati e sospinti dalla forza onnipossente e concorde della pubblica opinione, mentre si studiano dappertutto di diffondere luce di civiltà, di dottrina, e di accogliere ed applicare le nuove scoperte e le più utili istituzioni, si fanno biasimatori severissimi di chiunque ripugni o per ignoranza o per caponaggine allo impulso dell'universale progresso. Egli è pertanto evidente che tra questo inusitato movimento verso il meglio all' amministrazione pubblica può essere bella e profittevole una statistica civile per il Veneto sì per le funzioni che le si aspettano, come per gli oggetti che alla sua autorità vengono demandati. L'amministrazione pubblica primamente, qual depositaria e custoditrice della osservanza delle leggi, non può a meno d' informarsi appieno e per minuto dei costumi, del carattere, delle tendenze e della coltura del popolo che toglie a reggere ed a governare, tanto per riconoscere la opportunità o la bontà delle leggi

medesime, quanto per sopravvedere al loro esatto adempimento. Nè questa ricognizione, nè questo adempimento essa potrà ottenere in diffalta d' una fedele statistica che mostri tutte queste circostanze morali colle quali armoneggiar debbono le stesse leggi ond'essere qualificate per buone ed opportune. Oltracciò se l'amministrazione pubblica è da un lato chiamata a fare sperimento di una tale bontà relativa delle leggi, dall' altro le incombe l' atto incoativo di quelle che più si affanno ai nuovi bisogni e alle nuove condizioni del paese; e a tanto non si perviene che coi dati statistici più sicuri sullo stato morale ed economico, che coll' opera del legislatore intendesi di ammendare. Infine l' Amministrazione pubblica aiuta alla educazione e alla moralità, amplifica la beneficenza, provvede alla sicurezza, s'intromette nelle imposte, favoreggia e distende le fonti di prosperità e di ricchezza, disciplina lo spirito di associazione, scuote tutte le molle che fanno muovere la macchina sociale al ben pubblico o alla felicità dello stato. E a tutto ciò come non conferiscono le notizie più esatte e positive intorno a questi singoli oggetti, affinchè non torni vana o nocevole la possanza delle leggi, oppure intempestiva od a pernicie la sua intervenzione? Che se tali notizie statistiche si addicono in astratto a qualsiasi Amministrazione pubblica, molto più si convengono in concreto a quella delle nostre Provincie, e perchè queste non soggiacenti da gran tempo all'Impero come le altre, sono men note di quelle, e perchè le Provincie Venete offeriscono dal lato morale e civile tanta varietà e tante modificazioni da non essere sì presto caratterizzate e ben conosciute. D' altronde la nostra Amministrazione pubblica quanto abbonda di notizie statistiche sullo stato fisico o materiale del Veneto, altrettanto penuria di quelle sul morale o civile, a motivo che niuno fin qui si mise ad esaminarlo e perlustrarlo nella sua vita intima o domestica, nelle sue abitudini e relazioni sociali, ne' cangiamenti che ha subíto e nel carattere e nelle inclinazioni dopo il mutamento del suo antico governo.

§ 6. Se non che al paro dell' Amministrazione pubblica potrebbe l'Istituto approfittarsi della statistica civile, come in qualche modo si propose di fare nominando presso di sè una Commissione trienne in-

caricata di raccogliere materiali anche per siffatti studii. L'Istituto è l'organo immediato del Governo in tutto ciò che concerne a scienze, a lettere e ad arti, ed ei non potrebbe prestarsi meglio a questo ufficio che coll'esibire a testimonio del suo zelo e della sua cooperazione una minuta ed esatta statistica, dalla quale apparissero delineate o descritte colla popolazione veneta tutte le sue abitudini od usanze in ogni singola Provincia, rappresentati il suo carattere, la sua vita e le sue morali tendenze, segnati a colpo d'occhio tutti i suoi Istituti di beneficenza, di educazione, d'industria e di commercio, e particolarizzati tutti i suoi capitali, i suoi prodotti e persino il prezzo delle derrate e dei salarii, e tutto quanto si riferisce alla produzione e alla coltura di queste Provincie. L'Istituto altresì, se è in obbligo di preferire quelle scienze che contribuiscono di più al bene di queste contrade, non avrà mai in ciò il suo dovere, quando non ponga mano ad una statistica eziandio civile, per la quale venga fatto consapevole del grado della presente prosperità nostra, delle necessità che ne molestano, e de' mezzi a ripararle. L'Istituto per ultimo suole conferire ogni anno premii di scienza e d'industria, è eccitato a dire il suo parere or sull'una, or sull'altra; nè potrà sì presto venir fuora da questo doppio incarico, allorchè gli manchi una estesa e circostanziata conoscenza di tutti gli elementi della prosperità non che fisica, ma morale del Veneto.

§ 7. A questa doppia specie di vantaggio d'una statistica civile per il Veneto potrebbesi aggiungerne una terza, qual è quella de' privati. Alla cura de' privati furono sempre commessi e l'esercizio e l'amministrazione della beneficenza, e lo spirito e la direzione delle associazioni. Tocca al privato di secondare il piano della politica e della educazione. Il possidente, il negoziante ed il banchiere, ossia i produttori in generale, non possono nè spiegare talento di affari, nè ben condursi nella scelta de' prodotti o delle intraprese, se non quando sappiano e i bisogni e le derrate già esistenti, i capitali disponibili, la mano d'opera più attiva e meno dispendiosa, le strade e le vie del mercato per vendere o per ismaltire. E tutto questo non può farsi noto che per mezzo d'una statistica civile. Egli è a fronte di tutti

questi vantaggi che ognuno dovrà convenire della importanza del lavoro ch' io vo a proporre su di quella.

§ 3. Nè può venir meno od esser contesa questa importanza o per le notizie statistiche delle quali è già fornita l' autorità pubblica, o per la niuna sua ingerenza negli oggetti morali, o per la impossibilità di ridurre questi a dati statistici, o per la troppa mutabilità loro, o per le statistiche già pubblicate da alcuni autori. Consentasi pure che presso il Governo esistano quadri statistici sopra molti oggetti interessanti l'amministrazione pubblica: concedasi che parecchi distinti scrittori vadano pubblicando esatti prospetti ora sul commercio, ora sulle finanze dello stato; ma che perciò? Que' quadri e que' prospetti, comunque utilissimi e pregevolissimi, o non sono tutti di nostro diritto, o non sopperiscono al bisogno di una statistica civile, attesochè nella troppa loro generalità vi si trascurano oppure sfuggono le minute notizie richieste dalla nostra, e nella loro stessa specialità difettano di que' particolareggiamenti che riguardano più d'appresso l' oggetto principalissimo di quella. Quanto al non potersi immischiare l'autorità pubblica degli oggetti morali anche quando venissero in chiaro per mezzo d'una statistica, ciò non può esser vero se non delle tendenze interne, degli affetti e de' sentimenti che si rimettono alla pura morale, ma non mai di quelli che si manifestano esternamente. Su questi può influire l'autorità pubblica non già col sistema repressivo o coattivo, ma coll'educante e migliorativo. Quindi non le tornerà mai inutile la cognizione statistica di tali tendenze appunto perchè può dirigerle o raffrenarle colla coltura o colla educazione. D' altra parte queste tendenze e queste abitudini morali si legano coi codici e colle leggi, formano il carattere del popolo che si vuol governare, sono le prime basi ad ogni ordinamento civile e politico; e ciò basta a renderne necessaria la statistica, quand'anche fosse provato che il Governo non possa avervi alcun ingerimento. L'impossibilità di ridurre a dati statistici gli oggetti componenti la statistica civile, come sono i morali, è piuttosto ipotetica che reale. Certo che gli oggetti morali per sè stessi non possono nè descriversi, nè rappresentarsi; ma in quanto si collegano con fatti ed hanno una esteriore manifestazione ammettono e l'uno e l'altro. Chi vorrà negare che il numero maggiore

o minore d' Istituti di beneficenza non faccia fede dello spirito di carità e di filantropia? Chi dal numero degli ammalati di contagio venereo non potrà argomentare all'intemperanza o alla dissolutezza di una data classe? Che manca adunque per fare una statistica di questi oggetti morali? Che se in essi non si arriverà sempre alla esattezza delle cifre per essere destituti del vero carattere di quantità, non potrà peraltro mancare il più ed il meno dedotto dalla estensione e dalla durata di queste tendenze od abitudini; e questo è più che sufficiente alla precisione de' dati statistici. Inoltre la statistica civile non risulta solo della moralità, ma benanco della popolazione e della industria; ed è su questi oggetti che potrà fare maggiormente le sue prove il rigore della statistica. La mutabilità e l'incostanza dei dati statistici in parte è innegabile, ed in parte è una necessità dipendente dalla loro natura; ma ad onta di questa mutabilità od incostanza si sono fatte e si faranno sempre statistiche per la idea ch'esse tornano a prò per lo meno in tutto il tempo che que' dati stessi non mutano. Che se per mutabili si dichiarano anche volgarmente i dati della statistica, in fatto non lo sono tutti e meno poi ad un tratto. Nella statistica civile ci son dati che rimangono sempre tali, o che non cangiano che a lungo andare. Perciò tale statistica si rimarrà fruttuosa almeno per questi, e per tutto quel tratto che durano. Se non che, posto anche che tutti i dati di simile statistica variassero, a siffatto sconcio si ripara ben tosto con una periodica correzione o revisione. Finalmente non può essere nè superflua, nè meno importante la statistica civile per il Veneto a cagione di quelle che vennero già messe in luce da alcuni autori, sì perchè, per quanto è a mia saputa, non ve n' ha pur una che le assomigli, sì perchè tutte sono tali da non poterla realmente supplire. Le statistiche anco speciali degli Alemanni Lichtenstern e Schnabel non danno che un piccol motto del Veneto, e nella parte morale toccano del carattere e delle abitudini così di volo, che tu devi chiedere sempre come e perchè si abbiano a tenere per dati fondati di statistica que' cenni leggerissimi. Che se poi si guardi all'estensione e all'enumerazione astratta o teorica degli oggetti che formano statisticamente la moralità di un popolo, tu non ritrovi che il

Gioia, il quale nelle sue Tavole statistiche accenni al carattere morale. Quindi anch'egli ti lascia desiderare in tal parte il seguito di tutti gli altri dati od oggetti che debbono entrare in una statistica effettivamente civile. Il perchè io porto fermissima opinione che non minori punto di sua importanza la statistica da me progettata, nè per le statistiche già pubblicate, nè per qualsiasi altra cagione. Dopo di che m'è aperta la via a procedere più sicuro ne' principii sui quali è mio disegno di vederla compilata.

§ 9. I principii coi quali deve condursi il lavoro o la composizione della statistica civile per il Veneto ragguardano: 1. alla *classificazione* de' suoi dati od oggetti, 2. alle sue *fonti*, 3. al suo *metodo*, 4. alla sua *revisione* o *correzione*. La classificazione dei dati od oggetti della statistica può variare al variare della specie di questa; ma è fissa ed inalterabile, qualora venga circoscritta o limitata col carattere di civile. Se la statistica è universale, la classificazione deve abbracciare tutto quanto trovasi nello stato al di dentro e al di fuori; e perciò all'interno comprenderà il clima ed il territorio, ossia la topografia, la popolazione, il governo, la legislazione, la moralità, la industria, ed allo esterno la difesa o la forza militare ed i trattati. Se all'invece la statistica è speciale, e propriamente civile per contrapposto alla naturale o fisica, la sua classificazione non aggirasi più che su que' dati economici e politici che formano lo stato morale o civile della nazione. Ed allora sono imprescindibili in una tale classificazione tre caratteri, che sia cioè *sistematica, compiuta, precisa*. Non può essere sistematica se non in quanto si sostenga sopra una idea fondamentale o razionale che diriga e sviluppi tutto quanto il suo lavoro. Tolta questa idea, essa è incerta ed arbitraria, è un ammasso indigesto di nozioni inservibili o contraddittorie, cangia al cangiarsi d'ogni stato cui venga applicata, e trasformasi in tante statistiche per il medesimo o identico stato. Dev'essere compiuta mediante il pieno svolgimento di quella idea prima o fondamentale che si toglie a dividere logicamente; e tale svolgimento si opera coll'analisi di tutti quegli elementi, de' quali una siffatta idea è per modo di dire la risultante. Dev'essere precisa per tagliar fuori tutto quello che può esserci o di

superfluo o di meno importante, e per rappresentare il suo oggetto con una serie di dati e di cifre ben avverati e positivi che non lascino luogo a dubbii o ad esitazioni sulle sue conclusioni. Veniamo con questi requisiti alla richiesta classificazione.

§ 10. La statistica civile per il Veneto vuole e deve esporre o descrivere la condizione attuale delle nostre provincie come stato. Dunque la sua idea fondamentale o razionale è già data nel suo oggetto, ed è quella dello stato. Il Veneto, come stato o come una porzione di esso, si compone primamente di una popolazione vivente in civile comunanza, distribuita in varie classi ed avente varie relazioni. Il primo dato od oggetto adunque della nostra statistica civile sarà quello della *popolazione*. Ma la popolazione del Veneto appunto perchè raccolta e foggiata a civile consorzio ha un supremo potere che le comanda, magistrati che la governano, leggi che la tutelano; il suo secondo e terzo oggetto sono pertanto il *governo* e la *legislazione*. La popolazione o stato del Veneto informata a civiltà, diretta e governata da leggi, e per la sua indole o natura, e per il suo scopo, e per la sua educazione, e per le sue istituzioni spiega certi costumi, certe tendenze, certe inclinazioni più o meno conformi al fine morale; ed ecco per quarto oggetto della nostra statistica civile appresentarsi la *moralità*. Per ultimo questa popolazione che reggesi a stato o a nazione vive e si conserva colle proprie od altrui ricchezze, provvede a' suoi bisogni sì di commodo che di piacere, esercita arti e mestieri, commercio e navigazione, è più o meno attuosa, ha in somma una propria industria od economia. Perciò la *industria* o la economia è il quinto oggetto ch'entra in tale statistica. Ecco come analizzando o risolvendo l'idea fondamentale dello stato ne' suoi elementi ne risultino per la statistica civile cinque dati od oggetti, quali sono: la *popolazione*, il *governo*, la *legislazione*, la *moralità* e la *industria*. Oltre a questi non può inoltrarsi di più l'analisi, o la divisione fondata sul cardinale concetto di stato ne' limiti d'una statistica puramente civile. Siccome però il governo e la legislazione del Veneto non sono ancora definitivamente stabiliti, così omettendo questi due per ora, gli oggetti o dati fondamentali della nostra statistica ridurrebbersi ai tre seguenti: 1. alla

*popolazione*, 2. alla *moralità*, 3. alla *industria*. È ufficio pertanto della nostra statistica di descrivere e classificare ordinatamente e precisamente questi tre oggetti come si trovano nelle Provincie nostre al dì d'oggi, non mettendone da banda veruno; e poichè ognuno di essi è complesso o composto, e ne contiene sotto di sè molti altri, ella seguitando il metodo razionale ed analitico col quale trovò i primi, dovrà sviluppare e suddividere i secondi, i terzi insino agli ultimi, incominciando dalla *popolazione*.

§ 11. La popolazione d'uno stato o paese è la quantità o il numero totale de' suoi abitanti od individui. Il determinare questa quantità è facile ed importante. È facile col sussidio dell' aritmetica politica. È importante perchè da essa comunemente si trae indizio della sua grandezza e della sua prosperità. Ma del semplice numero o della quantità della popolazione in generale non s' accontenta ne' suoi intendimenti la statistica civile. Oltre alla popolazione abbondante e copiosa bisogna sapere se essa sia sana e laboriosa, ricca, pacifica ed accostumata, e in proporzione colle forze dello stato per corrispondere ai fini della politica. Egli è perciò indispensabile che la statistica connumeri la popolazione non che dalla *quantità*, ma ben anco dalla *qualità*. La qualità si desume dal numero totale degli abitanti. Questo numero non è costante, ma sempre maggiore o minore per le cause continue di aumento e di decremento che fanno muovere la popolazione medesima. Il calcolo pertanto della popolazione in generale deve fondarsi altresì sopra tali cause. Sono cause all' aumento della popolazione le nascite ed i matrimonii, e al decremento le morti. Dunque il numero totale della popolazione veneta deve essere paragonato con quello delle *nascite*, dei *matrimonii* e delle *morti* assegnandone il rispettivo rapporto. Oltracciò la popolazione non è tutta uguale ne' suoi individui, nè tutta indistintamente può concorrere allo scopo sociale. Essa consta di maschi e di femmine, di bambini, di giovani e di vecchi, di nubili e di maritati, di legittimi e d' illegittimi, di proprii o di altrui famiglie. Al novero della popolazione in generale dovrà unirsi eziandio il rapporto che con essa tengono i suoi individui distinti in categorie per il *sesso*, per la *età*, per il *matrimonio*,

per la *legittimità* di nascita e per la *esposizione.* Laonde accanto del numero dei maschi e delle femmine nel Veneto apparirà pur quello dei bambini e dei vecchi, dei coniugati e dei celibi, dei figli legittimi ed illegittimi e finalmente degli esposti. Per ultimo la popolazione di uno stato si giudica maggiore o minore secondo che fa a misura col territorio o col suolo. Quindi alla statistica quantitativa della popolazione veneta dovrà tener dietro il dato numerico della sua ragione o del suo rapporto colla estensione del suolo. Fin qui si potrà dire di conoscere la quantità della nostra popolazione; ma ciò che più rileva è il sapere quale essa sia, e quanta nella sua qualità medesima. A ciò necessita spartirla nelle sue classi o ne' suoi ordini dietro le varie relazioni sociali. La popolazione del Veneto, come di qualsiasi altro stato, comprende cittadini e forestieri, cattolici e non cattolici, possidenti, manifattori e commercianti, civili, ecclesiastici e militari, impiegati, dotti, letterati ed artisti, poveri e ricchi, lavoranti ed oziosi, gente di città e di campagna. Ecco adunque il suo naturale spartimento in classi per le relazioni 1. di *cittadinanza*, 2. di *religione*, 3. di *condizione* o di *stato*, 4. di *povertà*, 5. di *sito* o di dimora. A tal punto si appalesa qual numero contengasi in ognuna di queste classi, ma non si sa ancora quale rapporto vi corra tra classe e classe, tra ogni classe ed il totale della popolazione. E d'altronde è noto che della giusta proporzione della popolazione e con se stessa e colle sue classi decide un cosiffatto rapporto; che lo squilibrio o la esorbitanza d'una classe sopra le altre è uno squilibrio od una esorbitanza dello intero corpo sociale; che l'abbondanza o la scarsità della popolazione campestre o di città è il segnale della vocazione o per la agricoltura o per la industria. Quindi ottenuto il numero degli individui di ciascheduna classe sociale converrà determinare il rapporto respettivo tra le classi con sè stesse, e tra le classi e la intera popolazione.

§ 12. Alla popolazione sussegue come secondo dato ed oggetto fondamentale della statistica civile la *moralità* del Veneto, ovvero i costumi o le maniere di vivere in corrispondenza al bene, all'onesto o alla morale. È difficile cogliere e rappresentare statisticamente la mora-

lità di un popolo, sì perchè i suoi elementi sono così molteplici e svariati da non essere sì presto ridotti ad uno o più principii ossia ad un sistema, sì perchè questi elementi medesimi per la mobilità e sfuggevolezza loro non sempre si arrendono alla precisione ed al rigore delle cifre o del calcolo. Per altro se si osservi che la moralità da un canto risulta di certe qualità e di certe tendenze che si manifestano con atti per loro stessi e immediatamente buoni o cattivi, e che dall'altro ha relazione con certi fatti od azioni che servono d'indizio od argomento ad esse qualità o tendenze, si vedrà modo col rappresentare e gli uni e le altre ad una statistica od esatta esposizione eziandio di quella. E qui, dacchè cade il discorso sulla statistica della moralità, anche per tenerci a segno sarà buono differenziare il vero scopo dello statistico da quello del moralista. L'uno non intende che di descrivere e significare in guisa intuitiva e palpabile la moralità qualunque essa si sia dalle sue esteriori apparenze. L'altro vuole riconoscerla e giudicarla intimamente e a fondo. Perciò il primo adocchia soltanto il fatto o quelle tendenze e qualità che si collegano con quello, e si estrinsecano nelle masse mediante atti od azioni; ed il secondo non tien conto del fatto, ma addirizzandosi difilato alla intenzione, vuole rintracciarla ed estimarla fino nelle sue più interne e primissime scaturigini. Quegli la considera e analizza nelle classi e nelle nazioni; questi la disamina soltanto nello individuo. Quindi è che per la statistica classificazione o rappresentazione della moralità nelle Provincie Venete può adoperarsi un doppio criterio. Il primo, delle qualità o tendenze che si scoprono da sè ed immediatamente per buone o per cattive. Il secondo, dei fatti o delle azioni che suppongono quelle qualità o tendenze, onde dagli uni si possa conchiudere alle altre. Volete sapere a cagione d'esempio se nel Veneto dominino civiltà e politezza, frugalità e temperanza, oppure abitudini diverse? Guardate agli abiti, alle case e alle mense de' suoi abitatori, all'annuo consumo de' panni e de' commestibili, al numero delle bettole e dei caffè, a quello de' venditori d'acquavite e di spiriti, e voi ne avrete il conto approssimativo. Se non che dato questo doppio criterio per la determinazione statistica della nostra moralità, resta a conoscere di quali e quanti og-

getti od elementi essa risulti per applicarla convenientemente a ciascheduno.

§ 13. La moralità, siccome il complesso delle tendenze e qualità conformi o no al bene od all'onesto, apparisce in primo luogo dalle maniere di vivere e di comportarsi degl'individui, e quindi dai costumi o dalle abitudini in generale del paese. E perciò da queste si può congetturare quella. In secondo luogo in queste abitudini o costumi spiegasi una certa indole ne' suoi abitanti al tutto morale che in parte è causa ed in parte effetto di quelle abitudini e di quei costumi medesimi. E questo è il carattere che dopo le abitudini può essere un altro indizio di moralità. In terzo luogo la morale o la moralità è in intimo legame coi principii e colle pratiche della pietà e del culto, conseguentemente la religione o in senso più proprio la religiosità è un altro dato di moralità. In quarto luogo dai lumi che si spandono la mercè della istruzione, dai precetti che s'insinuano sino dai primi anni colla pratica e coll'esempio, si fugano i pregiudizii, si domano le male inclinazioni, s'indirizzano la mente ed il cuore al retto, al bello ed al buono. Perciò la educazione può far presa come un altro dato di moralità. In fine se tanto è morale un popolo, quanto rispetta i diritti altrui, quanto è ossequioso alle leggi, quanto largheggia di soccorsi a' suoi simili, è evidente che può dedursi la moralità eziandio dalla giustizia e dalla beneficenza. Di maniera che la moralità del Veneto può statisticamente stabilirsi e misurarsi da questi sei dati od oggetti: 1. dalle *abitudini* o dai costumi, 2. dal *carattere*, 3. dalla *religiosità*, 4. dalla *educazione*, 5. dalla *giustizia*, 6. dalla *beneficenza*.

§ 14. Le abitudini o i costumi sono le maniere costanti ed uniformi del vivere umano; ed esse si riferiscono altre alle persone ed altre alle cose, oppure a quelle ed a queste assieme. Egli è per tali abitudini o costumi che vivesi più o meno agiatamente, che si cercano le comodità della vita, che si corre più o meno con voglia alla fatica od al lavoro od ai divertimenti, che si è affabili e conversevoli, od arroganti e concentrati, che si usa moderazione o temperanza nel cibo, nel lusso, ne' piaceri; che si rifugge o si accarezza il senso, che si ama e si conserva più o meno l'avere. Laonde la statistica delle

abitudini comprende più specialmente a) il *vitto,* b) il *vestito,* c) l'*alloggio,* d) i *divertimenti,* e) la *civiltà,* f) la *sociabilità,* g) l'*attività* od operosità, h) la *temperanza,* i) la *costumatezza,* l) la *economia.* Ma come si potranno mai rappresentare e determinare statisticamente tutte queste abitudini in rispetto alle nostre Provincie? Avanti di farlo non sarà inopportuno di premettere queste norme od avvertenze: 1. Che debbonsi descrivere indistintamente sì le buone che le cattive abitudini, ponendo a costa le une alle altre sotto la propria rubrica; altrimenti la statistica civile non è più sincera ed imparziale, fa contra e disserve ad una esatta esposizione dello stato attuale. 2. Che bisogna ritrarre queste abitudini non dallo individuo, ma dalle classi, non dalle tendenze o maniere di vivere fugaci e passeggiere, ma costanti e durevoli, avendo perciò riguardo al doppio rapporto della estensione e della durata loro. Se no, si darà la statistica dell'individuo e non della nazione; se no, invece di descrivere il popolo d'oggi, si descriverà quello di ieri o di domani. 3. Che queste abitudini devono rappresentarsi sempre con fatti ed anco con cifre dove il permetta l'oggetto, acciocchè la statistica civile non iscapiti nè di verità, nè di precisione. 4. Che la descrizione di queste abitudini per via di fatti riesca così concreta e particolareggiata da individualizzare e scernere con essa il vero stato morale del Veneto da qualunque altro. Con siffatte norme procedasi ora alla statistica indicazione di tutte queste abitudini.

§ 15. Nella statistica del vitto, del vestito, dell'alloggio e dei divertimenti si dovrà sempre aver riguardo alla qualità ed alla quantità in relazione alle classi ed all'uso più generale ed esteso. Nel vitto per la qualità si guarderà alle spezie degli alimenti e delle bevande, se indigeni o di estera provenienza, al consumo maggiore o minore di quelli o di queste, al prezzo loro del mercato. Per la quantità invece si determinerà il bisogno giornaliero ed annuo per lo individuo, per la famiglia e per la popolazione assegnando la quota di spesa relativa. Dalla qualità e dalla quantità del vitto deduconsi l'agiatezza o miseria delle classi, lo stato della igiene pubblica, la temperanza della popolazione. Il vestito sarà da distinguersi nella qualità per la classe o condizione, per il tempo o per la stagione, per il maggiore o mi-

nor costo. La sua quantità è il costo o la spesa; e da questa può argomentarsi non che alla comodità comune, ma al lusso o alla moderazione. L'alloggio si considererà prima nella città e poscia nella campagna. Rispetto alla sua qualità si osserverà e in un luogo e nell'altro alla condizione delle case, alla loro costruzione e distribuzione, alla loro plaga od ubicazione, al costume di arieggiarle e ventilarle, alla natura de' mobili, al numero de' locali o delle stanze per l'individuo, per la condizione e per la famiglia. Rispetto alla sua quantità si dirà il numero delle case e dei proprietarii, il prezzo degli affitti, la spesa delle annue riparazioni e delle imposte, il loro importo o valore. Pei divertimenti si faranno note tutte le specie loro, come gli spettacoli, le feste, le danze, i giuochi, i piaceri della campagna e del viaggiare, il numero o le classi di persone che vi partecipano, la spesa che costano, gl' introiti che se ne ricavano. Talchè sarà agevole dal prezzo de' consumi nel vitto, nel vestito, nell'alloggio e nei divertimenti di far conoscere soprattutto una buona parte dell'impiego del capitale nazionale, l'annua consumazione del Veneto, il costo dell'individuo e d'una famiglia, il valsente delle rendite e dei salarii, il rapporto tra la consumazione e la produzione nelle nostre provincie.

§ 16. Più ardua e intralciata di questa parte di statistica civile deve riuscir quella delle altre abitudini di civiltà e di sociabilità fino alla costumatezza e all'economia. Ma ad appianarla e ad appiccolirne la difficoltà è mestieri di specificare e limitare il senso di ognuna, ponendovi di rincontro le abitudini opposte, sebbene anch'esse non diversifichino essenzialmente per le nazioni da quello che sono per l'individuo. La civiltà, nel senso di contegno esterno, si annunzia alla nettezza degli abiti e della persona, alla urbanità, all'affabilità e alla cortesia, ed è ripugnante col sucidume e colla immondezza, colla durezza o rusticità e coll'arroganza nel tratto o ne' modi. La sociabilità, ch'è lo spirito o la tendenza a trovarsi cogli altri od insieme, si rivela colle varie società od associazioni, e contraddice all'isolamento, alle antipatie, all'avversione o privazione de' ritrovi e delle conversazioni. L'attività od operosità, che consiste nell'esercizio più o meno intenso e

durevole delle nostre forze, è espressa dall' alacrità del corpo e dell' anima, dallo spirito d' intraprendenza, dall' amore all' occupazione o alla fatica, e soprattutto dalla qualità e dalla quantità de' lavori. Sono perciò suoi opposti la lentezza, l' ozio e la infingardaggine, la poca o la niuna produzione. La temperanza, ch' è la parsimonia nel vitto o la frugalità del cibo, si riconosce alla conservazione e alla salute pubblica, alla snellezza della persona, all' attività ed operosità, e contrasta con ogni abuso od eccesso di ebrietà e di ghiottoneria. La costumatezza, ch' è l' astinenza o la riserva dai piaceri illeciti o del senso, si accompagna colla onestà e colla innocenza, col pudore, col contegno negli atti e nelle parole, e fa pugna colla libidine, colla dissolutezza, colla vita disonesta e corrotta degl' individui o delle famiglie. L' economia, ch' è l' amore al risparmio, è figlia della previdenza, della inclinazione ad acquistare e a conservare, ed ha per contrarie l' avidità o l' avarizia, la spensierataggine e la prodigalità. Determinato così chiaramente il senso di ognuna di queste qualità od abitudini in astratto, è più facile il coglierle e l' indicarle anco con fatti od in concreto nella vita esterna degli abitanti del Veneto.

§ 17. La *civiltà* come pulitezza negli abiti e nella persona può affigurarsi alla nettezza delle case e delle strade, agli abiti e alle biancherie degli artigiani e de' poveri, all' annuo consumo de' panni, delle stoffe e delle telerie, alle frequenti botteghe di cose minute o di merceria, al numero di bagni pubblici, all' uso del nuoto, alla pochezza o rarità delle malattie cutanee. Così la gentilezza e l' affabilità come altre due forme di civiltà si avvisano al linguaggio vivace ed insinuante, al civile conversare di tutti i ceti, al teatro, al caffè, alle conversazioni e ne' viaggi, al costume d' indirizzare i forestieri per le vie, a quella specie di clientela o protezione dei deboli e dei poveri ch' è l' avanzo dell' antico patriziato. La *sociabilità* del Veneto può riconoscersi al numero e alla qualità di tutte le sue associazioni sì di piacere che d' interesse, alla frequenza de' pubblici spettacoli, al costume delle visite e delle conversazioni, all' officiosità o cortesia co' forestieri, alla facilità di appiccar discorso con chicchessia ne' viaggi e ne' luoghi di diporto e di ricreazione. Dell' *attività* od operosità può pigliarsi prova

dalla qualità e quantità de' lavori, dalla durata media del lavoro in una giornata, dal confronto tra i lavoranti nazionali e forestieri, dalle refezioni o soste più o meno lunghe degli artigiani, dai giorni di festa o di sospensione del lavoro, dal ruolo dei vagabondi od oziosi, dal costume di dormire di meriggiana, dalle notti prolungate in passatempi, dalle botteghe chiuse od aperte di buon mattino, dalle fermate ai caffè ed alle osterie, dal numero de' viaggiatori per interesse o per piacere. Se tutto ciò viene ad attestare l'attività od operosità per le città, quella per la campagna può indursi dal numero de' fondi coltivati per economia, dal numero de' fattori od agenti di campagna, dal lavoro medio del contadino, dalla sua persistenza nelle antiche consuetudini agrarie, dalla quantità maggiore o minore del terreno incolto e non dissodato. Saranno indizio alla *temperanza* l'annuo consumo de' comestibili, la loro qualità o sceltezza, l'uso de' pranzi e delle cene, lo spaccio annuo de' vini e de' liquori, il numero delle bettole e delle osterie, e de' consumi loro, la frequenza o la quantità delle malattie gastriche ed intestinali. La costumatezza potrassi ricavare dal numero de' matrimonii e de' celibi, dallo stato de' figli illegittimi e degli esposti, dalla quantità delle separazioni di letto e di mensa, dai delitti o processi di carne, di stupro, di ratto, di ruffianesimo e di adulterio, dal numero delle partorienti ricoverate o vergognose, e da quello delle meretrici e degli ammalati venerei ne' pubblici ospizii. Finalmente si congetturerà la *economia* dal numero de' possidenti, dalla quantità de' capitali attivi ed inscritti agli ufficii delle ipoteche, dal numero de' semplici operaj, dal reiteramento dei fallimenti e dei delitti contro la proprietà, dal numero delle legali interdizioni per prodigalità. Che se per servire alla fedeltà nella statistica delle abitudini morali del nostro paese avesse a risaltare a canto del bene anco il male, a quale danno o sconcio recherebbe mai la verità? La statistica come istorica testificatrice del presente deve descrivere il popolo o la nazione tal qual è senza industriarsi di farlo apparire migliore di quello che sia effettivamente. Una descrizione statistica non tocca mai all'individuo, ma alla generalità o alle classi; e perciò lascia sussistere sempre le debite eccezioni nella individualità medesima. Se si mette a costa del bene eziandio il male, egli è al fine lodevole

di correggere e di migliorare. È impossibile che ci sia un popolo da ogni lato così intero e perfetto, da olire sempre del fiore di virtù e di profumati costumi.

§ 18. Il *carattere* in generale è l'indole o la fisionomia morale delle nazioni. Esso risulta dal clima, dal temperamento, dallo stato delle facoltà e delle idee, dalla educazione e dalle abitudini; di maniera che è in parte naturale o nativo, ed in parte acquisito, e può dirsi a tutta ragione essere causa ed effetto ad un'ora delle abitudini medesime. Il carattere poi in particolare del Veneto altro non è che il complesso di que' tratti o modi di pensare, di sentire e di volere più rilevati ed estesi che improntano la nostra popolazione in guisa da distinguerla da ogni altra. Il carattere nella differenza di questi tratti o modi può essere per il pensare grave o serio, spiritoso o leggiero; per il sentire ilare o vivace, malinconico od ottuso; per il volere mobile o fermo, forte o debole; e per tutte le altre qualità e tendenze morali *buono* o *cattivo*. Quali tra queste specie o forme di carattere siano da appropriarsi al Veneto lo apprenderà la statistica dalla qualità del clima e del temperamento, dal genere de' lavori e delle occupazioni, dalla vita o dalle abitudini di famiglia e di società tra le varie classi, dalle azioni più note di generosità e di benevolenza, dal numero degl' Istituti di carità e di beneficenza, dal costume della elemosina, dall'ossequio o dalla resistenza ai pubblici ordini, dal numero dei reclami e delle appellazioni, dalla qualità dei delitti dominanti nelle nostre Provincie.

§ 19. Passando alla *religiosità* non può esser questa statisticamente riconosciuta che dalle diverse religioni, dalle chiese, dal clero e dalle credenze e pratiche religiose. Quanto alle diverse religioni, si determinerà il loro numero e la qualità loro in ragione di popolazione. Quanto alle chiese, si dirà quali e quante ve ne siano in città, quante in campagna, e quale la loro proporzione colla popolazione o col territorio, quale il loro arredo, quale la loro amministrazione e quale la loro spesa. Quanto al clero avrassi riguardo alle sue specie di secolare e regolare, e alla rispettiva proporzione non solo tra sè, ma benanco alla popolazione, alla sua educazione e alle sue funzioni spiri-

tuali, al suo trattamento dedotto dal numero de' beneficii e delle prebende e dal reddito loro, dallo stato delle decime ecclesiastiche, e dagli assegni sul fondo erariale di religione. Quanto alle pratiche religiose si citeranno la frequenza delle chiese, le fonti e le opere di istruzione ecclesiastica o religiosa, i processi per delitto di perturbata religione, le multe o censure per la trasgressione del precetto festivo, il numero de' suicidi per miscredenza o per mania religiosa, il numero delle messe, delle feste e delle processioni, la somma dell' elemosine per la chiesa, il costume de' funerali e la spesa loro, la quantità dei legati e delle fondazioni pie, la somma totale per il culto.

§ 20. Alla religiosità succede la *educazione* come elemento o dato di moralità. In questa è da distinguersi il doppio uffizio d'istruzione e di educazione od allevamento in generale. Nel senso d' istruzione sarà bene indicare il numero totale delle scuole pubbliche e private nei tre gradi od ordini di elementari e tecniche, di Licei e di Università, il numero de' maestri e professori, e il vario metodo d'istruzione, la quantità o il movimento annuo degli studenti distinti nelle categorie diverse per l' età, per il sesso e per la condizione e per il grado dello studio, il numero approssimativo di quelli che sanno leggere e scrivere, la spesa totale per l' insegnamento. Nel senso di educazione dovranno notarsi le varie abitudini fisiche e morali per i ragazzi e per le fanciulle nelle famiglie, il costume più o meno esteso delle nutrici estranee e dei pedagoghi, i collegi convitti per i maschi e per le femmine, gli asili di carità e gli orfanotrofii, e le case per i discoli. il numero dei delinquenti impuberi, degli emancipati o dichiarati maggiori ai venti anni per concessione di legge.

§ 21. La *giustizia*, ch' è la ferma volontà di dare a ciascheduno il suo, di non offendere chicchessia, si presume naturalmente dalla osservanza o dal rispetto alle cose e alle persone, e distinguesi in *civile* e *criminale*. La civile potrà inferirsi dalla quantità degli atti di conciliazioni innanzi alle preture, dal numero e dalla qualità delle liti tra parenti ed estranei, d'indole civile o commerciale, di poco o niun valore, giuste o temerarie, finite o transatte, appellate o non appellate, dal numero degli avvocati e dal medio annuo de' proventi loro, dagli

arresti per debiti, dai trafugamenti ne' sequestri o nella cessione dei beni, dalla moltiplicità delle prenotazioni ipotecarie, dal numero delle cambiali in protesto e da quello degli atti esecutivi. La criminale, che appellasi anco più comunemente *criminalità*, verrà dedotta dalla quantità e dalla qualità dei delitti, dai processi chiusi od aperti per la speciale inquisizione, dal numero delle sentenze di condanna, di sospensione per difetto di prove legali, oppure d' innocenza, dal numero e dalla qualità degl' inquisiti e dei delinquenti distinti per l'età, per il sesso, per la condizione, per la dimora, per il genere del delitto e soprattutto per la recidività, stabilendo colla scorta di questi dati il rapporto più preciso tra il numero dei delinquenti e la popolazione, e la linea più o meno ascendente della criminalità nel Veneto tanto in generale, quanto in particolare e per ciascheduna specie di delitti, e per ciascheduna classe di delinquenti.

§ 22. Finalmente la *beneficenza*, ch'è l'ultimo oggetto già prestabilito alla moralità secondo la statistica civile, si argomenterà dalla quantità e dalla qualità degl' Istituti di carità sussistenti fra noi, dal fondo loro speciale o del governo o de' comuni, dalla varia somministrazione di soccorsi, dal numero de' poveri distribuiti nelle classi di validi od impotenti, di maschi e di femmine, di cittadini e di forestieri, dal numero degl' impiegati ed amministratori in ciaschedun Istituto, dalla qualità de' regolamenti relativi, dalla quantità degl'introiti e della spesa annua per la beneficenza, determinando definitivamente la relazione numerica tra i poveri del Veneto e la sua popolazione, ed il costo d'un povero nelle nostre case di ricovero o d' industria.

§ 23. Additati amplamente i principii che debbono condurci nella statistica civile del Veneto per rispetto alla popolazione e alla moralità, resta d'indicare quelli che si rapportano alla *industria*. La industria in economia politica non significa solamente qualsiasi atto di trasformazione o modificazione delle materie prime, ma benanco qualunque applicazione di forze diretta alla produzione. Egli è sotto questo punto di vista che nella classificazione delle varie specie d' industria io non esito a collocarvi non tanto l'*agraria*, la *manifattrice* e la *commerciale*, quanto la *intellettuale* medesima, sì perchè questa al pari di quelle

interviene alla produzione anco materiale, sì perchè gli stessi suoi prodotti immateriali, in quanto si cercano e si prezzano col cambio, hanno a tenersi in conto di ricchezze e di valori. Nel che punto non disgrada, nè si confonde la produzione o proprietà intellettuale colle altre di natura cotanto inferiore, essendo meramente economico l'aspetto sotto il quale mi fo qui a considerarla. Seguendo pertanto la già ammessa quadripartizione, la nostra industria *agraria* verrà espressa e descritta dal clima e dalla natura del suolo, dalla quantità e qualità del territorio irriguo o non irriguo, coltivo e non coltivo, dalle forze produttive rappresentate per una parte dal numero degli agricoltori, dei capitalisti e de' semplici lavoratori; e per l'altra dalla quantità delle case e delle chiusure, dalla somma delle scorte in sementi, in attrezzi rurali, dal bestiame e dal suo prodotto, dai varii sistemi di coltura, dal grado d' imperfezione o di avanzamento in quelli, dall'annua rendita di ciascuna specie di fondi comparata colla spesa, dal prezzo dei generi e della mano d'opera, dalla bontà delle strade, dalle fiere e dai mercati, dalla quantità annua dei terreni dissodati o migliorati, dai mezzi d' istruzione agraria, come sono le scuole o gl' istituti, le associazioni, gli scritti ed i giornali d'agricoltura. Così la industria *manifattrice* che cape in sè tutte le arti e tutti i mestieri, verrà desunta dall'esatta numerazione di questi e della popolazione che vi s'impiega e dallo stato della sua istruzione tecnica, dalla quantità delle fabbriche, dei magazzini e dei negozii, dalla somma delle materie prime nazionali o forestiere che vi si consumano, dal numero delle macchine che vi si adoperano, dall'annuo prodotto ch'esce da ciascheduna fabbrica, dal prezzo delle nostre merci e dall' annua consumazione loro sì allo interno che all' esterno. La industria *commerciale* del Veneto è terrestre e marittima, ed abbraccia le singole specie di commercio interno ed esterno, proprio o di commissione, d'importazione e di esportazione, ovvero di semplice transito. A rappresentarla pertanto statisticamente dovrassi considerare in primo luogo il numero e la qualità de' commercianti e de' banchieri, delle case di commercio, delle banche e delle associazioni mercantili, la qualità de' canali e de' fiumi navigabili e delle strade commerciali, il giro delle cambiali e della

borsa, la qualità del numerario e del credito, le varie sorta di pesi e di misure, la qualità e la quantità delle importazioni e delle esportazioni e delle merci di circolazione o di semplice transito; in secondo luogo il porto franco, il movimento mensile od annuale delle navi e dei legni mercantili sì nazionali che forestieri, i Consolati delle altre nazioni, i mercati e i prezzi per le nostre merci, gl' introiti delle dogane, e per ultimo la varia specie di tribunali commerciali, il numero delle cause e degli atti esecutivi in oggetti commerciali, il numero de' fallimenti, la qualità del prodotto totale della industria mercantile o commerciale. Finalmente posto che la industria *intellettuale* contiene tutti i prodotti della mente o dell' ingegno nelle scienze, nelle lettere e nelle arti belle, verrà anch'essa indicata dal numero dei dotti, dei laureati od esercenti le professioni liberali e degli artisti, dalla quantità delle accademie, delle biblioteche, delle tipografie e dei librai, dal numero e dalla qualità delle opere sì originali che tradotte e dei lavori artistici che annualmente si stampano o si pubblicano o s'introducono nel nostro stato, dalla quantità della produzione intellettuale e dell'annuo suo consumo tanto internamente quanto esternamente. Ecco i principii co' quali dovrebbesi mettere in punto la statistica civile del Veneto, la quale comunque ristretta ai tre oggetti della *popolazione*, della *moralità* e della *industria* riuscirebbe nondimeno così esatta e conclusiva da stare da sè, e da poter essere integrata od ampliata quando che sia colle altre le quali più specialmente si riferiscono alla condizione fisica ed amministrativa di queste Provincie. Ora a compimento del mio assunto m'è d'uopo discorrere intorno alle sue *fonti*, al suo *metodo* e alla sua *revisione* o *correzione*.

§ **24**. Le fonti della statistica civile per il Veneto sono tutte le persone e tutti i luoghi ai quali si possono attingere sicure notizie circa a' suoi oggetti. Esse perciò altre sono *pubbliche* ed altre *private;* e sebbene quelle tengansi in maggior conto di queste, ciò non ostante per servire all' uopo debbono essere tutte veraci, esatte e precise. Quindi se è ricevuta la massima che debbasi prescegliere le fonti pubbliche alle private, tuttavolta che siano quelle nè inaccessibili, nè difettive; sta pure la norma in contrario di appigliarsi alle private,

allorchè queste sieno più sincere e meno difficili a rinvenirsi delle altre. Saranno pertanto fonti statistiche per la popolazione in generale del Veneto le anagrafi delle congregazioni municipali, i libri parrocchiali delle anime e le statistiche già pubblicate; e per la qualità o condizione della popolazione in particolare, i libri o registri di battesimo e delle case degli esposti per i legittimi e per gl'illegittimi, i libri censuarii per i possidenti, e quelli delle camere di commercio per i negozianti, i ruoli della tassa per arti e per commercio per gli artigiani e bottegai, e del testatico per i semplici contadini, i cataloghi dell'araldica per la nobiltà, i prospetti e gli almanacchi del governo e della contabilità per il numero degli impiegati, i registri di coscrizione e del comando militare per i soldati, quelli delle curie e delle corporazioni religiose per il clero, delle case di ricovero e d'industria e degli altri Istituti pii per il numero de' poveri, e finalmente quelli delle carceri e dei tribunali per i carcerati e per i delinquenti.

§ 25. Quanto alle fonti statistiche per la moralità nel Veneto si avrà ricorso alle tavole nosologiche e mortuarie degli ospitali, alle fedi mortuarie de' parrochi, ai registri dei dazii e dei consumi e delle licenze per questi, ai prospetti annui de' tribunali sì civili che criminali intorno al numero delle cause e dei processi pendenti o terminati, ai libri del governo e della polizia sulle associazioni o società, sulla istruzione, sul culto e sulla beneficenza, alle informazioni private e alle visite sul luogo per affigurare sì le abitudini o le costumanze nel lavoro, nella civiltà e nell'educazione, come le tendenze morali e religiose ed i costumi dell'individuo, delle famiglie e delle classi. In fine per l'industria si consulteranno i registri doganali e quelli del porto e della sanità marittima, i libri delle camere di commercio e della borsa, dei negozianti e dei possidenti, congiungendo sempre colle notizie loro quelle che ci possono venire d'altronde, cioè dalle visite in luogo e dalle private informazioni. Egli è col sussidio di queste fonti ora pubbliche ed ora private che la nostra statistica potrà giungere a grado non ordinario di perfezione.

§ 26. Se non che ad ordinarla ne' suoi oggetti e a far buon uso delle sue fonti richiedesi una norma od una regola che debba dirigerne

e modellarne la compilazione. Questa norma o regola è quella che costituisce il *metodo*. E qui per metodo della nostra statistica civile non intendesi già quel modo di sua esteriore esposizione per il quale, al dire degli scrittori di statistica, essa può riuscire *tabellaria* o *descrittiva*, oppure *prammatica* o *razionale*, ma bensì quella via o quel procedimento ch'è da seguirsi nel compiere a mano a mano il suo lavoro. Tale via o tale metodo è per me dapprima *parziale* od *analitico*, e poscia *generale* o *sintetico*. Sarà analitico o parziale nel senso che dovransi pigliare le mosse da una statistica primamente speciale d'ogni Provincia Veneta. Sarà sintetico o generale nel senso che su queste singole o speciali statistiche del Veneto dovrà costruirsi indi la generale o comune, la quale riesca il compendio o sunto fedele delle statistiche speciali o parziali. Che questo sia il metodo più avvisato e da preferirsi per la nostra statistica, io ne sono sicuro, e perchè una statistica di tratto generale non può discendere a quelle particolarità che pur si ricercano a renderla esatta e fedele, e perchè una statistica soltanto parziale a forza di amminutare e di affettare, sperpera alla fine e disgrega le membra dello stato, facendone perdere di veduta quella unità o individualità politica o civile che agogna di figurare e di descrivere. Siccome però tale unità o individualità non può apparire nemmeno in una statistica generale, se non quando in essa accanto del simile trovasi eziandio il diverso in riguardo a tutti quegli oggetti od elementi che costituiscono quello stato medesimo; così al metodo analitico e sintetico per la statistica del Veneto sarà buono di associare eziandio il *comparativo*, dal quale si darà rilievo sì alle somiglianze come alle differenze. Che se il fin qui detto sul metodo risguarda propriamente la compilazione successiva, articolata od analitica della nostra statistica innanzi di farsi generale o sintetica, non viene perciò ad escludere in ordine alla sua esposizione il metodo tabellario o descrittivo, tanto commendevole per la sua brevità e concisione, quanto è suasivo, dove il suo conoscere non è che un semplice intuito. Talchè in simile esposizione dovrà farsi procaccio non che di modi succinti e di corte parole, ma di tabelle e di cifre, tuttavolta che la natura dell'oggetto il comporti.

§ 27. Aggiustato anche il metodo della statistica civile per il Veneto, non rimane più a dire che alcuna cosa intorno alla sua revisione o correzione. Fu già toccato di questa revisione o correzione, ed essa è un rimedio così necessario da non venirne più in parola. Tale rimedio però, ch'è la naturale conseguenza della mutabilità de' dati od oggetti statistici, non sortirà mai il desiderato suo fine, se non quando venga insegnato con regole savie ed opportune. Sarà pertanto prima regola quella di rendere periodica una tale revisione o correzione, vale a dire di commisurarla a quel numero d'anni dentro il quale si fanno consueti o più probabili i maggiori cangiamenti. La seconda sarà quella di ristacciare e rifrustare di spesso i dati statistici reali ponendoli a riscontro coi già registrati per vedere quanto s'accordino; e dove ci sia divario, si darà mano ben tosto alla correzione per levarnelo. La terza ed ultima sarà quella di portare questa correzione sugli oggetti essenzialmente e realmente immutati, non lasciandoci imporre dalla sola apparenza delle vicissitudini o dalla loro naturale succedevolezza.

§ 28. Ma fino a questo punto il mio divisamento della statistica civile per il Veneto ad onta de' suoi principii, delle sue fonti e del suo metodo non è che una idea, la quale è tanto lontana dalla realtà, quanto il desiderio dal fatto di vederla effettuata. Egli è appunto di questa realtà o della sua *esecuzione* che mi fo a ragionare a compimento della mia Memoria, e siccome della sua parte più concludente e più fruttevole. La realtà o la esecuzione della statistica civile per il Veneto è assicurata a parer mio in tre modi, e dalla sua importanza, e dal suo difetto, e dai mezzi proporzionevoli ad eseguirla. Quanto ai due primi ne dissi tanto che basta da non doverli più ribadire. Mi fermerò adunque sul terzo siccome quello che più fa al mio proposito.

§ 29. I mezzi indispensabili all'effettuazione di tale statistica debbono concorrere primamente alla fondata conoscenza e alla diligente raccolta di tutti i suoi dati od oggetti, e poscia alla distribuzione ed applicazione loro alle Provincie nostre, e perciò stanno in mano parte dell'Istituto e parte del Governo. I primi consistono nella intelligenza

e nell' attività de' Membri di quello, ed i secondi nella cooperazione di questo ad un lavoro che se è di comune vantaggio non può stimarsi indifferente nemmeno all'Amministrazione pubblica. Lo attuare e gli uni e gli altri non deve tenersi per gran malagevolezza. Una volta che l' Istituto entri in persuasione, se non della urgenza, della utilità di cotesta statistica civile, noi tutti saremo presti a secondarlo. D' altra parte a simile persuasione non lusinga, ma dà fiducia la idea di un lavoro nuovo per la scienza pratica del paese, e non alieno dal bene pubblico. Io non so se nella pochezza della mia mente abbia saputo ritrarvi, o Colleghi, tutto intero il mio progetto statistico e quale stassi dinanzi alla mia mente aperto e luminosissimo; ma questo io so bene ch' esso alla nostra missione è conveniente e da dare nel segno. Della cooperazione del Governo poi dobbiamo stare in fidanza grandissima, e perchè l' Istituto come suo organo può invocarla, e perchè non si avrà ricorso a' pubblici uffizii se non per quelle fonti o notizie statistiche che stanno aperte eziandio al privato, e perchè se il Governo ci stimola a fare, non può che tenersi pago e contento di quell' operato, di che egli stesso è sì tenero e sollecitoso. Tutto adunque ci rassicura de' mezzi adatti a questa statistica, i quali è qui mio obbligo di specificare e particolareggiare più segnatamente.

§ 30. I mezzi che ci si parano dinanzi, e che io credo opportunissimi alla compilazione d'una statistica civile per il Veneto, per me si ristringono ai seguenti: 1. alla *nomina* d' una Commissione di statistica civile per il Veneto presso l' Istituto; 2. alla *partecipazione* al Governo di questa Commissione e del suo piano o progetto; 3. alla *formazione* preventiva d'una statistica parziale o di una Provincia che serva di modello od esemplare alle altre [1]; 4. alla contemporanea *esecuzione* di tutte le restanti statistiche speciali di ogni Provincia dietro l'esempio o il modello della prima; 5. alla compilazione di una statistica civile generale del Veneto sui risultamenti delle speciali; 6. alla *pubblicazione* sì dell'una che delle altre; 7. alla *revisione* o correzione

(1) Vedi il Quadro sinottico alla fine.

periodica di tutte. Pochi riflessi sopra ognuno di questi mezzi basteranno a convincere della loro convenevolezza. La nomina della Commissione presso l'Istituto è richiesta dai regolamenti o statuti interni tuttavolta che si tratti d'uno speciale lavoro da prepararsi. Una Commissione di statistica voi l'avete già; e a questo primo mezzo verrà soddisfatto col delegare od aggiungervi altri membri in guisa che se ne possano trascerre tanti per la statistica civile, quanti bastino all'uopo delle Provincie Venete, affidando a ciascuno di essi la statistica di quella Provincia che meglio conosca, e per la quale possa meglio prestarsi alle indagini e alle visite in luogo. Tale Commissione per la statistica civile, invece di trienne, dev'essere permanente, perchè alcuni dati della statistica massimamente civile varieggiano quale ad un tratto e quale ad un altro, e perciò sarà ricorrente il bisogno di rivederla e di correggerla. La partecipazione al Governo, oltrechè doverosa, parmi provvidente e per averlo a proteggitore del lavoro, e per tesoreggiare di fonti statistiche autentiche o pubbliche, e per proseguirlo con più di rapidità e di perseveranza. Innanzi di metterci all'atto pratico d'una opera estesa, faticosa e tale da non rinvogliare, la prudenza consiglia a prefigurarne il modello. D'altronde la opera stessa non verrà a buon termine che quando siavi unità d'intendimenti e di vedute, analogie di principii, cospirazione di forze e identità di metodo e di processo. Egli è perciò indispensabile che dietro il programma e le istruzioni da emanarsi dalla Commissione si anteponga la compilazione della statistica speciale d'una sola Provincia; e dove questa venga approvata dall'Istituto, si avrà una norma per farle tutte sopra un solo modulo. Fatto questo può intraprendersi contemporaneamente la compilazione delle sette statistiche speciali, onde preparare con esse il materiale alla statistica generale o definitiva del Veneto. Tale contemporanea compilazione sarebbe possibile ed utile, e perchè il lavoro viene ad essere diviso, e perchè così progredirà l'opera con assai più di alacrità e di prestezza. Siccome poi il lavoro dev'essere uniforme, così oltre di corredarlo del tipo o modello della prima statistica già approvata, dovrà accompagnarsi di quelle *istruzioni* pratiche che la Commissione amerà di stabilire al suo più perfetto e più

agevole eseguimento. Compiute ed approvate dalla Commissione e dall' Istituto le otto statistiche speciali si verrà alla compilazione della generale ed alla pubblicazione di tutte; ed allora il nostro corpo scientifico potrà aver fatto servigio al pubblico ed ai privati. Se non che tale statistica civile per il Veneto comunque esatta e fedelissima nella sua prima compilazione, non potrà restare a lungo inalterata per la mutabilità de' suoi elementi. Allora si dovrà dar mano alla sua periodica revisione o correzione; e questo è l' ultimo mezzo non che alla momentanea utilità, ma alla conservazione perenne del nostro lavoro. Tale revisione o correzione potrebbe usarsi ad ogni quinquennio, essendo inverisimile che i dati più variabili cangino più presto. ed avendosi in cinque anni tutto l' agio di razzolare fra que' nuovi oggetti che valgano a rettificarla.

Eccovi, o Colleghi, una mia idea gittata là sulla carta a progetto di cosa non disutile, nè d' inonoranza per il nostro Istituto. Sta ora alla sapienza vostra di non darvi peso, o di recarla ad effetto.

(*Letta li* 30 *Gennaio* 1847.)

# MODELLO

## PER LA STATISTICA DELLE PROVINCIE VENETE

### I. POPOLAZIONE

1. Numero degli abitanti o popolazione totale.
2. Rapporto della popolazione totale
   - *a*) colle nascite
   - *b*) coi matrimonii
   - *c*) colle morti
   - *d*) colla estensione o superficie del territorio
3. Popolazione in classi
   - *a*) per la nazionalità
   - *b*) per la età
   - *c*) per il sesso
   - *d*) per la legittimità o per la illegittimità
   - *e*) per la religione
   - *f*) per la condizione economica e politica
     - nobili
     - non nobili
     - ecclesiastici
     - militari
     - laici
     - impiegati
     - agricoltori: possidenti; fittaiuoli; lavoratori
     - commercianti
     - industriosi
     - dotti: laureati; e non laureati
     - letterati: laureati; e non laureati
     - artisti
4. Rapporti numerici tra le stesse classi e tra ogni classe e la popolazione.

## II. MORALITÀ

### 1. Abitudini

*a*) vitto, vestito ed alloggio

*b*) divertimenti e spettacoli { fiere, feste, teatri

*c*) civiltà

*d*) sociabilità o associazioni { di piacere { accademie o società, conversazioni } ; d'istruzione { gabinetti di lettura } ; d'interesse o d'industria ; di beneficenza } *NB.* Industria e Beneficenza

*e*) attività ed operosità

*f*) temperanza o sobrietà

*g*) costumatezza

*h*) economia.

### 2. Carattere

*a*) grave o leggiero — nel pensare

*b*) vivace od ottuso — nel sentire

*c*) forte o debole, fermo o mobile — nel volere

*d*) buono o cattivo — nell'operare.

### 3. Religiosità

*a*) chiese { parrocchiali, sussidiarie, private od oratorii } numero totale in ragione della popolazione

*b*) clero

*c*) credenze e pratiche religiose

*d*) fondo di religione { beneficii, decime, prebende, assegni o pensioni dello stato.

### 4. Educazione

*a*) scuole { pubbliche e private } { elementari, ginnasiali, tecniche, di liceo, di università

*b*) collegii o case di educazione { civile { maschile / femminile; ecclesiastica { seminarii; militare { collegii { di marina / de' cadetti

*c*) asili di carità { maschili / femminili } in città e campagna

*d*) professori e maestri

*e*) balie o nutrici

*f*) pedagoghi o educatori di famiglia

*g*) studenti { pubblici / privati

*h*) metodi di educazione { fisica / intellettuale / morale

## 5. Giustizia

Civile { *a*) tribunali e preture; *b*) avvocati; *c*) cause civili tra parenti ed estranei { transatte o conciliate alla pretura; decise in { prima istanza / appello / revisione; di poco o di molto valore

Criminale { *a*) processi { di condanna / di assoluzione / di sospensione per difetto di prove legali; *b*) delitti; *c*) gravi trasgressioni di polizia; *d*) Inquisiti per { età / sesso / nazionalità / condizione / recidività; *e*) condannati { idem { rei / recidivi / incorreggibili; *f*) Carceri { d'inquisizione o d'arresto / di correzione / di forza

## 6. Beneficenza

*a*) istituti di carità
- numero
- qualità
  - privati
  - comunali
  - pubblici o per associazione
- denominazione
  - luoghi pii, ospitali,
  - monti di pietà, casse di risparmio,
  - case di ricovero e d'industria

*b*) locali

*c*) impiegati

*d*) fondo o rendita

*e*) annuo movimento de' poveri
- validi
- invalidi
- vergognosi

*f*) soccorsi e loro specie
- in danaro
- o in natura col lavoro
  - a domicilio
  - o negli Istituti pii

*g*) spesa o costo di ciascheduno istituto e dell'individuo

# III. INDUSTRIA

## 1. Agraria

*a*) estensione e qualità del territorio { coltivo / non coltivo

*b*) quantità di acque { irrigue / e non irrigue { private / o in comune { consorzii

*c*) istruzione agraria { scuole / libri / giornali

*d*) capitale agrario { privato / o per associazione { associazioni agrarie { fabbricati / attrezzi rurali / sementi / bestiame

*e*) sistema di coltura { per economia / per mezzadria / per affitto

*f*) ruota agraria

*g*) lavoro o salarii

*h*) prodotti { grani / foraggi / legna / animali ec.

*i*) prezzo medio dei generi

*k*) mercati, fiere, strade { comunali / o provinciali

*l*) prodotto brutto totale nel vario sistema di coltura

*m*) imposta fondiaria o diretta

*n*) prodotto netto in ciaschedun sistema di coltura

## 2. Manifattrice

*a*) arti e mestieri, loro numero e specie

*b*) fabbriche, officine e magazzeni

*c*) quantità dei { fabbricatori / sopraintendenti / operai { soli / o per associazione { associazioni industriali

*d*) istruzione tecnica { scuole / giornali / regolamenti o leggi

*e*) macchine { qualità / quantità

*f*) capitale in { materie prime / danaro / salarii

*g*) prodotti { greggi o brutti / manifatturati / nazionali / esteri } { specie / costo { prezzo venale / o del mercato }

*h*) consumazione delle merci o prodotti { nazionali / esteri }

## 3. Commerciale

*a*) commercio { interno / esterno / terrestre / marittimo } { d'importazione o esportazione / di transito { proprio / o di commissione }

*b*) Case di commercio, Camere di Commercio, Borsa, Porto-franco. Banche, Consolati esteri.

*c*) numero dei { negozianti / banchieri / mercanti e merciaiuoli / sensali di commercio e di cambio / assicuratori } { soli / o in associazione { Associazioni mercantili e di assicurazione }

*d*) strade commerciali, navigazione fluviatile e marittima, mercati, piazze e fiere. — tribunali mercantili.

*e*) prodotti o derrate per ogni specie di commercio { nazionali / estere / permesse / proibite }

*f*) dogane e loro { sito / qualità / quantità e prodotto dei dazii }

*g*) monete, pesi e misure { specie / qualità / quantità del numero }

*h*) cambio per { cambiali / o di moneta con moneta / o con carte } corso medio del cambio

*i*) credito { pubblico { consolidato / effetti pubblici { nazionali / esteri } } / privato { effetti privati } }

*k*) quantità o somma del capitale in commercio

*l*) numero delle cause e de' fallimenti in commercio

## 4. Intellettuale

*a*) numero dei laureati, dei dotti e degli artisti

*b*) Accademie, Atenei, Istituto, Biblioteche, Tipografie, Librerie

*c*) opere { originali / tradotte } { prezzo totale }

*d*) lavori artistici { qualità / quantità } { prezzo totale }

*e*) prodotto o rendita { nelle scienze / nelle professioni liberali / nelle arti }

*f*) consumo annuo della produzione intellettuale { nazionale / estera }

## 5. Valore o capitale dell'industria totale nel Veneto

*a*) Agraria . . . . . »

*b*) Manifattrice . . . . . »

*c*) Commerciale . . . . . »

*d*) Intellettuale . . . . . »

Somma totale »

Consumazione »

Differenza »

*e*) Rapporto tra il capitale della produzione e la popolazione nel Veneto

*f*) Rapporto tra la produzione e la consumazione

# SULL' ESISTENZA

# DELL' ORGANO DEL GUSTO

## IN ALCUNE SPECIE DI CANI MARINI

## OSSERVAZIONI ANATOMICHE

DEL DOTT. GIO. DOMENICO NARDO

L'organo del gusto ne' Pesci è ancora assai poco conosciuto, e pochissime sono le specie nelle quali si possa per esso ammettere con qualche verosimiglianza particolari apparati. La cavità orale di questi animali vien riguardata piuttosto esclusivamente come organo d'ingestione spettante nel tempo medesimo all' apparecchio respiratorio. La loro lingua, tranne poche eccezioni, non ha muscoli proprii per godere speciale mobilità; in qualche specie è molto sviluppata e perfino fornita di frenulo; in altra invece può dirsi appena rudimentaria; di rado mostrasi coperta di molle tessuto papilloso, ma più sovente trovasi fornita di asperità destinate a trattenere la preda, le quali impedendo il contatto, non permettono che abbia essa a considerarsi come organo gustatorio.

Non masticando i Pesci, generalmente parlando, la loro preda, non abbisognano d' un organo gustativo mobile in tutte le guise come la

lingua, che secondi il moto masticatorio e si presti ad assaporare le parti disciolte dalla masticazione. Sembra adunque che se v'ha nei Pesci un organo speciale del gusto, sia questo collocato in parti differenti della bocca, ed in relazione alla forma di essa, al modo d'ingestione del cibo, ed al tempo che mantiensi nelle fauci onde subire la prima digestione.

Organo destinato alla gustazione credesi il rigonfiamento molle e vascolare che rinviensi ai due lati dell'esofago nel *Gadus Aeglephinus* osservato da Treviranus; come pure l'apparato bianco spongioso, suscettibile di entrare con facilità in turgescenza, che trovasi all'entrata della gola di alcuni Ciprini e specialmente del Carpione. Tale apparato ben provveduto di nervi, derivanti specialmente dall'ottavo paio e dal nervo che tiene luogo di glosso faringeo, corrisponde presso a poco ai denti faringei destinati in questa specie a macinare la preda onde subisca i primi gradi di digestione.

In alcuni Pesci, ne'quali le labbra sono molto sviluppate e di particolare conformazione, osservansi papille più o meno grosse e salienti che sembrerebbero destinate ad una specie di tatto e di gustazione. Al medesimo uffizio pare che serva eziandio quella specie di cercine situata davanti il primo pezzo dell'ossojoide nella Chimera..... la cui membrana è molle; come pure sembra che all'uopo stesso si prestino le altre papille più evidenti ancora, poste dietro la placa dentale nella bocca della medesima.

Sono pochissime le specie di Pesci osservate finora collo scopo di trovare ciò che può sopperire in questi animali all'organo del gusto, e giova credere che estendendo le indagini si faranno scoperte maggiormente soddisfacenti di quelle che può ai dì nostri vantare la scienza.

Nessuno ch'io sappia parlò di un organo che trovasi nella bocca di alcune specie di Squalo e che sembra esso pure destinato alla gustazione. È questo situato nella parte inferiore del palato propriamente dietro la mandibola superiore, anzi pare avere origine comune colla porzione di cute palatina che la investe e che serve ai denti di sostegno in questa specie di animali. Consiste esso in una modi-

ficazione della cute stessa in sostanza fibroso-vascolare, polposa, molle, priva affatto delle scabrosità di cui vedesi rivestita la superficie cutanea del palato, e seminata invece di numerosissime papille molli aggrumate e di porosità trasudanti un umore mocioso. Si protrae questo apparecchio quasi per tutta l'estensione dell'arco mandibolare, e nella parte anteriore mostrasi largo più del doppio che ai lati, ove decresce gradatamente quanto più si avvicina agli angoli della bocca, ossia alle estremità articolari della mandibola. Forma esso in tal modo una specie di strato carnoso a due superficie, l'una esterna quale venne descritta, e l'altra interna rivestita di cute più somigliante a quella del palato.

Rappresenta a prima giunta una falda falcata, il cui bordo esterno aderisce all'interna curva dell'arco alveolare e l'interno guarda le fauci, assottigliandosi verso i suoi bordi in maniera che disteso sulla cute palatina sembra ad essa continuo.

Il tessuto intimo di quest'organo è molto particolare, per quanto potei accorgermi dai fatti esami, e merita studio ulteriore. Le sole specie nelle quali ebbi finora ad osservarlo sono lo *Squalus glaucus* Linn., l'*Oxyrrhina gomphodon* de' M. ed H., e l'*Alopias vulpes* Cuv.; altre ne sono affatto mancanti, come sarebbero il mio *Squalus plumbeus*, il *Mustellus plebejus* B., il *Galeus canis* R., l'*Acanthias vulgaris* C., la *Centrina Salviani* C., e molti altri. In un esemplare gigantesco dell'*Oxyrrhina gomphodon* pervenutomi due anni or sono, e che feci preparare pel mio Museo, vedesi un tal organo molto bene sviluppato ed in ottima conservazione. Nell'*Alopias vulpes* ha uno sviluppo minore, nello *Squalus glaucus* esiste non solo nella mandibola superiore ma ben anche nella inferiore, però di minore grandezza.

Sembra che anche il Rondelezio siasi accorto di un tale apparecchio, non pensando però all'uso al quale potesse servire. Descrivendo egli lo *Squalus glaucus* così si esprime: *In palato substantiam quamdam observatur fungosam et mollem digitisque cedentem, quae supernam internamque oris partem replet;* lo che non ripete descrivendo altre specie di Squali. Dopo Rondelezio nessuno fece cenno di aver osservata tale sostanza, anzi nessuno ch'io sappia riportò l'osserva-

zione di questo autore. Io soltanto nell' anno 1827 registrai nel mio Prodromo di Adriatica Ittiologia così importante carattere, avendolo riscontrato in più esemplari della specie citata, e lo presentai come una delle marche differenziali esistenti fra essa ed il mio *Squalus plumbeus* che trovasi affatto sprovveduto di tal nota caratteristica.

A quell' epoca però non pensava io stesso all' uffizio di siffatto apparecchio e sospettai che servir potesse alla gustazione, soltanto dopo averlo osservato nella specie di *Oxyrrhina* succitata ed in nuovi esemplari dello *Squalus glaucus* medesimo. L' osservazione anatomica dovea confermare tale sentenza. Conobbi infatti per essa che i nervi della lingua di quest' ultima specie di Squalo derivano dal quinto paio, giacchè il terzo ramo di esso rivolgentesi alla superficie interna della mascella inferiore, emette più ramoscelli in quest' organo, principalmente nel suo apice convergendo ad esso quelli di ciascun lato molto diramandosi nel loro decorso. Una gran parte poi degli stessi ramoscelli recasi nell' apparecchio spongioso della mascella inferiore anastomizzandosi coi ramoscelli del nervo del lato opposto. Molte diramazioni eziandio convergono nella sostanza alla quale son sovrapposti i denti, per cui può dirsi che un tal ramo corrisponde al linguale ed all' alveolare; dacchè i due nervi linguale ed alveolare non sono altrimenti divisi, ma quasi in un solo riuniti. Spettano pure alla lingua gli ultimi ramoscelli dei nervi branchiali, quelli specialmente rivolti alla base e ch' ebbero origine dal nervo vago. L' apparato spongioso molle della mascella superiore viene arricchito dai nervi del ramo secondo del trigemino. Un tal ramo corrisponde specialmente al palatino, e seguendo quasi il decorso dell' apparato medesimo si divide in ramoscelli anteriori, medii e posteriori.

Da tali osservazioni puossi concludere adunque essere gli apparati spongiosi sunnominati e la lingua stessa in questa specie di Squalo organi molto sensibili principalmente al gusto destinati, dappoichè i nervi che al movimento della lingua si prestano osservansi nascere dai branchiali, ed il motore accessorio del Willis suole sempre al vago mostrarsi unito.

Quanto esposi può riscontrarsi nella preparazione anatomica che

conservo nel mio Museo a disposizione di chi volesse osservarla, e che fu già da varii naturalisti esaminata; fra' quali mi è grato ricordare il diligente anatomico dott. H. Luschka del Gran Ducato di Baden che si compiacque ripetere in mia casa le medesime osservazioni sopra un grande esemplare pervenutomi della medesima specie, il celebre professore e consigliere Baer di Pietroburgo, ed il chiarissimo collega nostro professore Cortese.

(*Letta il* 23 *Marzo* 1846.)

# SOPRA

# DI UN GALLINSETTO

## DELLE FOGLIE DEL SALICE

# MEMORIA

DEL CO. NICOLÒ CONTARINI

Per soddisfare all' obbligo di Socio vi presento, eruditissimi Colleghi, questa mia breve Memoria, la quale servirà in pari tempo ad intrattenervi sopra un Insetto che guasta le foglie del Salice con le sue punture, per cui ne nascono delle Galle, maturate le quali anticipano le foglie la loro caduta, e che per ciò potrebbe in qualche modo considerarsi dannoso all'agricoltore.

Quest'Insetto che appartiene alla classe degli Imenotteri, venne dagli antichi naturalisti fatto conoscere sotto il nome vago di *Moscherino* o *di Mosca a quattro ali*. Gli entomologhi che lor succedettero lo collocarono fra le Tentredini, dandogli però un nome comune ad altre specie, e senza citare i lavori fatti su di esso dai valenti osservatori che li precedettero.

Ora lo scopo di questa mia Memoria si è quello di illustrare le osservazioni lasciateci dagli antichi sopra di esso, di rettificarne la sinonimia, e di precisarne il vero genere e la vera specie.

Me fortunato se nell' esporvi le mie idee appoggiate ad esatte e veritiere osservazioni, saprò farlo con quella chiarezza e verità che si convengono all' argomento e che tanto valgono a persuadere chi pazientemente mi ascolta.

Vallisnieri, Swammerdam, Réaumur, De Geer ec. si occuparono molto nell' osservare le Galle, e ne descrissero molte, e specialmente Réaumur e de Geer ci lasciarono delle bellissime osservazioni intorno ad esse.

I moderni naturalisti s'intrattennero piuttosto nella descrizione degl' Insetti che le producono, di quello sia intorno alla loro formazione.

Molto si scrisse sui mezzi che la natura impiegava per far nascere delle Galle così svariate e differenti le une dalle altre, sulla ferita fatta dall' Insetto sopra tale o tal parte di una pianta; ma il risultato delle esposte idee sopra tale oggetto non è sufficiente a soddisfare il genio del filosofo osservatore.

La causa della regolarità dell' accrescimento che prendono queste singolari produzioni ci è ancora ignota, e ci converrà senza dubbio ancor per lungo tempo confessare la nostra ignoranza sopra di essa.

Molti sono gl' Insetti che hanno ricevuto dalla natura la facoltà di produrre delle Galle con le loro punture; svariati e ingegnosissimi sono gli strumenti da essa loro accordati per tale oggetto, e dalla diversa costruzione loro risulta appunto l'immensa varietà che si osserva nelle Galle.

I Diplolepidi, le Cinipi, le Ibalie, i Figiti, i Nemati, alcune Tentredini e alcune Cecidomie nascono tutti dalle Galle da essi prodotte e queste sono vere Galle. Il *Diplolepis Rosae* fa nascere sugli steli della Rosa selvatica una Galla chiomata conosciuta sotto il nome di *Bedegner*.

Il *Diplolepis terminalis* produce sulle estremità dei rami della Quercia delle Galle fongose. Quella che punge i bottoni o gemme di essa dà origine ad una Galla fatta a foggia di carcioffo. Dalle punture di un' altra esce una Galla fatta a foggia di un grappolo di uva.

La Galla, della quale se ne fa commercio, è dovuta alla *Cynips Galla tinctoria*. Le Cecidomie dell' Iperico e del Ginepro producono delle

Galle semiaperte composte da due piccole fogliette concave che si combaciano tra loro.

Molte Tipule, molte Mosche, tutte le Psillidi e gli Afidi cagionano alle foglie di molte piante, specialmente a quelle della Quercia e dell'Olmo, delle mostruose ed enormi escrescenze conosciute anch'esse sotto il nome di Galle, e volgarmente sotto quello di *Groppole*.

I fiori delle Germandree si veggono alle volte mostruosamente gonfiati e tutti chiusi, nè acquistano più il colore e la forma degli altri, e queste loro mostruosità sono cagionate dalla *Acanthia clavicornis* di Fabricio.

Nelle piante Didinamie si osservano delle convessità analoghe, dovute senza dubbio ad Insetti che non sono stati finora osservati, nè studiati.

Si distinguono pure alle volte col nome di Galle delle altre escrescenze che si veggono sugli alberi, le quali non sono che semplici stravasi di succo, o piante parasite dei generi *Variolaria*, *Hypoxylon* ec., oppure prodotti di ferite, o di speciali malattie della stessa pianta.

Si veggono Galle svariatissime sulle foglie, sui pezioli, sui fiori, sui peduncoli, sulle gemme, sui rami, sugli steli ed anche sulle radici di alcune piante. Alcune affatto verdi, altre colorite di un bel rosso rassomiglianti a piccole ciliegie, altre sessili, altre peduncolate, ec.

Di queste, alcune non contengono che una sola nicchia entro alla quale vivono una o più larve; altre sono formate dalla riunione di molte nicchie tutte abitate dalla loro larva. Se ne veggono di globose liscie, di globose pelose, di scabre, di vellutate ec. Ve ne sono di vuote internamente, altre di dure e tutte legnose, di chiuse, di aperte ec.

Le larve che le abitano, giunte al loro perfetto accrescimento, per la maggior parte sortono da esse per andar a trasformarsi sotterra; altre invece rimangono nella stessa Galla e da esse escono poi Insetti alati.

È assai difficile però l'ottenerne gl'Insetti perfetti dalle loro larve, mentre la maggior parte di esse muoiono poco dopo che la Galla

fu separata dalla pianta e molte altre esigono per trasformarsi quel tal grado di umidità e di calore che difficilmente si possono loro procurare.

Tutte queste Galle, oltre l'insetto che le produce, somministrano spesso, a quelli che le conservano nei vasi chiusi per vederne la loro metamorfosi, degli Insetti affatto diversi, appartenenti ai generi *Ichneumon*, *Musca*, *Cynips* ec. Se ne trovano di quelle da cui sortono anche dei Coleotteri, degli Emitteri, e perfino dei Lepidotteri. Ma questi sono nemici intrusi che si nutrono a spese delle larve produttrici delle vere Galle, e che in nessun modo contribuirono alla loro formazione.

Molto potrei estendermi e sulla varia forma delle Galle, e sugli Insetti che veramente le fanno nascere, e sugl' inimici che s' introducono in esse per divorarne i legittimi abitatori; ma conosco che troppo lungo e noioso vi riuscirebbe il mio dire se di tutti volessi parlarvi. Perciò mi limiterò ad intrattenervi soltanto sopra un Gallinsetto delle foglie del Salcio, il quale abbenchè fosse noto agli antichi entomologhi, pure non ottenne ancora dai moderni un nome specifico che gli convenga.

Il nostro celebre Redi nella sua opera intorno alla *Generazione degli Insetti* stampata a Firenze nel 1674 fu il primo che facesse conoscere con la Tavola 31 di quell'opera le tuberosità o gonfietti che si veggono alle volte numerosissimi sopra le foglie del Salcio. Descrisse egli la forma e posizione di quelle Galle, vide e figurò il vermetto che vi abita, ed osservò di più che molte di quelle tuberosità erano forate, essendone fuggito il bruco: dal che prese speranza di vederne la trasformazione, ma invano; mentre quantunque egli avesse custodito diligentemente molte foglie cariche di pustole in apposite scatole, i bruchi non vollero mai uscirne, ma sempre dopo qualche giorno li trovava morti.

Per comprovar poi che egli fu il primo a parlarne, credo sufficiente il riportare le stesse di lui parole in fine di quell'articoletto che trovasi alla pag. 119 della succitata sua opera, ove parla delle suddette Galle. Egli dice: «Se voi foste curiosi di vedere la figura di

» queste tre piante, dei bruchi e delle loro nascenze, *delle quali non* » *è stata fatta mai menzione ch' io sappia dai semplicisti,* io ve le man- » do qui distintamente delineate, avvertendovi che la figura più piccola » del bruco è la sua naturale, e la maggiore è fatta secondo che fu » mostrata da un piccolo ed ordinario microscopio» .

Dalle figure suddette perciò non vi ha dubbio alcuno che le pustole e i bruchi che le rodono, rappresentati dal Redi, non siano le identiche di quelle da me osservate.

La priorità dell' osservazione di queste Galle è dunque dovuta al Redi, e lo confermano pure il Vallisnieri e lo Swammerdamm che ne citano le figure, abbenchè quelle del Redi appartengano ad un genere e specie diversa dalla loro. Il Vallisnieri ventidue anni dopo il Redi pubblicò delle belle ed esatte osservazioni da lui fatte sopra le Galle del Salcio. Si trovano esse inserite nel *Tomo I. della Galleria di Minerva* ovvero *Notizie Universali* stampato e Venezia nel 1696. Egli le espone per via di Dialoghi che introduce fra Plinio ed il glorioso italiano Malpighi, come egli lo chiama. Questi Dialoghi hanno per scopo di far conoscere alcuni errori pronunciati da Plinio intorno agl' Insetti, i quali egli poi fa che vengano rischiarati e corretti dal Malpighi. Pare che lo Swammerdamm ed il Réaumur abbiano copiato quanto scrisse prima di essi il Vallisnieri sopra tali Galle, mentre le loro osservazioni si uniformano a quelle del nostro celebre italiano. Egli chiama gl' Insetti perfetti che escono dalle Galle col nome di *Moscherini* e li descrive così:

«Sono lordi, poco agili, come incantati e muovono solamente con » somma prestezza le loro lunghe antenne. Queste sono nodose e nere, » piantate in un piccolo capo nero, con occhi grandi graticolati e due » tanagliette e molti peli al muso. Hanno quattro ali assai grandi di » sottile membrana e di color cangiante a guisa dell' iride, con una » macchia color di tabacco nel canto esterno delle superiori, quali sono » più lunghe del corpo, che in conseguenza tutto quanto ricoprono. I » piedi sono tinti di un giallo albiccio, moderatamente lunghi, peloset- » ti, e armati di doppio uncino. Il ventre è nero coronato di anelli, » quasi in forma di cono e pelosetto» . Egli vide pure sortire dalle

suddette Galle molti altri Insetti intrusi che aveano deposte in esse le loro uova acciò i loro bachi si pascessero dei legittimi loro abitatori, e annovera una violacea *Cantaridella,* un piccolo *Gorgoglione cinereo,* varie Mosche carnivore, dei Moscherini neri col corpo lungo di vespa con quattro alette diafane rivolte in alto, con gambe lunghe gialliccie. Degli altri simili ma con antenne più lunghe e pungiglione lungo e doppio nell' estremità del ventre, degli altri di color verde dorato col pungiglione triplicato oscuro. Altri più piccoli senza pungiglione, altri neri minutissimi ed appena visibili.

Al Réaumur erano note tanto le osservazioni del Redi, come pure quelle fatte dal Vallisnieri, e rapporto al primo egli dice, che abbenchè quest' osservatore si sia data molta cura per avere gl' Insetti nei quali si trasformano li falsi-bruchi delle Galle del Salcio, non si è potuto riuscire di vederne gl' Insetti perfetti, come non vi riuscì mai neppure lo stesso diligentissimo Réaumur, egli che avea consultate le osservazioni fatte dal Vallisnieri su questo Insetto, e che avrebbe potuto riuscire nell' intento seguendo le pratiche usate da quel diligente osservatore. Non manca però il Réaumur di attribuirgli le dovute lodi, dicendo: «Il Sig. Vallisnieri è stato più felice, perchè ha saputo » pensare a dei mezzi più sicuri di riuscirvi. Redi si era contentato » di rinchiudere quantità di Galle in uno stesso vaso; ed il sig. Vallisnieri » avendo studiato il genio dei loro abitatori giudicò che essi aveano bi- » sogno di sabbia, o di una terra umida sabbionosa per trasformarvisi. » Egli piantò verso la fine dell' autunno dei piccoli rami di Salcio, le di » cui foglie erano cariche di Galle, in una terra sabbionosa e umettata, » la quale copriva il fondo dei grandi vasi di vetro. Egli vide gl' In- » setti sortire dalle Galle, portarsi sopra questa terra ed internarvisi; » finalmente ciascuno si filò un piccolo bozzolo di seta di un color bruno » caffè, nel quale passò l' inverno, e da cui sortì alla metà di marzo » sotto la forma di una piccola Mosca a quattro ali, ed assai lorda e » goffa. Nel primo dei due Dialoghi che il Vallisnieri fece stampare nel » Giornale di Venezia intitolato *Galleria di Minerva* si può leggere una » storia completa delle nostre Galle del Salcio e dei loro vermi. Noi non » possiamo far a meno di aggiugner qui, continua il Réaumur, che li

» due Dialoghi da noi citati contengono un gran numero di fatti cu-
» riosi sopra gl' Insetti, e che tutti mostrano con quanta sagacità il
» sig. Vallisnieri sapesse vedere ciò che può scappare anche agli oc-
» chi più perspicaci, e come cercasse di vedere». Elogio ben meritatogli, e tanto più vero, in quanto che sorte dalla penna di un genio francese.

Lo Swammerdamm nel Tomo II. della sua *Biblia Naturae* consacra molte pagine nella descrizione di quest' Insetto e de' suoi costumi. Parla prima della storia dei vermetti che si trovano nei tubercoli delle foglie del Salcio, ne descrive le Galle, le uova, il verme o bruco, il di lui bozzolo, la ninfa, e la Mosca che ne sorte, accompagnando il tutto con figure. Queste figure però sono tali che non permettono di riconoscere qual sia l' Insetto che vuole rappresentare, e le descrizioni, siccome quelle degli osservatori del suo tempo, sono troppo vaghe ed incomplete per la determinazione della specie, ed anzi un puro azzardo se comportano quella del genere. Credo che questo sia il motivo per cui il di lui Insetto non venne citato da alcun naturalista a lui posteriore, e nè meno dai moderni. Ciò non ostante ben riflettendo e meditando le di lui descrizioni, si conosce che si occupa dello stesso Insetto che venne prima di lui descritto dal Vallisnieri e poscia dal Réaumur. Quello fece le sue osservazioni a Leyda, ed il sig. Réaumur in Amsterdam; ambedue le pubblicarono nello stesso anno 1738. Pare dunque che uno non sapesse dell' altro nel momento in cui si occupavano ambedue sopra lo stesso oggetto.

Tanto lo Swammerdamm che il Réaumur si accordano nel dire che le Galle del Salcio hanno una forma rotondato-ovale, un color verde più o meno carico nel loro primo sviluppo, e che indi prendono una tinta giallastro-ferruginea, poi rossastra, indi nera; che esse occupano tanto il di sopra come il di sotto della foglia; che si vedono delle foglie con una sola pustola, altre con due, tre ec. fino a dodici, e di differente grandezza secondo il loro sviluppo; che il loro interno è occupato per lo più da un solo bruco il quale porta venti piedi, col capo nero, di color verde biancastro nel primo nascere, e che in seguito si fa bianco; che più il bruco s' ingrandisce più si vanno as-

sottigliando le pareti della Galla dallo stesso corrose; che giunto il tempo della trasformazione egli fora la Galla, ne sorte e va sotterra a filarsi un bozzolo duro, ovato, di color caffè, o fosco purpureo; che dopo cinque o sei giorni si trasforma in ninfa, e dopo altri sei sortono delle Moschette a quattro ali.

Il Réaumur non riuscì di vederle sortire, e perciò non le descrive; ma lo Swammerdamm, che ne ottenne varie, le descrive così:

«Sul dinanzi del capo porta due cornetti neri posti avanti agli occhi. Il torace diviso con eleganza ha alle sue scapole attaccate quattro ali membranose, le inferiori delle quali vengono coperte dalle superiori, e tutte poi insieme coprono il corpo. Le ali superiori sono munite di areole polmonari, e verso la loro estremità portano due nere macchie. Sei piedi attaccati al di sotto del torace sono nerastri, e terminati da un'unghietta bifida. L'addome pur nero è diviso in anelli. Alcune di esse portavano una coda al di sopra, altre no. Quelle con la coda erano maschii, e quelle senza, femmine. L'ultimo anello addominale di esse era acuminato e un poco sporgente, il quale esaminato al microscopio facea vedere uno strumento simile ad una sega posto fra due lamine acute corneo-ossee, adattatissime a forare le foglie. Il di sotto del corpo della femmina verso il petto biancheggia, e li piedi rosseggiano».

Ambedue osservarono che quei bruchi che nascevano in primavera si trasformavano nell'estate, e quelli che venivano a nascere in stagione avanzata sortivano in Mosche passato l'inverno nell'anno seguente; e che trovavansi spesso in queste Galle degl'Insetti stranieri, introdottisi per mangiare i bruchi che le formavano.

Trovai io pure il 14 Maggio sull'argine della Valle del sig. Lattis in Altino, ora passata in altrui proprietà, ove si erano piantate delle migliaia di Salici della specie *Salix fragilis* Linn., una quantità immensa di queste Galle che invadevano quasi tutte le loro foglie. In seguito ne vidi spuntar a migliaia sopra le foglie di altro Salice della stessa specie che vegetava nel mio orticello a Venezia, per cui potei a mio bell'agio esaminarne le Galle e l'Insetto che le formava (Vedi *Tavola annessa, fig.* 1). Ora, per non ripetere quello che è già stato

detto dagli altri, io vi aggiugnerò diverse mie osservazioni onde render vieppiù completa la storia di quest'Insetto.

1. Osservai che le Galle crescono ed aumentano in breve tempo.

2. Che la gonfiezza è sempre più apparente, e più grande sulla pagina inferiore della foglia.

3. Che è sulla pagina inferiore che la femmina depone le uova forandone il suo parenchima.

4. Che non vi mette che un uovo, e assai di raro due in ogni foro.

5. Che una sola femmina ne depone più di trenta.

6. Che le Galle nell'esterno sono liscie, ora però solcate o impresse e come a più lobi, o a guisa di reni.

7. Che nel loro interno sono vuote, liscie, di un verde rossastro, e che le loro pareti sono grosse, floscie e succose.

Queste Galle, disse benissimo lo Swammerdamm, hanno sede fra le due epidermidi che rivestono le due pagine delle foglie, nè altro sono che una dilatazione più o meno grande della parte interna. Sono formate da una unione di vasi sottilissimi di essa, cresciuti insieme in una massa, per cui si rende quasi impossibile il levarle senza lacerare la foglia.

8. Osservai che nel suo interno vive un piccolo bruco appena visibile ad occhio nudo, di un bianco verdastro trasparente, o di un bianco di cera tirante un poco al giallastro, col capo castagno chiaro, o anche bruno, ed in alcuni nero lucidissimo secondo le età, munito di forti e dentate mandibole, alquanto peloso al capo e all'arco (fig. 2).

9. Che presso al capo ha sei piedi membranosi composti di cinque articoli rientranti uno nell'altro, i quali si possono a piacere del bruco allungare e accorciare secondo il bisogno.

10. Che rigorosamente parlando non ha altri piedi, ma vi si veggono da ciascun lato del corpo sotto i di lui anelli sette papille un poco più rilevate, composte dalla ripiegazione della stessa pelle, le quali possono bensì in qualche modo far l'uffizio di piedi, ma non si possono dir veri piedi. Infatti qual bisogno aveano essi di un maggior numero di piedi, dovendo vivere rinchiusi in una Galla ove si

trovano circondati in ogni parte dall' alimento? Questi bruchi hanno molta rassomiglianza con quelli della *Melolontha vulgaris* conosciuti sotto il nome di *Verme bianco*, e non ne differiscono che per la grandezza. Essi si allontanano dalla forma delle larve delle Tentredini finora conosciute, mentre in luogo di aver dieciotto, venti, o ventidue veri piedi, non hanno che li sei anteriori soltanto.

Latreille instituì il genere *Pamphilius* per collocare quelle Tentredini li di cui bruchi sono liscii, che hanno sei piedi soltanto, che portano all' estremità del corpo sopra l' arco due piccoli mammelloni o cornetti, e che vivono in numerose società entro a delle seriche tende che essi si filano involgendo in loro compagnia anche li rami della pianta di cui si cibano.

Il nostro bruco però non vi può appartenere, mentre manca dei due cornetti sopra l' arco; non vive in società, ma solitario; non si fila tende, ma se ne vive qual umile romito rinchiuso nella sua cella.

11. Osservai che egli se ne sta nella Galla per lo più rannicchiato e piegato ad arco, ed ora disteso lungo la sua cavità. I suoi escrementi vi restano dentro, e vanno riempiendo parte della cavità stessa, però va sempre più allargandosi di mano in mano che l' Insetto la rode.

12. Il corpo di questo bruco io lo trovai esser composto di tredici anelli o articoli, compresivi il capo e l' arco. Lo Swammerdamm però dice esserlo di quindici, ma si conosce aver egli sbagliato, mentre dice che i tre primi anelli dopo il capo portano le sei gambe anteriori, poi ne ammette due di apodi, indi sei di pedati, ai quali aggiungendovi il capo e l' ano formano appunto tredici articoli come io osservai.

13. L' ano era ingrossato ed allargato più del corpo, e terminava con una apertura tagliata trasversalmente come nei soliti bruchi.

14. Giunto all' ultimo suo accrescimento ed al punto di sortire dalla Galla per buco praticatosi, lo vidi essere lungo sei in sette millimetri, largo uno.

15. Osservai pure che non tutti i bruchi sortono dalla Galla per andar sotterra a filarsi il bozzolo, ma che alcuni vi restano in essa

ed ivi se lo filano, nè sortono da essa che nello stato d' Insetti perfetti.

16. Quelli che si fermano a trasformarsi nella stessa Galla in cui nacquero, hanno la previdenza di forarla prima con un foro rotondo, onde apparecchiarsi pronta la uscita; abbenchè allora le pareti della Galla si trovino essere sottilissime, perchè quasi tutte corrose dal bruco.

17. Altri si appiattavano fra le pieghe di una foglia, o fra le scabrosità ed i crepacci della corteccia del tronco dello stesso Salice, ed ivi terminavano la loro metamorfosi.

18. Il bruco subisce due mutamenti di pelle entro la Galla prima di far il bozzolo, vedendovisi le vuote spoglie; appena cangiato stassene fermo e come istupidito; il colore del suo corpo è quasi bianco trasparente, e quello del capo cinereo pallido con un piccolo puntino nero lucido da ciascun lato di esso; tali punti tengono il luogo degli occhi.

19. Il bozzolo è ovato bislungo, cilindrico, di color tannè o castagno rossiccio, rotondato nei due apici, lungo da cinque in sei millimetri, e largo appena due (Vedi fig. 3).

20. Egli è formato con una seta grossolana di colore rosso cupo brunastro, o rosso castagno vinato, ed è fortificato esteriormente da filamenti più grossi a guisa di piccoli cordoncini che qua e là lo coprono come una rara rete, e questi di color più cupo e quasi nero. Per lo che l'esterna superficie resta alquanto scabra, ma internamente è liscio. Questo bozzolo è duro, forte, elastico e resistente. Il suo tessuto è piuttosto flessibile, ma facile a spezzarsi, appunto come si vede nei bozzoli delle Tentredini, dei quali pure imita il colore. Egli però è tutto chiuso, nè ha le sue pareti traforate a maglia, come si vede in quelli. Questi bozzoletti a prima vista rassomigliano a tante puppe di piccole Mosche.

21. Osservai io pure che li bruchi, che nascono in primavera o alla metà di Aprile, sortono in Insetti perfetti dopo un mese e mezzo cioè alla fine di Maggio, e quelli che si sviluppano in Agosto e Settembre non sortono che dopo passato l'inverno verso i primi di Maggio.

22. Dopo dieci giorni che si trovano i bruchi nel loro bozzolo si trasformano in ninfa. Questa ninfa non è stata finora descritta da alcuno.

Essa è tutta gialla con gli occhi neri. Le antenne ed i piedi non sono rinchiusi sotto la pelle del corpo, ma si veggono liberi e staccati da esso. Si possono contare gli articoli delle antenne e quelli dei tarsi. Anche le ali sono staccate, ma però ingrossate e corte come monconi. La sua forma imita alquanto quella delle ninfe delle Cicadelle, larga all' innanzi, cuneata posteriormente, ed un po' gobba sul dorso. È lunga cinque millimetri, larga due (Vedi fig. 4).

23. Prima di trasformarsi in ninfa il bruco perde la facoltà di piegarsi in arco e se ne sta lungo e disteso.

24. Quattordici giorni dopo trasformato in ninfa sorte l' Insetto perfetto (fig. 5). Per uscire dal bozzolo egli corrode con la sua dentata mandibola una delle di lui estremità, senza però mantenere una certa regolarità nel foro praticato.

Molto ristrette ed imperfette mi sembrano essere le descrizioni datеci dell' Insetto perfetto così dal Vallisnieri, come dallo Swammerdamm. A quale specie sia da riferirsi la figura presentata dallo Swammerdam non si può ben determinare, stante la imperfezione del disegno; ma coll' aiuto della descrizione si riconosce appartenere ad una specie diversa dalla mia.

Linneo nella sua *Fauna Svecica* al n. 1568 descrive una specie di Tentredine col nome di *Tenthredo intercus* cioè *intercutanea*, la quale ha qualche analogia con questa. Diversifica però dall' aver le antenne quasi clavate, che nella mia sono filiformi, e per la mancanza delle due macchiette bianco-giallastre alla base dello scudetto.

Io ritengo perciò che quella specie descritta dal Vallisnieri, dallo Swammerdamm e dal Réaumur sia da riferirsi alla *Tenthredo intercus* Linn., la quale fu pure figurata dal De Geer nel Tomo II. alla Tav. 38 fig. 26—31.

La specie poi fatta conoscere dal Redi, e quella che descrive e figura il De Geer nel Tomo II. pag. 1009 alla Tav. 39 fig. 1—11 sono identiche alla mia. Il Villers nella sua Entomologia al n. 38 la

riporta col nome di *Tenthredo Salicis Pentandrae*, ricopiando quanto disse il De Geer; ed il Panzer nella sua *Fauna Germanica* la rappresenta nel fascicolo 90 alla fig. 10 col nome di *Tenthredo intercus*, la quale però è diversa dalla *intercus* di Linneo.

Essa non può rimaner più fra le Tentredini dopo il superbo e pazientissimo lavoro fatto dal Jurin sopra gli Imenotteri. Deve essa entrare nel suo Genere *Nematus*. Eccone i caratteri generici dalla configurazione delle cellette alari, come si vede nella fig. 6 della Tavola che vi presento.

» Cellula radialis una, magna, ovato-oblonga, antice acuminata, nec » apicem alae attingit. Cubitales quatuor: prima parva fere rotundata » sed potius quadrata, nervo albo diaphano, subtus clausa. Secunda » magna, oblongo flexuosa excipit duos nervos recurrentes. Tertia par- » va, quadrata, magnitudinis primae. Quarta magna, apice latior, et » apicem alae attingit ».

Ora vi aggiugnerò una più estesa ed esatta descrizione dell'Insetto perfetto. Il *Maschio*. È tutto nero con le antenne ed i piedi pur neri. Egli ha le antenne filiformi composte di nove articoli. I due primi della base sono più ingrossati e più corti degli altri; il primo specialmente è più grosso, ed il secondo è corto e quasi rotondo. Il terzo più lungo di tutti, e gli altri cilindrici, ma che vanno decrescendo in grossezza fino all'apice. Le ali opalizzanti con lo stigma nerastro.

La *Femmina* è nera. Ha le antenne nere filiformi con il primo articolo basilare più grande ovato-bislungo, strozzato all'apice, coi tre seguenti eguali fra loro e filiformi, due volte più lunghi degli altri. Sono di nove articoli, ma la strozzatura del primo finge un altro articolo, cosicchè si potrebbero credere di dieci. La loro lunghezza è eguale a quella dell'addome.

Essa ha il torace rotondato, impresso ed inciso ai lati nella sua parte anteriore. Lo scudetto è rotondato e prominente. Si osservano due piccole macchiette di un bianco giallastro alla di lui base.

L'addome è ovato-bislungo, sessile, acuminato all'apice, convesso al di sopra e composto di nove anelli, eccettuato l'aculeo. Lo spazio fra un anello e l'altro è giallo. Al di sotto è concavo, armato di un

corto stilo ossia oviscapo, canalicolato inferiormente, che contiene nella sua fessura una lamina bicipite acuminata, compressa e seghettata, col mezzo della quale l' Insetto incide la pagina inferiore delle foglie. La lunghezza dell' aculeo eguaglia quella del primo segmento dell' addome. Le ali sono grandi e brune; le superiori sono lunghe più dell' addome ed hanno sul margine esterno un punto o stigma piuttosto grande, nero; ma sul dinanzi è di un color giallastro-pallido. Le inferiori sono pur molto reticolate. Tutte poi riflettono un jalino iridato, e sono ramificate da forti e nere nervature.

I piedi sono giallastri. Si osserva una linea nera sulla parte superiore delle coscie, come pure sono nere le estremità delle tibie ed i tarsi che dividonsi in cinque articoli. L' Insetto è lungo dalla estremità delle antenne fino a quella dell' oviscapo sette millimetri; non comprese queste parti, è soltanto di quattro millimetri. Le ali ne contano cinque.

L' organo della femmina è protetto da un pezzo scaglioso fatto a guisa di grondaia, acuminato all' apice, che io distinguo col nome di oviscapo. Entro di questa grondaia stassene nicchiato un coltello o stilo giallastro di forma quasi triangolare, striato per traverso, seghettato e forato all' apice. Dal foro dell' apice sorte un piccolo tubetto cilindrico carnoso, che è l' ovidutto. La scaglia ossia l' oviscapo imita l' invernacolo di una gemma di pianta; essa è liscia e lucida. Quando la femmina vuol far agire il foratoio lo fa sortire dalla scaglia, come si vede nella fig. 7.

Rassomiglia appunto alla lamina pungente della lancetta che si tiene rinchiusa fra due valve ossee, e quando si vuol far agire, il chirurgo ne apre le valve e ne sorte la lancetta.

Il nome di *Tenthredo Salicis Pentandrae* dato dal De Geer a quell' Insetto non mi sembra convenirgli, mentre già vi sono altre due Tentredini che portano un nome consimile; come la *Tenthredo Salicis cinereae* del De Geer, e la *Tenthredo Salicis* di Linneo.

Così nemmeno quello di *Gallarum* se gli adatta bene, essendovi delle altre Tentredini e degli altri Nemati che hanno la proprietà di produrre delle Galle, ed avendo il Latreille distinto col nome di *Ten-*

*thredo Gallarum* un altro Nemato che si avvicina a questo, ma che vive in società entro a Galle dure e legnose. Perciò stimo e doveroso e conveniente dedicar questa specie all'illustre Italiano, al nostro celebre Redi che fu il primo a presentare il disegno delle Galle e del bruco di quest' Insetto, col chiamarla *Nematus Redii*.

La di lui sinonimia sarebbe questa:

Nematus Redii: Contarini

Tenthredo Salicis Pentandrae. De Geer. Tom. II pag. 1009. Tav. 39 fig. 1 ad 11.—Villers, Entomologia Tom. 3 pag. 113 n. 88.

—— intercus. Panzer. Faun. Germanica. Fasc. 90 fig. 10, non Linnaei.

Gonfietti delle foglie del Salcio. Redi, Generazione degli Insetti pag. 119 Tav. 31.

E per quella descritta dal Vallisnieri, dallo Swammerdamm e dal Réaumur sia da riferirsi invece la Sinonimia seguente:

Tenthredo intercus, Linn. Faun. Suec. n. 1568; non Panzeri.

Moscherini a quattro ali dei gonfietti delle Foglie del Salcio. Vallisnieri, Galleria di Minerva. Tom. I Venezia 1696, Dialogo primo, pag. 316 e seguenti.

Moschette nere a quattro ali dei tubercoli delle foglie del Salcio. Swammerdamm Biblia Naturae, Tom. II. 1738 pag. 725 e seguenti, Tav. 44 fig. 1 al 5.

Galle delle foglie del Salice. Réaumur, Mémoires. Tom. III. Part. II. 1738. Mémoir. deuxième, pag. 206 e seguenti, Tav. 37 fig. 1 al 5.

Or mi piace ripetere la descrizione dell' Insetto anche in latino. *Nematus Redii*, Cont.

Niger, maculis duabus albo flavescentibus ad basim scutelli. Pedes flavo-pallescentes. Mihi

*Mascul.* Niger antennis pedibusque nigris; antennis filiformibus novem articulatis, articulis duobus primis basilaribus incrassatis breviori-busque; articulus primus crassior, et secundus brevis fere rotundatus, tertius omnium longior; reliqui cylindrici in crassitudine decrescentes usque ad apicem. Alis hyalinis stigmate nigrescente.

*Foemina*. Nigra, antennis nigris filiformibus, articulo primo majore

ovato-oblongo, apice coarctato, tribus sequentibus aequalibus filiformibus, reliquos duplo superantibus. Hae antennae sunt novem articulatae, sed coarctatio articuli primi simulat alium articulum, ut videantur esse decem articulatae. Abdominis longitudinem aequant. Thorax rotundatus impressus, antice lateribus inciso, scutello rotundato prominulo. Observantur maculae duae albo-flavescentes parvae ad basim scutelli, ut in *Cynipe inanita,* Linn.; seu in *Chelono oculatori,* Sur.

Abdomen ovato-oblongum, sexile, apice acuminatum, supra convexum novem, articulatum, acumine excepto, margine intra articulos flavo; subtus concavum, stylo brevi, seu oviscapo inferius canaliculato munito, qui continet gladium bicipitem, acuminatum, compressum, seratum, cum quo Insectum incidit paginam inferiorem foliarum.

Longitudo aculei primum segmentum abdominis aequat. Aculeus absconditur in rima oviscapi.

Alae magnae, fuscae, superiores, abdominis longiores, in margine externo stygmate magno, nigro, antice pallido-flavo, notatae. Inferiores multum reticulatae. Omnes hyalino-iridatae, nervis validis nigris areolatae.

Pedes flavescentes, foemoribus supra linea nigra notatis, tibiarum apices nigri, reliquo flavescentes; tarsi nigri aut concolores quinque, articulati.

Longitudo Insecti ab extremitate antennarum usque ad illam oviscapi millimetra septem; exceptis antennis et oviscapo millimetra quatuor; alarum superiorum millimetra quinque».

Così d'ora in poi si potranno meglio distinguere queste due specie che venivano confuse una coll'altra; e così spero che queste mie osservazioni non riusciranno discare agli entomologhi.

Le foglie del Salice rigonfiate dalle Galle cadono molto più presto di quelle che rimasero illese. Se ne servono i pastori per pascere le loro pecore nell'inverno, e le conservano in buche profonde appositamente scavate nella terra, ove vi frammischiano delle vinaccie, delle foglie di viti e di ontano ec., al qual composto danno il nome di *graspere*. Ma al momento che ne fanno la loro raccolta, le foglie gallate sono già tutte cadute. Vi sono degli anni in cui sono così mol-

tiplicati questi Nemati, che non vi è foglia di Salice che ne vadi esente. Perciò in quegli anni ne è assai scarsa la raccolta per i pastori, specialmente in quei luoghi ove le viti sono poco coltivate per essere troppo bassi e palustri. Sarebbe dunque cosa utilissima levarne tutte le foglie gallate prima dell'uscita del baco ed abbruciarle. Il tempo opportuno sarebbe ai primi di Maggio ed ai primi di Agosto. Così si diminuirebbe di molto il danno che questi Insetti recano ai Salici ed alla pastorizia, e si allontanerebbe dal gregge qualche malattia che avrebbe forse avuto origine dal pascersi di foglie così gallate e mostruose.

E con ciò do fine al mio dire, ed alla noia che avranno forse in voi destata queste mie ciancie.

(*Letta il* 20 *Luglio* 1846).

Fig 2

Fig 3

Fig 4

Fig 5

Fig 6

Fig 7

Fig 1

INTORNO

# AL CALCOLO DELL' AZIONE DINAMICA

DEL

# VAPORE NELLA LOCOMOTIVA

## AVUTO RIGUARDO ALLE CIRCOSTANZE DELLA PRECESSIONE

## MEMORIA

DEL PROF. CARLO CONTI

Nello studio che ho fatto della locomotiva seguendo le dottrine del Pambour che vi consacrò intera opera, frutto di numerose ed esatte esperienze istituite per lunga dimora in Inghilterra, seguendo le ricerche di Pétiet e Flachat, le indagini di Clapeyron, di Bousson, i confronti de' varii sistemi di Mathias, parvemi di poter notare qualche cosa degna di nuovo commento, parvemi di poter dare a quell' insieme di verità un ordine che ne facilitasse l' acquisto, che mettesse in via di ulteriori indagini sopra alcuni punti di grave importanza. Ma di tutto questo non ho creduto fare esposizione nel libretto pubblicato, *Idea generale della Locomotiva esposta con metodo progressivo, Padova* 1846; il quale guardando scopo particolare di ridurre a popolare discorso l' organismo di quella macchina meravigliosa, non mi permetteva di ricorrere agli aiuti dell' algebrico linguaggio: ond' è

che toccate queste questioni per cenni affinchè chi vi mette attenzione vegga il molto sviluppo di che sono suscettibili, promisi di farne soggetto di scientifica e minuta dissertazione.

Per soddisfare a quest' assunto ho richiamato tutti i sussidii che possono occorrere sì delle matematiche anche superiori che della meccanica rigorosa, e mi pare, se l' amor proprio non m' inganna, di avere compiuto lavoro non indegno di vostra indulgenza. Al qual lavoro diedi mano più presto che mi fu concesso, desiderando di mostrare che nell' esame di quello stupendo motore non mi fermai a ciò che grossolanamente ho esposto nella mia operetta, ma che anzi mi sono impegnato a conoscere le circostanze più minute relative all' uso del vapore.

Sembrerà strano l' assunto di pubblicare lavoro sulla locomotiva qui fra noi, dove ancora è macchina straniera che solo si ammira nel rapido corso sulla poca strada che abbiamo, strano il pretendere che il mio lavoro sia degnato di attenzione là dove nacque, crebbe, si perfezionò quella macchina portento dell' umano ingegno; ma io spero che la modesta maniera con cui espongo le raccolte ricerche mi torrà la taccia di arroganza, che ognuno troverà quanto vi appartiene, e che questa Memoria mostrerà almeno che anche qui si studia e si approfitta di una scuola di cui altrove sono i maestri.

Nella locomotiva una parte che è tolta allo sguardo delle genti, perchè nascosta nell' interno dell' organismo, forma l' essenziale del suo movimento per cui produce tanti prodigiosi effetti. Il vapore ch' entra da una banda sforza l' embolo a muoversi per tutta la sua corsa onde avviene il giro di mezza ruota, poi fugge nell' aria, e nuovo vapore entra inversamente a ricondurre l' embolo a posto, con che si compie l' altro mezzo giro, indi si scarica anch' esso per dar luogo a giuoco eguale, che su d' una strada si ripete tante volte quante la lunghezza della via contiene quella della circonferenza della ruota motrice. L' alternata introduzione del vapore di dietro e dinanzi dell' embolo e lo scarico di quello che ha lavorato, per non farsi ostacolo e inciampo al-

l'incalzante, sono condizioni necessarie a produrre il desiderato corso della macchina.

Questo duplice effetto si ottiene mercè il movimento di va e vieni di un apparato che dai Francesi nominasi *cassettino* (tiroir), che io credetti di chiamare *cappello*. Nella grossa coperta del cilindro sono tre fori; i due laterali mettono per appositi canaletti nella cavità del cilindro, il medio corrisponde a cavità fatta nella copertura che non comunica col cilindro, che invece, per apposito canale, è in comunicazione coll'atmosfera. Quando il cappello è messo giustamente nel mezzo, copre colle sue ali le luci, colla sua cavità guarda la luce media. Vapore, benchè v'insista sopra, non può entrare nel cilindro essendo le luci chiuse dalle ali; vapore dal cilindro non può uscire, chè le medesime ali ne impediscono la fuga.

Portato a destra di tutta l'ala, entrerà vapore a sospingere l'embolo; dall'altra parte il vapore che aveva lavorato, distendendosi nella cavità del cappello e trovando il canale opportuno, si sfogherà nell'aria. Se la luce si apre e chiude per quel tempo che l'embolo impiega a fare la sua corsa, a percorrere la lunghezza del cilindro, il vapore affluisce per tutto quell'intervallo, e dalla banda opposta per la medesima durata continua a sfogarsi.

Questo è il giuoco più semplice del vapore, quello che prima si annunzia a far intendere il meccanismo della locomotiva. Ma da questa medesima descrizione si vedrà un effetto che forma uno de' punti principali della teorica di tal macchina. All'istante ch'entra vapore a lavorare da una banda, il cilindro è pieno del vapore che ha lavorato, vapore forte e possente. Questo vapore, per così dire licenziato dall'opera che ha compiuto, nello scappare s'affronta contro l'embolo e così contrasta al lavoro del compagno che affluisce. Questa forza contraria chiamasi *contropressione*.

Mettemmo il cappello giustamente nel mezzo; avanzandolo invece per qualche poco a destra, quando l'embolo è al fondo del cilindro. entrerà vapore prima e quindi opererà una spinta innanzi che l'embolo arrivi a suo posto. Questa è *controspinta*. Ma questa controspinta ha il vantaggio di smorzare affatto la velocità dell'embolo, e l'altro

più rilevante di allentare i pezzi che lavorano coll'embolo disponendoli a lavoro inverso che subito hanno da sostenere. Entrando vapore prima, si sfoga anche prima e quindi lo scarico diventa per qualche tempo a favore della macchina, appuntandosi il vapore propriamente contro l'embolo e sforzandolo nel senso che si deve muovere. Così per quella anticipazione di apertura della luce d'immissione, anticipazione che dicesi *precessione del cappello,* lo scarico del vapore si sparte in due epoche, di pressione per reazione come avviene nella eloipila e di contropressione.

Il movimento del cappello dipende da eccentrico calettato alla sala od asse delle ruote motrici. La manovella e l'eccentrico facendo il loro movimento giratorio, producono quello di va e vieni dell'embolo e del cappello; e nell'esercizio della macchina il vapore sospingendo l'embolo domina la manovella e le ruote e nel medesimo tempo per l'eccentrico si accomoda opportunamente il cappello alla voluta alternativa di afflusso e di scarico. Ad esprimere quelle diverse positure che periodicamente si ripetono per ogni giro di ruota giova spartire in quattro parti ogni movimento. Quello delle ruote della manovella ed eccentrico in quattro quadranti, quello dell'embolo e del cappello in quattro porzioni; e perchè la parola quadrante se conviene al moto circolare non s'adatta al rettilineo, ho usato della parola *fase,* e conto le fasi da una posizione normale. Così quella parola fase, che si trova già adoperata ma in maniera generale negli scrittori, mi frutta non solo brevità di linguaggio, ma ancora favorevole condizione a trattare algebricamente alcuni problemi di posizione di quei membri della locomotiva.

Facendosi più larghe le ali del cappello, tenendo la medesima apertura nelle luci, io chiamo orlo quel tanto di che avanza esteriormente ed interiormente sulla luce quando desso è giustamente nel mezzo. La grandezza degli orli, la quantità della precessione, mutano considerevolmente il giuoco del vapore, e perciò sorgono importantissime questioni per la parte meccanica, curiosi problemi per la condizione geometrica del movimento.

Quindi è che ho risoluto la questione generale di movimento onde

conoscere in ogni caso la posizione dell'embolo data che sia quella del cappello, e l'ho fatto con formule facili al calcolo. Non mi vanto certamente di grave difficoltà superata che quì non si presenta, ma credo che il semplice sistema di formule ordinatamente disposte sia da preferirsi al metodo grafico che si usa.

Ecco che, dati gli elementi di grandezza e di posizione del cappello quando l'embolo è in posizione fondamentale, la corsa di questo, e la lunghezza della biella, si può segnare per quanta parte di corsa sia l'embolo soggetto alla controspinta, alla spinta, alla espansione, allo scarico premente, alla contropressione, per quali siti e per quanto tocchi all'embolo comprimere vapore rimasto che, mentre è incalzato, per la grandezza dell'ali del cappello è impedito nell'uscita.

E poichè le formule si prestano a facili e sicure norme indico per quali movimenti e per quali misure si possono ricavare gli elementi fondamentali in macchina già costrutta. Del qual problema il Fauveau occupandosi con metodi grafici, diede regole lodate dal Combes. Pure io credo metodo migliore quello del calcolo, perchè le medesime formule possono avere importantissime valutazioni, cioè quella del limite di possibile errore, e perciò suggeriscono quelle misure che più favorevolmente conducono alla cercata determinazione.

Un altro vantaggio deriva dall'usare formule piuttosto che grafico andamento descrittivo ed è quello di calcolare facilmente le varie velocità che nel moto vario e rettilineo competono all'embolo ed al cappello, e perciò la durata in tempo di qualsiasi intervallo in cui si sparte la intera oscillazione o doppia corsa. Noterò ancora che in tutte queste ricerche di movimento geometrico calcolando, come tocca, l'influenza di ogni elemento, entra nelle algebriche espressioni la lunghezza della biella che domina l'embolo, ed in maniera da porgere differenze non trascurabili, confrontate col calcolo basato sull'ordinaria ipotesi di ritenere la biella parallela al gambo, ossia di trascurare le sue inclinazioni.

Venendo a dire dell'effetto dinamico del vapore, importantissima ricerca alla quale sono d'apparecchio le precedenti, dirò che nelle prime locomotive, facendosi le ali del cappello larghe quanto le luci, ed

adoperandosi il cappello senza precessione, grande era il consumo di combustibile. L'ingegnere francese Clapeyron sino dal Maggio 1842 trattò l'argomento importantissimo della influenza delle ali e della precessione. Di questo lavoro fu fatto rapporto all'Accademia di Francia nel Febbraio 1844. Dal rapporto risulta che di alcuni elementi tenne giusto conto, non di tutti. Dissi che ciò risulta dal rapporto, chè vi vorrà lungo tempo a leggere quella Memoria. Dietro quelle indagini potè quel distinto ingegnere, in macchina disposta secondo le sue vedute, ottenere un risparmio di combustibile che giunse al 50 per 100.

Del resto assai prima in Inghilterra, come si confessa nel nominato rapporto, s'era praticata quella utile disposizione, e noi stessi ne abbiamo prova sicura, mentre le macchine di Sharp e Roberts che corrono sulle nostre strade dal 1842 hanno cappelli con orli, e cappelli dotati di precessione. E se quelle macchine corsero nel 1842 furono costrutte molto tempo innanzi, ond'è che di molti mesi sono anteriori al lavoro del Clapeyron. Dico questo non per torre il merito a quel distinto ingegnere, anzi per mostrare che a far palesi alcuni miglioramenti industriali fa di mestieri che la discussione teorica e le pubblicazioni si uniscano alla pratica ricerca. Senza di quella manifestazione fatta colle stampe alcuni trovati ingegnosi trapassano innanzi silenziosi per tradizione con vantaggio limitato.

Seguirono altri lavori a quelli del Clapeyron, ed il Baude, il Bousson ed il Mathias trattarono più o meno completamente di siffatto soggetto. E nel trattato della locomotiva il Pambour vi consacrò intero capitolo; ma avendo toccato troppo leggermente l'importante questione, da questo canto rimase la sua dottrina imperfetta. Resterà anzi da spiegare come nelle formule finali che porge pel calcolo del movimento sulle strade ferrate sia ipotesi fondamentale la prima maniera di azione del vapore ed applichi quelle formule, come stanno, a locomotive che avevano precessione ed orli del cappello.

Ecco che sotto questo punto di vista potrebbe valere qualche cosa questo mio lavoro, spiegando formule che comprendono i casi generali di precessione e perciò applicabili alle locomotive quali sono nell'uso generale che vien fatto nelle strade ferrate.

Toccando de' diversi periodi in che si sparte una corsa, per quello di spinta abbiamo norme abbastanza sicure, per quello di scarico a contropressione norme pratiche dovute allo stesso Pambour. Su questo punto abbiamo anche un lavoro del dott. Colombani che tentò teoreticamente di determinare quella nociva influenza. Ma ancora siamo troppo addietro nelle dottrine del movimento del vapore da poter fidare in una soluzione. Credo che la regola del Pambour per ora sia da preferirsi.

Un periodo di grande influenza sopra cui si fonda una classificazione delle macchine a vapore è quello della espansione che i Francesi chiamano *détente*. Cessando l' afflusso del vapore, quello che sta entro il cilindro sforza l' embolo, e benchè col distendersi cali di forza, porge ancora effetto utile di spinta prima che si scarichi.

Al calcolo di questo effetto furono richiamate due leggi diverse, quella del Mariotte, l' altra dovuta al medesimo Pambour. Se quell' effetto avvenisse lentamente da permettere che la temperatura vi rimanesse la medesima, entrando nuovo calore, la prima legge sarebbe giusta. Se s' immagina rapidissimo quel mutamento di volume da rimanere entro la massa il medesimo calorico, secondo un certo principio di Watt, vale la seconda. Ora il rapido movimento della locomotiva ci obbliga di attenerci a quest' ultima legge. Nè so perchè il Mathias, il Bousson, che si riportano per molti punti alla dottrina del Pambour, abbandonino quella sua legge in tal caso; nè so perchè il Pambour avendo valutato il periodo di espansione nella teorica della macchina stazionaria, non l' adoperi nella locomotiva, in cui aveva pure avvertito quella maniera di azione derivante dagli orli del cappello e dalla precessione.

Simile osservazione può farsi e deve farsi pel periodo di chiusura o compressione, quando il vapore è incalzato dall' embolo e l' ala del cappello ne impedisce l' uscita. In quel rapidissimo movimento non può certamente applicarsi la legge di Mariotte, e merita che si vegga quanta ne sia la differenza seguendo la legge del Pambour. Così le formule sono derivate dal medesimo principio tanto raccomandato e giustamente da quel distinto esperimentatore che primo spiegò una minuta dottrina della macchina a vapore.

Quanto allo scarico premente, gravissime difficoltà si oppongono a tenerne giusto conto, e l'esperienze di Pétiet e Flachat non bastano certamente a somministrare regola sicura. Ecco un argomento degno di nuove ricerche teoriche ed esperimentali. Che da questo periodo dipenda grandemente il vantaggio nelle nuove macchine a precessione in confronto di quelle che avevano il giuoco semplice del vapore, lo si ricava dalle principali proprietà del vapore e dai calcoli istituiti dal Bousson stando ad alcune grossolane ipotesi. Ma è soggetto ancora pieno d'incertezze sulla giusta valutazione; tanto è vero questo, che il Mathias in una tabella di esempii calcolati per varie macchine, non mette cifra veruna, e sì che il suo lavoro vide la luce in Francia nel 1844.

Io sono ben lontano dal tentare lo sviluppo di quel complicato problema, tanto più che mi manca ogni mezzo per confrontare col fatto le teoriche deduzioni, di accomodare coll'esperimento un tentativo teorico. Mi limito adunque a raccorre qualche dato che possa fruttare una ragionevole congettura. Lo scarico a contropressione che contrasta col movimento dell'embolo si valuta dal Pambour con certa formula empirica che nell'ordinario andamento sta molto prossima ad un quarto di atmosfera. Quel quarto di atmosfera è un medio e non solo pel vapore che si scarica da un solo cilindro, ma un medio del vapore che successivamente arriva nel comune canale, nello scaricatore dei due cilindri. Si ha ben ragione di credere che l'impeto primo sia possente, fiacco l'ultimo, ed è il primo che in macchina ben disposta riesce di vantaggio, ed è l'ultimo che opera ostacolo. Quindi è che il dato del Pambour va discusso e rifatto ne' due periodi.

Anche qui potrebbesi avere un'idea di ciò che possa quella causa, calcolando la reazione colla perdita della metà di forza viva, risultato per altro che sta come limite, al quale può essere assai inferiore il reale vantaggio. Forse si otterrebbe maggiore utilità scaricando separatamente per apposito canale ogni cilindro. Ma questo io dico con grande esitanza, chè il voler suggerire miglioramenti alla locomotiva studiandola a tavolino è troppa arditezza.

Questo sì che ho registrato e meritava di esser fatto, che colla

separazione dello scarico in utile e dannoso si può render ragione di quel calcolo troppo esagerato che il Morin faceva sulla contropressione, per cui si è dubitato se giovi incanalare il vapore nel fumaiuolo o non piuttosto scaricarlo altrove più liberamente, procurando la chiamata di aria, che avviva la combustione, con altro mezzo meccanico.

Dicendo poi della controspinta se ne mostra facilmente il lievissimo effetto di perdita nella forza, perchè breve ne è il lavoro; per qualche millimetro e niente più.

Sopra questi punti cardinali del lavoro del vapore nelle locomotive versa la più parte del mio scritto. Nè mi sono allargato ai varii sistemi di distribuzione del vapore, ma ristretto nelle diverse proporzioni che si usano nelle macchine somiglianti alle nostre. Benchè da pochi anni sia la locomotiva resa capace di soddisfare alle molte esigenze di un rapido viaggio, l' operoso concorso di tanti preclari costruttori offre argomento vasto e difficile a seria occupazione; ed occupazione che addomanda il silenzioso meditare del gabinetto, l' osservare, il provare fra lo strepito di grandiose officine. Quindi è che questo mio scritto lo risguardo come una compilazione, come un commento di alcune norme trovate sopra l' andamento di alcune locomotive.

Nelle locomotive si è introdotto ultimamente il sistema di espansione variabile, cioè un mezzo di frenare l' afflusso del vapore per tratto più o meno lungo della corsa dell' embolo. Così a carico lieve si lascia entrare poco vapore, ed esso poi distendendosi produce la corsa, a carico grave s' introduce per gran parte della corsa dell' embolo. Questo mezzo di proporzionare il consumo del vapore all' effetto che si vuol ottenere frutta grandi vantaggi nel risparmio di combustibile che è l' alimento della macchina. È di gran lunga molto più vantaggioso del proporzionare il fieno all' animale secondo il lavoro, chè quivi la vita addomanda cibo anche nel riposo, quando nella locomotiva dobbiamo solo aver riguardo al lavoro.

E continua è la variabilità del carico, non solo perchè di merci o persone può essere variamente grave il treno, ma pel medesimo treno varia è la forza di traimento secondo la ascesa e discesa, le quali ben-

chè sieno quasi sempre lievi ben presto riducono il carico a crescere del doppio, a ridursi quasi insensibile, a cessare il bisogno di spinta.

Fra le maniere di operare la espansione variabile è lodatissima quella del Mayer che si adopera nell'ultime nostre macchine a cilindri esterni. La è un sistema di piastre che muovonsi sopra il cappello con movimento di va e vieni. Ecco il soggetto di altra ricerca geometrica che facilmente ho trattata. Così nella locomotiva ad espansione variabile sono tre movimenti di va e vieni combinati al giratorio delle ruote, che procedono con certe differenze di fasi; donde il problema od i problemi di determinare la posizione di un pezzo quando sia data quella di un altro. Nella mia formula la variabile indipendente, per usare il tecnico linguaggio, è l'angolo di rotazione della manovella che domina le ruote motrici.

Così la questione di adattare il regolatore della espansione a quella misura che occorre è problema di puro calcolo.

Alle precedenti cose ho aggiunto due avvertenze che mi sembrano omesse nei calcoli istituiti da altri. La prima è il lavoro che occorre ad iniettare acqua in caldaia per alimentarla. Questo lavoro non è grande, e mostro come si possa trascurare. La seconda avvertenza risguarda la circostanza che dall'una parte dell'embolo entra nel cilindro il gambo, grossa sbarra, che libero è lo spazio dalla banda opposta, cosicchè sono disuguali le cilindrate di vapore che corrispondono alle due corse diretta e retrograda. E se quella differenza è lieve non è però trascurabile.

Una principale condizione nell'esercizio della locomotiva sta nel mutamento di moto dal periodico rettilineo dell'embolo al circolare continuo delle ruote. La manovella è quell'apparato onde si trasforma l'un movimento nell'altro. La biella è quell'asta pel cui mezzo sono messi in azione lo stantuffo e la zanca. Mi permetto questo nome di cui si abbisogna, tolto dal francese, fino a che s'indichi parola propria, conveniente a quel membro di tanto effetto, usata da classici scrittori.

Credetti opportuno di mettere la teorica della manovella e di alcuni meccanici apparati che addomandano simile trattazione. Nè bastando-

mi di applicare a questo caso l'universale principio delle velocità virtuali e quello del lavoro dinamico che ne deriva per le potenze e resistenze, ripresi il calcolo o la teorica da'primi principii fondamentali della meccanica.

Siccome l'estremo della biella che s'imperna col gambo dello stantuffo cammina come vi è obbligata in via rettilinea, malamente farebbesi a decomporre la spinta o traimento dal vapore in due componenti, l'una nel prolungamento della biella, l'altra normale. Bisogna invece trovare le due componenti, l'una delle quali sia verticale, l'altra a seconda della biella. Della quale decomposizione saremo subito assicurati osservando che, liberata la biella del gambo, a farla procedere come fa, bisogna tirarla per quei due versi, e tirarla in maniera che sia risultante una forza che eguagli l'azione del vapore sullo stantuffo. Così la verticale rappresenta proprio la pressione che il gambo dello stantuffo esercita contro le pareti del canal direttore.

Quella componente poi che si riporta lungo la biella al collo della zanca va scomposta ancora in due, l'una che si affronti contro l'asse della manovella, l'altra che sia tangenziale al cerchio descritto dal centro del collo. Ed il momento di questa ultima ha da equivalere al momento delle resistenze e delle passività.

Con questa maniera di decomposizione si trova la equazione delle velocità virtuali, e le pressioni donde derivano in parte le passività che consumano assai della spinta del vapore.

Nella equazione delle velocità virtuali ed in quella del lavoro corrispondente ad intero giro ovvero a mezzo non entra la lunghezza della biella; vi entra solo nel termine delle passività come doveva essere. Del resto sono tante le passività della locomitiva, che a voler formularne ogni parte sarebbe lavoro più teorico che altro; onde per ora giova starsene a quelle determinazioni complessive che ha insegnato il Pambour, o dobbiamo cercarla per macchine nuove con esperimenti fatti secondo que' metodi ch' egli ha scrupolosamente descritti.

Anche qui non meno vanto di aver trattato difficile problema, ma credo di aver almeno reso più completo lo studio di quell' apparato in cui d' ordinario si considera la biella muoversi parallela a sè stessa.

Benchè di pura curiosità, benchè sia puramente geometrica questione, ho anche ricercato la distanza media della biella dal centro della manovella. Se la semicirconferenza si sviluppi e per ogni porzione minima corrispondente a minima rotazione s'innalzi una perpendicolare uguale alla distanza della biella che vi appartiene, avremo una curva con certa area. Se ora si trova il rettangolo equivalente che abbia per base quella medesima semicirconferenza, l'altezza porgeci la distanza media cercata.

Quando la biella si muove parallelamente o si considera che si muova in siffatta maniera per essere lunghissima in confronto del raggio del gomito, la distanza media corrisponde al braccio medio della meccanica. Allorchè si vuol tener conto della inclinazione della biella, la distanza media differisce dal braccio medio. Di fatto la distanza media dipende dalle perpendicolari condotte dal centro nei varii siti sulla biella, il braccio medio dipende dai singoli momenti delle forze, che comprendono e quelle distanze ed il valore delle forze. D'ordinario non si avverte la differenza fra distanza media e braccio medio, assumendosi la biella parallela sempre a sè stessa. Meritava farsi quel calcolo per mostrare appunto che la lunghezza della biella non entra nel valore del braccio medio, entra benissimo nella media distanza.

Nell'esposizione minuta di tutte queste ricerche ho tenuto un ordine un po' diverso da questa relazione. Ho messo prima le ricerche sulla manovella, passando poi alle formule che riguardano il lavoro del vapore. Parve a me che tornasse utile in questa introduzione di presentar dapprima il soggetto principale, che invece importasse nello sviluppo teorico mettere le formule fondamentali da cui si ricavano tutte quelle che spettano ai movimenti dei membri della locomotiva.

Ecco il prospetto di quelle ricerche che ho fatto, approfittando di quanto ho potuto raccorre in soggetto importante e recente, prospetto che cercai di esporre nettamente per mettere in chiaro quel poco che mi appartiene.

# DELLA LOCOMOTIVA

## I. *Sul movimento della manovella e dello stantuffo.*

1. La manovella è quell'apparato in meccanica per cui il *moto circolare continuo* si cangia in *moto rettilineo periodico* o viceversa. L'estensione di questo moto rettilineo di *va e vieni* si uguaglia a due volte il raggio della manovella. Dicesi *biella* l'asta che congiunge e domina questi due movimenti.

A determinare la relazione di questi due movimenti consideriamo il cerchio $AC$ (*Fig.* 1.) descritto con raggio $MC$, che è quello della manovella; sia $BC$ la biella per cui si spinge e si tira il gambo $BS$, d'ordinario obbligato ad uno stantuffo scorrente entro cilindro. Dato che sia il raggio $MC$, l'angolo $AMC$, la lunghezza $BC$, si vuol determimare la posizione del punto $B$.

A risolvere questo problema diciamo $g$ il raggio $MC$; $b$ la lunghezza $BC$; $\mu$ l'angolo $AMC$; e prendiamo per posizione fondamentale quella in cui $C$ sia in $A$. Allora è chiaro che la distanza di $B$ da $A$ è misurata da $b$. Sia $s$ la distanza di $B$ da quella sua posizione fondamentale dopo una rotazione $\mu$, ed esprimasi con $\beta$ l'angolo di che $CB$ è inclinata ad $AMS$.

Avremo prima

$$\frac{g}{b} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\mu} \quad (1)$$

poi

$$AB = b\cos\beta + g - g\cos\mu,$$

e perciò

$$s = b\cos\beta + g - g\cos\mu - b$$

ovvero

$$s = g(1 - \cos\mu) - b(1 - \cos\beta) \quad (2)$$

Queste due equazioni risolvono generalmente il problema di determinare l'una delle due quantità $s$, $\mu$ ove sia data l'altra.

2. Quando $b$ è grandissima in confronto di $g$, sarà $\beta$ angolo sempre trascurabile e potrà farsi $s = g(1 - \cos\mu)$, ovvero, lo che torna assai comodo al calcolo logaritmico, $s = 2g \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu$. Perciò fatto $\mu = 0^\circ$, $90^\circ$, $180^\circ$, $270^\circ$, $360^\circ$ si ha $s = 0, g, 2g, g, 0$; donde si manifesta che come il moto circolare si sparte in quattro quadranti o *fasi*, così il moto periodico rettilineo si sparte in quattro fasi di uguale lunghezza. Ammettendo $b = 20.g$ avremo, pel caso di $\mu = 90^\circ$, $\beta = 2^\circ.32'$ circa ed $s = g - 0,00125\, b = g - 0,025\, g$, chè è quanto a dire la prima fase calerà di 25 millesimi della lunghezza del gomito, e quindi la seconda fase sarà più lunga della prima di un ventesimo. Si fa perciò manifesto che quando sia $b > 20.g$ si possono assumere uguali le fasi dello stantuffo.

3. Mettendo nelle formule generali $\mu = 90^\circ$ avremo

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{g}{b} \qquad s = g - b(1 - \cos\beta)$$

ossia

$$s = g - b\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)}\right\}$$

Sviluppando in serie avremo

$$s = g - \frac{1}{2}\, g\, \frac{g}{b} + \frac{1}{8}\, g . \frac{g^3}{b^3} - \text{ec.}$$

Così la differenza fra la seconda fase e la prima, e perciò anche la differenza fra la terza e la quarta, sarà espressa da

$$g\,\frac{g}{b} - \frac{1}{4}\, g . \frac{g^3}{b^3} + \text{ec.}$$

Nella macchina di Sharp e Roberts detta la *Rapida*, descritta minutamente da Mathias, abbiamo $g = 0^m,232$; $b = 1,429$, onde si trova $s = 0,232 - 0,019$. In questo caso ai due quadranti della manovella corrispondono le fasi dell'embolo $0,213$; $0,251$ e perciò la seconda fase è di $0^m,038$ più lunga dell'altra. In questo esempio l'angolo $\beta$ che corrisponde a $\mu = 90^\circ$ è $9^\circ.20',6$. Anche in questo caso poco lungi andrebbesi dal vero, ritenendo il solo primo termine $g . \frac{g}{b}$ e perciò si potrà stabilire questa regola: *la differenza delle due fasi seconda e prima, terza e quarta dell'embolo è data in parti del gomito, dal rapporto del gomito alla lunghezza della biella.*

4. Tenendo conto delle potenze seconde di $\beta$, alle equazioni prime potranno sostituirsi le seguenti.

$$\beta = \frac{g}{b} \operatorname{sen} \mu \quad (3) \qquad s = 2g \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \mu - \frac{b}{2} \beta^2 \quad (4)$$

Eliminando poi il $\beta$ ricaveremo

$$s = 2g \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \mu \left\{ 1 - \frac{g}{b} \cos^2 \frac{1}{2} \mu \right\} \quad (5)$$

Quindi, ricavando il valore di $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \mu$, sarà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \mu = \sqrt{\left\{ -\frac{b}{2g} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2g} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{bs}{2g^2}} \right\}} \quad (6)$$

equazione che ci servirà a calcolare $\mu$ quando si conosca $s$.

5. A determinare l'angolo $\mu$, quando lo stantuffo è giustamente nel mezzo della corsa, dovremo fare $s = g$ ed allora sarà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \mu = \sqrt{\left\{ -\frac{b}{2g} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2g} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{b}{2g^2}} \right\}}$$

ossia

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \mu = \sqrt{\left\{ -\frac{b}{2g} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left( \frac{b^2}{4g^2} + \frac{1}{4} \right)} \right\}} \quad (7)$$

Nel caso della *Rapida* avremo $\mu = 94^\circ . 38', 2$; cioè quando lo stantuffo è alla metà della corsa la manovella avrà oltrepassato di quattro gradi e due terzi circa il primo quadrante, e di tanto sarà avanzata nella seconda fase.

Siccome l'avanzamento dello stantuffo per arrivare al mezzo della corsa è $\frac{1}{2} g . \frac{g}{b}$, si vede subito che l'avanzamento della manovella sul primo quadrante sarà approssimativamente l'arco $\frac{g}{2b} R^\circ$ essendo $R^\circ$ il numero di gradi contenuti nel raggio. Quindi chiamando $\varepsilon$ quell'angolo avremo la formula assai comoda

$$\varepsilon = \frac{g}{2b} R^\circ \quad (8)$$

Nel caso della *Rapida* si trova $\varepsilon = 4^\circ . 39'$ con lieve divario dal valore esatto stabilito precedentemente.

Del resto a quella formula approssimata si può arrivare mettendo nelle equazioni fondamentali $\mu = 90^\circ + \varepsilon$, e considerando che $\beta$ deve essere piccolo, per cui avremo

$\epsilon = \frac{b}{2g}\beta^2$, $\beta = \frac{g}{b}$ e perciò $\epsilon = \frac{g}{2b}R^0$ come sopra.

6. Toccheremo adesso di una questione che suol farsi sulla manovella. Per ogni posizione della biella s'intenda calata sopra di essa una normale dal centro della manovella. Questa normale sarà variabile. Fatto questo per mezza rivoluzione avremo una successione di normali che si riprodurranno col medesimo andamento nell'altra metà. Per rotazione infinitesima una normale può aversi per costante. Se adunque, sulla semicirconferenza rettificata, per ogni arco, si avesse a disporre normalmente quella lunghezza che misura la corrispondente distanza della biella dal centro della manovella, ne risulterebbe una certa curva descritta dal sommo di quella ordinata, ed una certa area. Tal area può paragonarsi a rettangolo che abbia per base quella semicirconferenza rettificata e per altezza quanta ne occorre perchè sia equivalente alla nominata area. Quest'altezza può dirsi *braccio medio geometrico* della manovella. Dicesi geometrico per distinguerlo da un altro, di cui diremo fra poco, che riguarda proprio l'uso meccanico di questo apparato. Cercheremo prima il braccio medio geometrico supponendo che la biella muovasi parallela a sè stessa, poi lo troveremo considerando che l'estremo risguardante lo stantuffo cammini su via rettilinea nel prolungamento di diametro della manovella.

7. Sia $MC = g$, l'angolo $AMC = \mu$ (*Fig.* 2.). La normale calata da $M$ sulla $BC$ parallela ad $AM$ è $g.\text{sen}\,\mu$; l'elemento dell'area che abbiamo detto sarà $g.\text{sen}\,\mu.g\,d\mu$, l'area intera verrà espressa da $\int_0^\pi g^2 \,\text{sen}\,\mu\, d\mu$. Detto il braccio medio $h$ sarà

$$h\,g\,\pi = \int_0^\pi g^2 \,\text{sen}\,\mu\, d\mu \qquad \text{ossia} \qquad h = \frac{2g}{\pi} \qquad (9)$$

8. Consideriamo adesso (*Fig.* 1.) la biella impernata in $B$. Il braccio che corrisponde ad angolo $\mu$ sarà $g.\text{sen}(\mu - \beta)$; l'elemento dell'area $g.\text{sen}(\mu - \beta).g\,d\mu$ e perciò avremo

$$h = \frac{g}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}(\mu - \beta)\, d\mu .$$

Eliminando $\beta$ col mezzo dell'equazione $\operatorname{sen}\beta = \frac{g}{b}\operatorname{sen}\mu$ ricaveremo

$$h = \frac{g}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\mu \sqrt{\left\{1 - \frac{g^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\mu\right\}}\, d\mu - \frac{g}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{g}{b}\cos\mu \,.\, \operatorname{sen}\mu \,.\, d\mu \,.$$

Il secondo termine è manifestamente nullo, onde sarà

$$h = -\frac{g}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\left\{1 - \frac{g^2}{b^2} + \frac{g^2}{b^2}\cos\mu^2\right\}}\, d \,.\, \cos\mu$$

L'integrale indefinito è

$$\frac{1}{2}\cos\mu \sqrt{\left\{1 - \frac{g^2}{b^2}\operatorname{sen}\mu^2\right\}} + \frac{b^2 - g^2}{2bg}\log \,.\, \left(\frac{g}{b}\cos\mu + \sqrt{\left(1 - \frac{g^2}{b^2}\operatorname{sen}\mu^2\right)}\right)$$

e di qui sicaveremo finalmente

$$h = \frac{g}{\pi}\left\{1 + \frac{b^2 - g^2}{2bg}\log\frac{b+g}{b-g}\right\} \qquad (10)$$

Pel caso di $b$. infinito sarà $h = \frac{2g}{\pi}$ come sopra si è trovato.

9. Passiamo a considerare adesso l'apparato della manovella nei suoi ufficii meccanici. Sia la manovella unita a ruota concentrica $DD$ (*Fig.* 3.) e la biella $BC$ sia unita ad asta $BS$ obbligata a camminare nella direzione del diametro $AE$.

Sia $R$ il raggio della ruota $DD$, $g$ al solito il gomito della manovella. Diciamo $Q$ la resistenza operante sulla circonferenza della ruota $DD$, $F$ la potenza che opera nell'estremo $B$ della biella nella direzione $BF$. Per una rotazione $d\mu$, e pel movimento $ds$ della biella nel senso $BF$, giusta il principio delle velocità virtuali avremo $RQd\mu = Fds$; e per una mezza rivoluzione $RQ\pi = 2gF$. Se ora immaginiamo che la resistenza $Q$ sia sollevata per mezza circonferenza dalla forza $F$ operante sopra ruota concentrica a $DD$ e di raggio $h$, avremo $RQ\pi = \pi hF$ cioè $h = \frac{2g}{\pi}$.

Sicchè il lavoro delle forze $F$ mediante la biella si può rappresentare per lavoro della $F$ col braccio costante $h$, e perciò tal braccio potrà aversi per braccio medio della manovella. Siccome nell'espressione di $h = \frac{2g}{\pi}$ non entra la lunghezza della biella, così ne segue che il vero braccio medio della manovella è costante qualunque siasi

la lunghezza della biella. Abbiamo detto il vero braccio medio, perchè si è desso desunto dall' ufficio meccanico, applicandovi il principio delle velocità virtuali.

**10.** A questo generalissimo risultato si può arrivare anche col soccorso de' primi elementi. Alla forza $F$ agente da $B$ verso $S$ possiamo sostituire due forze, l' una nel prolungamento di $CB$ secondo il quale si trasporta l' effetto della forza $F$ sopra $C$, l' altra normale al cammino rettilineo dell' estremo $B$. Dicendo $T$ e $V$ quelle due componenti, avremo

$$V = F \operatorname{tang} \beta , \qquad T = \frac{F}{\cos \beta}$$

La $T$ trasportata in $C$, decomponesi in due l' una verso $CM$, l' altra normale al raggio $CM$. Sarà la prima

$$T \cos (\mu - \beta)$$

ossia

$$F \frac{\cos (\mu - \beta)}{\cos . \beta} ;$$

sarà la seconda

$$T \operatorname{sen} (\mu - \beta)$$

ovvero

$$F . \frac{\operatorname{sen} (\mu - \beta)}{\cos \beta} .$$

Siccome poi quest' ultima opera col braccio $g$, avremo

$$Q . R = g F \frac{\operatorname{sen} (\mu - \beta)}{\cos \beta} .$$

Differenziando le equazioni (1) (2) ed eliminando il $d\beta$ troveremo

$$g \frac{\operatorname{sen} (\mu - \beta)}{\cos \beta} d\mu \quad = ds \qquad (14)$$

Moltiplicando questa equazione colla precedente si avrà

$$Q R d\mu = F ds$$

che è l' equazione delle velocità virtuali. Integrando per mezza rivoluzione sarà

$$Q R \pi = 2 F g ;$$

e volendo rappresentare l' effetto della $F$ per quello che corrisponderebbe al braccio costante $h$ avremo

$$2 F g = \pi F h \qquad \text{ossia} \qquad h = \frac{2 g}{\pi} .$$

11. Può vedersi facilmente che l'equazione $Q R \pi = 2 F g$ è infine quella delle forze vive e del lavoro dinamico, dalla quale perciò poteasi senz'altro incominciare; pure abbiamo voluto confermarla particolarmente. Se dal gomito $C$ della manovella pendesse una fune portante il peso $Q$, l'equazione dell'equilibrio sarebbe

$$Q g \operatorname{sen} \mu = g . F \frac{\operatorname{sen} (\mu - \beta)}{\cos \beta}$$

Moltiplicando questa per la (11) ricavasi

$$Q g \operatorname{sen} \mu \, d \mu = F d s$$

ed integrando fra $\mu = 0$ e $\mu = 90^\circ$ ricaveremo

$$Q g = F g \qquad \text{ossia} \qquad Q = F$$

cioè le due forze uguali perchè il loro viaggio è il medesimo.

12. La soluzione elementare che abbiamo messa poco fa del problema risguardante la manovella, porge i valori delle pressioni, le quali poi ci somministrano le passività che involgono per elemento il braccio della manovella. La pressione esercitata dall'estremo $B$ della manovella contro le pareti del canaletto che l'obbliga a muoversi nel senso rettilineo $BG$ è $F.\operatorname{tang} \beta$. Lo sforzo esercitato contro $M$ ossia contro i perni che sostengono la ruota $DD$ è $F . \frac{\cos (\mu - \beta)}{\cos \beta}$ .

Vedesi perciò che il canaletto è sospinto all'insù nella prima metà del giro, sospinto all'ingiù nella seconda metà.

Ammettendo che $\beta$ rimanga sempre picciolo da potersi sostituire al seno e tangente di $\beta$, l'arco stesso, avremo quelle due forze espresse per

$$F \frac{g}{b} \operatorname{sen} \mu \, , \qquad F \left( \cos \mu + \operatorname{sen} \mu^2 \frac{g}{b} \right)$$

13. Passiamo adesso a calcolare le passività. La prima è quella che dipende dall'attrito contro il canaletto. Dicendo $f$ il coefficiente di attrito, per mezza rivoluzione si avrà

$$f F \frac{g}{b} \int_0^{2g} \operatorname{sen} \mu \, d s \, ,$$

o più rigorosamente

$$f F \int_0^{2g} \operatorname{tang} \beta \, d s \, .$$

Una seconda passività ha luogo nel perno $B$ dove la coda della biella si unisce al gambo dello stantuffo. Dicendo $f'$ il coefficiente di attrito, e $p$ il raggio del perno, la passività, per mezza rivoluzione, sarà espressa da

$$2f'Fp\int_{\circ}^{\beta'}\frac{d\beta}{\cos\beta}$$

calcolandosi l'angolo $\beta'$ dalla equazione $\operatorname{sen}\beta'=\frac{g}{b}$. Potendosi facilmente integrare l'espressione precedente, tale passività si ottiene calcolando prima il valore di $\beta'$ dalla equazione $\operatorname{sen}\beta'=\frac{g}{b}$, poi il lavoro dell'attrito dall'altra

$$\frac{2f'Fp}{M}\log.\operatorname{tang}.\left(45^{\circ}.+\frac{\beta'}{2}\right)$$

essendo $M$ il modulo del sistema comune.

Abbiamo poi l'attrito nel collo della manovella. Questo attrito è dato da $f''\frac{F}{\cos\beta}$, se con $f''$ esprimiamo il coefficiente. Quando poi si esprime con $c$ il raggio del collo della manovella, il lavoro di tale attrito per mezza rivoluzione sarà

$$f''cF\int_{\circ}^{\pi}\frac{d(\mu-\beta)}{\cos\beta}$$

cioè

$$f''cF\int_{\circ}^{\pi}\frac{1}{\cos\beta}\left(1-\frac{g}{b}.\frac{\cos\mu}{\cos\beta}\right)d\mu.$$

Per ultimo vi è l'attrito sui perni che sostengono la ruota $DD$.

Dicendo $f'''$ il coefficiente questo attrito è dato da

$$f'''F\frac{\cos(\mu-\beta)}{\cos\beta}$$

Perciò se con $g$ esprimiamo il raggio de' perni, il lavoro dell'attrito sarà espresso da

$$2gf'''F\int_{\circ}^{\pi}\frac{\cos(\mu-\beta)}{\cos\beta}\,d\mu$$

Avvertasi che queste passività dipendono dall'azione della forza $F$, e che perciò rimane da calcolare le passività che dipendono dal peso delle materie componenti l'apparato, e dalla resistenza $Q$.

Nella locomotiva bisogna poi avere riguardo ad altre circostanze

per tener conto delle passività, per cui staremo alle regole del Pambour per determinare complessivamente tutte le resistenze.

## II. *Sul movimento dell' eccentrico e del cappello.*

**14.** Chiamo *cappello* quella parte della locomotiva che serve alla immissione del vapore entro il cilindro, cioè quella valvola che i Francesi chiamano *tiroir*. Quando la biella dell'eccentrico s'imperna direttamente col tirante del cappello potremo applicare all' eccentrico tutto quello che si è detto della manovella, anzi potrà farsi questo con maggiore semplicità attesa la picciolezza della corsa riguardo alla lunghezza della biella. Così chiamando $e$ l'eccentricità, $\mu'$ l'angolo che forma la linea di eccentricità colla posizione fondamentale a sinistra e $c$ il viaggio corrispondente del cappello; avremo l'equazione

$$c = 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\mu'.$$

Se poi ammettiamo che l'eccentrico sia avanzato di un angolo $\alpha$ sulla manovella avremo

$$c = 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha+\mu)\,; \qquad (12)$$

così per ogni valore di $\mu$ sapremo indicare il sito del cappello e dello stantuffo.

A cappello senza orlo, cioè tale che l'ala sia uguale all' apertura della luce d'immissione e senza precessione, abbiamo $\alpha = 90°$; la larghezza della luce uguale ad $e$. Facendo nella nostra formula $\alpha = 90°$ e poi $\mu = 0,\ 90,\ 180,\ 270,\ 360$ avremo $c = e,\ 2e,\ e,\ 0,\ e$ che è quanto a dire il cappello è avanzato di una fase sull' embolo. e la luce comincia ad aprirsi quando l'embolo si stacca dal fondo posteriore, rimane aperto per tutta la corsa, dopo di che si chiude. Simile giuoco fa l'altro. Per ben attendere a questo, bisogna notare che secondo la nostra formola il cappello bisogna che cammini di $e$ dal sito fondamentale perchè arrivi a filo della luce, che fino a tanto che $c > e$ la luce è aperta: ecco che per l'angolo $\mu$ da 0° a 90° è $c$ compresa

da $e$ a $2e$, lo che vuol dire luce aperta; che per l'angolo $\mu$ da 90° a 180° $c$ varia da $2e$ ad $e$, con che si chiude la luce; e che pei due altri quadranti essendo $c < e$ la luce rimane sempre chiusa.

15. Nel cappello, attesa la brevità della corsa riguardo alla lunghezza della biella, la corsa è distinta con differenza affatto trascurabile in due parti uguali; ma ciò non ha luogo per lo stantuffo. Nella *Rapida* abbiamo già veduto che la prima parte è $0^m,215$, mentre la seconda fase è $0^m,251$. A cappello senza ala e senza precessione, questa differenza poco conta, perchè la luce sta già tutta aperta per l'intera corsa, e s' alternano esattamente i due periodi di afflusso e scarico; ma vedremo che a cappello con orli e precessione vi può essere differenza da avvertirsi. E vi può essere diversità anche in quel caso che ora consideriamo, se con apparato sovrapposto al cappello si ottenga espansione costante o variabile, perchè la durata tra la corsa diretta e retrograda può essere ineguale.

16. Quando la biella dell' eccentrico domina l'estremo di leva che per l' altro braccio s' imperna col tirante del cappello, abbiamo primieramente una corsa del cappello che può esser diversa dalla eccentricità, poi abbiamo la differenza di due fasi. Mettiamo che il braccio cui corrisponde la biella sia $L$, e sia $L'$ l'altro a cui è applicato il tirante $c$, sarà

$$c = \frac{L'}{L}\left(2e - 2e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\mu'\right),$$

ossia

$$c = 2\frac{L'}{L}e\cos^2\frac{1}{2}\mu'.$$

Mettendo per semplicità $\frac{L'}{L}e = e$ sarà $2e'$ la corsa del cappello, ed avremo

$$c = 2e'\cos^2\frac{1}{2}\mu'. \qquad (13)$$

e potremo anche ritenere la lettera $e$ a designare metà della corsa dell' eccentrico, avvertendo bene che quando la biella dell'eccentrico è direttamente impernata col tirante sarà $e$ l' eccentricità; quando poi la biella opera sul tirante mediante una leva delle braccia $L$ dalla ban-

da della biella, $L'$ da quella del tirante, la corsa è $2\frac{L'}{L}e$, essendo $e$ l'eccentricità.

Facendo $\mu' = 270 + \mu$ sarà

$$c = 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(90^\circ + \mu)$$

come sopra, e più generalmente facendo $\mu' = 180^\circ + \alpha + \mu$ avremo

$$c = 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha + \mu)\,. \qquad (13)$$

Così l'intermedio della leva non fa che mutare la corsa del cappello riguardo alla eccentricità, ed obbliga ad avanzare di due fasi l'eccentrico.

17. Consideriamo adesso il cappello $C$ (*Fig.* 4.) in prima fase chiudente le due luci, e supponiamo che le due ali $P$, $A$ sopravanzino esteriormente le luci essendo internamente a filo colle pareti delle luci medesime. La quantità $pi$ dell'ala $pp'$ che sopravvanza alla luce si dirà *orlo esteriore*. Ciò posto è chiaro che fino a tanto che il cappello si avanza di $pi$ vapore non può entrare nel cilindro, ed è pur chiaro ch'entrando in terza fase nell'indietreggiare, appena che il lembo $p$ guadagna il lembo esteriore della luce, cesserà l'efflusso del vapore e rimarrà imprigionato nel cilindro.

Ma perchè il vapore sia pronto a sospingere l'embolo si tiene il cappello avanzato nella seconda fase di maniera che quando l'embolo è nella posizione fondamentale, cioè al fondo posteriore del cilindro, l'orlo sia avanzato ed anche per qualche tratto di più che si chiama *precessione*. Queste circostanze mutano grandemente il giuoco del vapore, e noi ci faremo a valutarle esattamente.

18. Diciamo $a$ la lunghezza dell'ala $pp'$; $r$ l'orlo $pi$. Perchè il cappello si trasporti di $r$ dovrà seguire una rotazione $p$. A trovare quest'angolo bisogna fare $c = e + r$ nell'equazione generale (13) ponendovi anche $\mu = 0$. Così calcoleremo $\rho$ col soccorso dell'equazione

$$\mathrm{sen}\frac{1}{2}(90^\circ + \rho) = \sqrt{\frac{e + r}{2\,e}} \qquad (14)$$

Che se vogliamo sia il cappello avanzato di $r+p$ quando l'embolo è al fondo del cilindro, cioè quando $\mu=0$, sarà $r+p$ la *precessione lineare*. Per trovare quale angolo corrisponde a tutto questo avanzamento $r+p$, chiamatolo $\omega$, dovremo calcolarlo dalla equazione

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\omega)=\sqrt{\frac{e+r+p}{2e}} \qquad (15)$$

ed $\omega$ sarà la precessione angolare. Allora per calcolare la posizione del cappello dovremo ricorrere all' equazione

$$c=2e\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(90^\circ+\omega+\mu). \qquad (16)$$

L' afflusso del vapore durerà da $c=e+r+p$ a $c=2e$ e poi calando cioè indietreggiando il cappello fino a $c=e+r$.

Da $c=e+r$ continuando ad indietreggiare il cappello, a $c=e$ rimane sospeso l' efflusso del vapore, perchè chiusa la luce dall' ala. Da $c=e$ a $c=0$ e poi ancora nell' avanzamento successivo del cappello fino a $c=e$ il vapore si scaricherà dal cilindro. Da $c=e$ a $c=e+r$ il vapore rimasto chiuso sarà compresso dall' embolo che torna alla posizione fondamentale, e finalmente da $c=e+r$ a $c=e+r+p$ avrà luogo l' efflusso del vapore che opera contro l' embolo che ritorna.

19. Consideriamo adesso la posizione angolare dell' eccentrico per questi diversi periodi, e quella dell' embolo. Se l' eccentrico mediante la sua biella è impernato direttamente col tirante, gli angoli saranno calcolati dalla posizione fondamentale; se la biella dell' eccentrico agisce mediante leva sul cappello, questi angoli andranno riportati a 180° dalla posizione fondamentale. Da $c=e+r+p$ a $2e$ e poi nel ritorno del cappello ad $e+r$ l' angolo di rotazione procede da $90^\circ+\omega$ a $270^\circ-\rho$, cioè l' afflusso dura da $\mu=0$ a $\mu=180^\circ-\omega-\rho$. Da $c=e+r$ a $c=e$ succede una rotazione da $270^\circ-\rho$ a 270 e per questo periodo opera l' espansione. Riguardo all' embolo dura l' espansione da $180^\circ-\omega-\rho$ a $180^\circ-\omega$.

Per la quarta fase del cappello, e per la prima del nuovo periodo segue lo scarico. La manovella gira da $180^\circ-\omega$ a $360^\circ-\omega$. Ma que-

sto periodo di scarico va suddiviso in due altri; e perchè la loro influenza è opposta e quindi assai importante nel calcolo della locomotiva, merita che vi ci fermiamo un momento. Comincia lo scarico del vapore quando alla manovella manca ancora una rotazione $\omega$ per portare l'embolo al termine della corsa. Allora il vapore che si scarica s'appuntella per così dire contro la faccia posteriore dell'embolo e quella spinta che vi fa sopra concorre a portarlo fino al termine della corsa. Tale operazione è dunque vantaggiosa, può rassomigliarsi alla spinta che contro il fondo del cannone esercita la polvere accesa, per cui tal periodo lo diremo *scarico a spinta*. Il seguente periodo di scarico nel quale il vapore è cacciato dall'embolo che ritorna dicesi *contropressione*. Bisogna badar bene che la forza del vapore che si scarica è ben diversa in questi due periodi, mentre nel primo il vapore comincia colla tensione massima che aveva, nel secondo ha perduto molto della sua forza per la quantità sfuggita. Quindi è ben facile ad intendersi che l'orlo messo nel cappello o diremo meglio l'angolo di precessione $\omega$ serve ad utilizzare una parte della forza insita nel vapore che si scarica dopo che ha lavorato, senza dire di qualche altro vantaggio che accenneremo fra poco.

Dopo lo scarico manca ancora all'embolo una rotazione $\omega$ per rimettersi alla posizione fondamentale: questa parte di rotazione va ancora distinta in due periodi; nell'uno intanto che passa il cappello del suo orlo il vapore rimane chiuso e perciò compresso, nel seguente affluendo vapore spigne contro l'embolo che ritorna. Il primo periodo è di *compressione*, l'altro di *controspinta*. Per la rotazione $\rho$ seguente all'angolo $360° - \omega$ dura la compressione; per quello che rimane al compimento dei 360° dura la controspinta.

20. Dopo aver analizzato tutti questi periodi ne faremo un prospetto perchè ci serva alle applicazioni che se ne debbono ricavare.

Corsa del cappello $2e$
Orlo del cappello $r$
Precessione lineare del cappello $p + r$
Angolo di rotazione per l'avanzamento dell'orlo $\rho$
Angolo di precessione . . . . . $\omega$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\rho)=\sqrt{\frac{e+r}{2e}} \qquad \operatorname{sen}\rho=\frac{r}{e}$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\omega)=\sqrt{\frac{e+r+p}{2e}} \qquad \operatorname{sen}\omega=\frac{r+p}{e}.$$

Periodi di azione sulla faccia posteriore dello stantuffo

Spinta da $0^\circ$ a $180^\circ-\omega-\rho$

Espansione da $180^\circ-\omega-\rho$ a $180^\circ-\omega$

Scarico a { spinta da $180^\circ-\omega$ a $180^\circ$ ; contropressione da $180^\circ$ a $360^\circ-\omega$

Compressione da $360^\circ-\omega$ a $360^\circ-\omega+\rho$

Controspinta da $360^\circ-\omega+\rho$ a $360^\circ$.

Volendo poi confrontare lo stato contemporaneo delle due faccie bisogna rovesciare la tabella messa nel seguente modo, cominciare dai $180^\circ$ e passare ai $360^\circ$, indi porre di seguito ciò che corrisponda primi $180^\circ$. Così formeremo l'altra tabella.

| Faccia posteriore dell'embolo | Faccia anteriore dell'embolo |
|---|---|
| $180^\circ-\omega-\rho$ Spinta<br>$\rho$ Espansione | $180^\circ-\omega$ Scarico a contropressione |
| $\omega$ Scarico a spinta | $\rho$ Compressione<br>$\omega-\rho$ Controspinta |
| $180^\circ-\omega$ Scarico a contropressione | $180^\circ-\omega-\rho$ Spinta<br>$\rho$ Espansione |
| $\rho$ Compressione<br>$\omega-\rho$ Controspinta | $\omega$ Scarico a spinta. |

21. Fin qui abbiamo detto degli angoli di rotazione della manovella corrispondenti ai varii periodi, ma è necessario considerare il movimento lineare dell'embolo. Indicando con $s_1$, $s_2$, $s_3$, le quantità lineari che corrispondono ai primi tre periodi, e con $t_1$, $t_2$, $t_3$ i tre seguenti, avremo da ricorrere, per calcolarli, alla formula (3). Confrontando

$s_1 + s_2$ con $2g$ avremo il primo periodo per la faccia anteriore. Per avere i due seguenti dovremo calcolare il valore di $s$ per l'angolo $180° - \omega + \rho$ e così via dicendo. I periodi per le faccie posteriore ed anteriore dell'embolo non sono misurati dalle medesime lunghezze attesa la lunghezza della biella; lo sarebbero a biella estremamente lunga.

22. Per rischiarare con un esempio questa analisi prendiamo i dati della *Rapida*. Ivi è $2e = 0,115$; $r = 0,023$; $p = 0,004$. Troveremo $\rho = 23° . 34', 8$: il Mathias in numeri tondi mette 24°; troveremo $\omega = 28°$ come il Mathias: poi faremo la seguente tabella

*Rotazioni corrispondenti ai periodi del giuoco del vapore nella doppia corsa*

| Faccia posteriore | | Faccia anteriore | |
|---|---|---|---|
| Spinta per un angolo | 128°. 25′, 2 | Scarico a contropressione | 152°. |
| Espansione | 23. 34, 8 | | |
| Scarico a spinta | 28. 0, 0 | Compressione | 23. 34, 8 |
| | | Controspinta | 4. 25, 2 |
| Scarico a contropressione | 152. 0, 0 | Spinta | 128. 25, 2 |
| | | Espansione | 23. 34, 8 |
| Compressione | 23. 34, 8 | Scarico a spinta | 28. 0, 0 |
| Controspinta | 4. 25, 2 | | |

Da questa tabella si vede come succedonsi gli angoli nella *Rapida*. Ma per riconoscere il vero lavoro del vapore bisogna calcolare le parti della corsa relative ai varii periodi, e tanto più occorre di far questo comparto che la lunghezza della biella rispetto al gomito ha tanta influenza. Ricordiamo che per la *Rapida* è $g = 0^m, 232$, $b = 1^m, 459$. Ecco la tabella

*Misure lineari corrispondenti ai varii periodi del giuoco del vapore in una doppia corsa*

| Faccia posteriore | | Faccia anteriore | |
|---|---|---|---|
| Spinta per | $0^m$,3646 | Scarico a contropressione | $0^m$,4327 |
| Espansione | 0, 0681 | | |
| Scarico a spinta | 0, 0313 | Compressione | 0, 0305 |
| | | Controspinta | 0, 0008 |
| Scarico a contropressione | 0, 4410 | Spinta | 0, 3877 |
| | | Espansione | 0, 0533 |
| Compressione | 0, 0224 | Scarico a spinta | 0, 0230 |
| Controspinta | 0, 0006 | | |

23. Da questa tabella si appalesa nettamente, e forse più di quello che a prima giunta direbbesi, l'influenza della lunghezza della biella. Mentre la spinta nella faccia posteriore dura per $0^m$,365, sull'anteriore dura per 0.388, per $0^m$.013 di più; e l'espansione che nella faccia posteriore è di $0^m$,068, sull'anteriore è di soli 0,033 e così dicasi del resto. Vedesi poi per qual picciolo tratto duri la controspinta, e che perciò questo controlavoro del vapore è trascurabile, essendone poi utilissima l'influenza onde acquetare l'embolo, smorzandone la velocità, e trovandosi pronto ad operar la necessaria spinta.

Le quantità lineari che abbiamo messo tornano utili a calcolare l'azione dinamica corrispondente ad ogni periodo, quando si possa considerare costante l'azione del vapore, ovvero quando si possa prendere una media. Quanto alla durata di ogni periodo bisogna prenderla proporzionale all'angolo, mentre pel peso considerevole della locomotiva e per la massa del treno il movimento è uniforme. Così riguardo alla durata de' periodi abbiamo uguaglianza fra quelli che corrispondono alle due faccie.

Noteremo ancora che lo scarico a spinta è bensì in quantità lineare quindici volte circa meno lungo dello scarico a contropressione, ma che riguardo al tempo è solo minore di cinque volte e mezza circa; così del tempo messo in una mezza rivoluzione di ruota una parte tocca allo scarico a spinta, cinque e mezza all'altro. E poichè quando il vapore comincia a sfogarsi è alla sua massima forza ed è allora che ha luogo quel primo periodo di scarico, si vede che molta parte dell'azione del vapore rimasto dopo la spinta continua a lavorare. Così può spiegarsi, e tenteremo di farne valutazione in progresso, l'utilità della precessione dell'orlo, dalle quali due quantità dipende la durata di quel primo periodo dello scarico.

24. Diciamo adesso brevemente come sopra macchina completamente montata si possano verificare quelle misure che si riportano alla corsa, alla lunghezza della biella, all'orlo, alla corsa del cappello, alla precessione, supposto che siavi soltanto orlo esterno. Prima di tutto bisogna dire come colla ruota medesima si possano valutare gli angoli di rotazione. Per questo basterà notare la via percorsa, poichè quella lunghezza riportata ad arco ci somministrerà i gradi. Ma non è così facile e sicuro disegnare sulla guida il punto di contatto colla ruota, per lo che io stimerei più esatto di applicare lateralmente un filo a piombo, segnando ben sulla circonferenza il sito che tocca e sulla guida dove corrisponde. Quando dopo una rivoluzione si torna a calare il filo a piombo, avremo sulla guida la circonferenza sviluppata. Di qua caveremo il raggio corrispondente al sito che toccò la guida, al luogo dove si applicò il filo a piombo. Sarà buono di trovare in metri la lunghezza di un grado per le ulteriori misure. Così se la circonferenza fosse di cinque metri, il grado è misurato da $0^m,0129$ con lieve divario. Poi caveremo la lunghezza del raggio corrispondente alla zona media che si sviluppa a corso ordinario.

Del resto a strada rettilinea, a macchina posta nel mezzo si potrà misurare la lunghezza per più rotazioni ed avere con molta esattezza questi elementi del raggio.

25. Per avere la corsa dell'embolo possiamo riportarci alla biella ovvero allo stantuffo medesimo. Infatti se lateralmente alla biella sia

fatto un segno e si abbadi al suo movimento nel senso orizzontale, quando il segno sarà alla massima distanza dal cilindro, la biella sarà nella sua posizione fondamentale. Girando mezza ruota, passerà quel segno nella minima distanza dal cilindro ed il viaggio orizzontale che ha fatto misurerà la corsa dell'embolo; la metà il raggio della manovella. Questa misura può farsi anche con macchina in apparecchio di viaggio. Che se la macchina sia semplicemente montata, senza vapore, ovvero chiuso il regolatore si levino gli scudi dinanzi ai cilindri, si misurerà esattamente il viaggio dell'embolo in una mezza rivoluzione. Infatti applicandovi una misura e segnando quando è rientrata del massimo, la quantità di cui esce in mezza rivoluzione dà esattamente la corsa dello stantuffo.

26. Per determinare la lunghezza della biella in macchina montata si può anche usare del seguente metodo. Partendo dalla posizione fondamentale si misurino per due rotazioni $\mu, \mu'$ i viaggi orizzontali della biella e sieno $s$, $s'$.

Siccome è

$$s = 2g \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu - \frac{g^2}{2b} \operatorname{sen}^2 \mu$$

$$s' = 2g \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu' - \frac{g^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \mu' ;$$

avremo

$$b = \frac{4g\left(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu' + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu\right) - 2(s' + s)}{g^2(\operatorname{sen}^2 \mu' + \operatorname{sen}^2 \mu)}$$

Per fare che il denominatore sia il più grande e che perciò $b$ risulti bene determinato, prenderemo $\mu'$ che differisca di 90° da $\mu$ con che il denominatore riducesi a $g^2$; ovvero prenderemo $\mu'$ e $\mu$ di non molti gradi diverso da 90°, $\mu$ in meno e $\mu'$ in più.

27. Determinata la corsa di ogni cilindro e stabilito esattamente il punto fondamentale per ogni manovella, confronteremo le due corse fra loro, e quindi vedremo se veramente sono ad angolo retto. Questo confronto può farsi in molti modi. Se una manovella è in posizione

fondamentale, l'altra dovrà essere avanzata di $g - g.\frac{g}{2b}$. Più generalmente se l'una ha percorso orizzontalmente il viaggio

$$s = 2g \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu - \frac{g^2}{2b} \operatorname{sen}^2 \mu;$$

l'altra dovrà trovarsi in

$$s' = 2g \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(90^\circ + \mu) - \frac{g^2}{2b} \cos^2 \mu.$$

28. Veniamo adesso all'eccentrico ed al cappello. Se la biella dell'eccentrico è impernata direttamente col tirante, come avviene nelle macchine di Roberts a cilindri esteriori, si determinerà la corsa come si è detto della corsa del cilindro. Il viaggio orizzontale della biella segnerà e le posizioni fondamentali, e quindi tutto l'intero viaggio che è la corsa. Che se la biella dell'eccentrico è impernata con leva bisogna determinare e la corsa della biella, che è il doppio della eccentricità, e le due braccia; di qua ricaveremo la vera corsa del cappello. Quanto alla lunghezza della biella non importa, ritenendo che sia già molto grande in confronto della corsa del cappello.

29. Un elemento importantissimo è quello della precessione. Per determinarla, quando una manovella è in posizione fondamentale, si trovi di quanto è avanzata nel senso orizzontale la biella del corrispondente eccentrico, e così si calcolerà l'angolo di rotazione che vi corrisponde, quel tanto di che supera i 90° misurerà la *precessione angolare*; la quantità che se ne deriva darà la *precessione lineare*. Essendo scoperta la scatola del vapore si verificherà questa misura lineare pel viaggio percorso dal cappello contato dalla sua seconda fase.

30. Quanto agli orli, a scatola scoperta si possono misurare con ogni esattezza. Di fatto confrontando la larghezza della luce coll'ala del cappello e misurando esattamente l'orlo esterno, risulterà pure determinato l'orlo interno, quando vi sia. Non sarà peraltro, io credo, tempo perduto l'accennare come si possano determinare questi medesimi elementi a macchina montata ed in lavoro. Sciolgasi intanto un cappello dal suo eccentrico, quando è giustamente in seconda fase, cioè quando copre esattamente le due luci. Questa posizione si determina

col viaggio della biella; bisogna che la rotazione sia di novanta gradi, presa dalla posizione fondamentale. Allora, messa la macchina così che l'altro cappello sia in seconda fase, aperto il regolatore e messa in moto, si noti l'istante in cui entra sibilando il vapore nella scatola: il viaggio fatto misurerà l'orlo esteriore, che si caverà benissimo dalla rotazione delle ruote motrici colle formule che abbiamo messo. Infatti essendo $c = 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\mu$, a cappello in seconda fase avremo $\mu = 90^\circ$, e se sarà seguíta la rotazione $\rho$, da quella positura al primo sibilo del vapore entrante nella scatola sarà $e + r = 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(90^\circ + \rho)$, ed $r$ la larghezza dell'orlo.

Continuando il moto fluirà vapore nel cilindro fino a che ritornando indietro il cappello chiuda la luce. Allora deve essere $c = e + r$ e $\mu = 270^\circ - \rho$. Mano a mano che il cappello viene indietro rimane il vapore chiuso fino a che il lembo interno dell'ala trapassa il lembo interno della luce. A questo movimento il vapore che sfiata dal fumaiuolo darà indizio della posizione del cappello. Dalla rotazione seguíta fra $270^\circ - \rho$ e quel punto si avrà la somma della lunghezza de' due orli. Confrontando questa somma colla lunghezza dell'orlo esterno, già misurato, ricaveremo quella dell'orlo interno.

Con queste indagini non si potrà riconoscere la larghezza della luce nè quella dell'ala, ma avrannosi gli elementi necessarii al calcolo dei varii periodi della macchina.

31. Abbiamo messo questi cenni sopra la maniera di valutare a macchina montata, ed anche a macchina in lavoro, alcuni importanti elementi; riputando ben necessario che un ingegnere disposto a sorvegliare l'esercizio della locomotiva possa ad ogni momento, quando il crede, verificare alcuni dati tanto importanti, e per mostrare che colle formule messe dapprima si può farlo con molta esattezza.

32. Avendo considerato dapprima il cappello coll'orlo esterno, e detto come, data che sia la precessione, si possono calcolare tutti i periodi; veggiamo adesso l'influenza dell'orlo interno, che supporremo di larghezza $r'$. Intanto l'angolo $\rho$ di rotazione oltre i $90^\circ$, per cui

il cappello si avanza dell' orlo esterno e permette l'ingresso al vapore, rimane il medesimo. Indietreggiando poi il cappello quando la luce è chiusa, cioè quando $c = e + r$ la rotazione sarà $270^\circ - \rho$. Da questo istante rimarrà intercettato l' accesso al vapore sino a che sia $c = e - r'$. Per calcolare la rotazione che occorre sia

$$e - r' = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(270^\circ + \rho') = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(90^\circ - \rho')$$

e $\rho + \rho'$ esprimerà quel tanto di che deve ruotare la macchina durante l'espansione del vapore.

Di qui si vede che supponendo lo stantuffo nella posizione fondamentale, il cappello sarà avanzato di $90^\circ + \omega$, e perciò fluirà vapore ad operare la spinta dell' embolo, sino a che tornando addietro il cappello abbia l' eccentrico ruotato, riguardo alla posizione fondamentale, di $270^\circ - \rho$: così la spinta durerà per una rotazione di $180^\circ - \omega - \rho$. Durante la consecutiva rotazione di $\rho + \rho'$ seguirà l' espansione, dopo di che scaricandosi il vapore, e l' embolo non avendo per anco terminata la corsa, seguirà lo scarico a spinta, onde tal periodo avrà la durata di $\omega - \rho'$.

Lo scarico cessa quando il cappello, riguardo alla posizione fondamentale, è in $90^\circ - \rho'$, quindi lo scarico a contropressione dura per $180^\circ - \omega - \rho'$. A questo periodo succede quello della compressione che dura per $\rho + \rho'$, e finalmente ha luogo la controspinta che dura per $\omega - \rho$, angolo che insieme ai precedenti compie i $180^\circ$.

33. Anche qui metteremo in tabella la successione dei periodi per le due faccie dell' embolo durante una doppia corsa, notando che i periodi sulle due faccie non corrispondono sì esattamente come quando manca l' orlo interno, e che secondo la sua grandezza possono trovarsi in diverse condizioni le due faccie.

| | |
|---|---|
| Corso del cappello . . . . . | $2e$ |
| Orlo esterno del cappello . . . . . | $r$ |
| Orlo interno del cappello . . . . . | $r'$ |
| Precessione lineare . . . . . | $r + p$ |

Angolo di rotazione per l' avanzamento dell' orlo esterno $\rho$

» » » » interno $\rho'$

Precessione angolare . . . . . $\omega$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\rho)=\sqrt{\frac{e+r}{2e}} \qquad \operatorname{sen}\rho=\frac{r}{e}$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ-\rho')=\sqrt{\frac{e-r'}{2e}} \qquad \text{ovvero} \qquad \operatorname{sen}\rho'=\frac{r'}{e}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\omega)=\sqrt{\frac{e+r+\rho}{2e}} \qquad \operatorname{sen}\omega=\frac{r+\rho}{e}$$

| Faccia posteriore dell' embolo | | Faccia anteriore dell' embolo | |
|---|---|---|---|
| $180^\circ-\omega-\rho$ | Spinta | $180^\circ-\omega-\rho'$ | Scarico a contropress.ne |
| $\rho+\rho'$ | Espansione | $\rho+\rho'$ | Compressione |
| $\omega-\rho'$ | Scarico a spinta | $\omega-\rho$ | Controspinta |
| $180^\circ-\omega-\rho'$ | Scarico a contropressione | $180^\circ-\omega-\rho$ | Spinta |
| $\rho-\rho'$ | Compressione | $\rho+\rho'$ | Espansione |
| $\omega-\rho$ | Controspinta | $\omega-\rho'$ | Scarico a spinta |

34. Anche qui faremo un esempio numerico prendendo i dati relativi alla macchina Monge di Stephenson secondo che è messo dal Mathias. Per questa macchina è

$$2g=0^m,457;\quad b=1,519;\quad r=0,018;\quad r=0,003;\quad \rho=0,004;\quad 2e=0,096.$$

Quindi troveremo

$$\rho=22^\circ.1',4;\quad \rho'=3^\circ.35';\quad \omega=27^\circ,16'.8.$$

Con questi numeri formeremo la seguente tabella.

*Angoli corrispondenti ai varii periodi nella doppia corsa per la Macchina* Monge *di Stephenson.*

| Faccia posteriore | | Faccia anteriore | |
|---|---|---|---|
| Spinta per un angolo | 130°.41′,8 | Scarico a contropress.ne | 149°. 8′,2 |
| Espansione. . . . . | 25. 36, 4 | Compressione . . . . . | 25. 36, 4 |
| Scarico a spinta . . . . . | 25. 41, 8 | Controspinta. . . . . | 5. 15, 4 |
| Scarico a contropressione | 149. 8,2 | Spinta . . . . . | 130. 41, 8 |
| Compressione . . . . . | 25. 36, 4 | Espansione. . . . . | 25. 36, 4 |
| Controspinta. . . . . | 5. 15, 4 | Scarico a spinta. . . . | 25. 41, 8 |

Potremo anche confrontare i periodi per una semplice corsa nel seguente modo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Spinta . . . . . | 130°. 41′, 8 | Scarico a contropressione | 130°. 41′, 8 |
| | | | 18. 26, 4 |
| Espansione . . . | 18. 26, 4 | Compressione. . . . . | 7. 10, 0 |
| | 7. 10, 0 | | 18. 26, 4 |
| Scarico a spinta. | 18. 26, 4 | | |
| | 5. 15, 4 | Controspinta . . . . . | 5. 15, 4 |

Così si vede manifestamente come l'orlo interno influisca sui periodi e complichi l'andamento delle differenti azioni che si esercitano sull'embolo.

35. Anche nella macchina che ora consideriamo le due fasi dell'embolo non sono uguali, nè sono uguali le lunghezze lineari de' periodi analoghi dinanzi e di dietro lo stantuffo.

La prima fase dell'embolo è $0^m,1941$, mentre la seconda è $0^m,2629$. Così l'angolo di cui deve ruotare la manovella oltre i 90° perchè l'embolo arrivi alla metà dell'intera corsa è di gradi quattro e mezzo circa.

36. Siccome la lunghezza della biella non è grandissima riguardo alla corsa, i periodi della medesima natura dinanzi e di dietro all'em-

bolo sono espressi per varie parti della corsa. Anche riguardo alla locomotiva *Monge* poniamo una tabella analoga a quella che precedentemente fu posta per la *Rapida*.

*Misure lineari corrispondenti ai varii periodi nel giuoco del vapore in una doppia corsa nella Locomotiva* Monge *di Stephenson.*

| Faccia posteriore | | | Faccia anteriore | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Spinta . . . . | $0^m,3676$ | | Scarica a contropressione . . . | 0,3676<br>0,0525 | 0,4201 |
| Espansione . . | 0, 0525<br>0, 0148 | 0, 0673 | Compressione . . | 0,0148<br>0,0210 | 0,0358 |
| Scarico a spinta . . . . . | 0, 0210<br>0, 0011 | 0, 0221 | Controspinta. . . | 0,0011 | ...0,0011 |
| Scarico a contropressione | 0,38737<br>0,04180 | 0,42917 | Spinta . . . . . | 0,38737 | ...0,38737 |
| Compressione | 0,01134<br>0,01567 | 0,02701 | Espansione . . . | 0,04180<br>0,01134 | 0,05314 |
| Controspinta | 0.00082 | ...0,00082 | Scarico a spinta . | 0,01567<br>0,00082 | 0,01649 |

Anche in questa tabella, come abbiamo veduto per la *Rapida*, si manifesta la differenza de' periodi analoghi sulle due faccie. Mentre la spinta dura sulla faccia posteriore per $0^m,3676$, sulla anteriore dura per 0,38737 cioè per due centimetri circa di più; l'espansione che sulla faccia posteriore dura per 0,0673, sull'anteriore si esercita per 0,05314, quattordici millimetri circa di meno.

Scorgesi poi anche in questo caso che la controspinta tanto nell'una che nell'altra faccia dura per piccolissimo tratto della corsa, appena per un millimetro, onde si fa palese che il controlavoro del vapore ch'entra prima che l'embolo abbia terminato la sua corsa è piccolissimo. Quanto alla durata in tempo de' periodi, siccome la mac-

china viaggia uniformemente, si desumerà dagli angoli e perciò i periodi analoghi saranno ugualmente lunghi.

37. A meglio rilevare la influenza dell' orlo interno poniamo che il cappello della *Rapida* oltre all' orlo esteriore venisse munito di orlo interno della larghezza di 0,003, e facciamo i calcoli relativi a questa nuova disposizione.

Sarà per questo caso:

$$g=0,232;\ b=1,439;\ 2e=0,115;\ r=0,023;\ r'=0,003;\ p=0,004$$

Perciò troveremo

$$\rho=23°.34',8;\ \rho'=2°.59',4;\ \omega=28°.0',0$$

Dietro questo formeremo le seguenti tabelle:

*Angoli corrispondenti ai varii periodi nella doppia corsa nella Macchina la* Rapida *con orlo interno.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Spinta per un angolo. . | 128°. 25′, 2 | Scarico a contropress.ne | 149°. 0′,6 |
| Espansione . . . . . | 26. 34, 2 | Compressione . . . . . | 26. 34, 2 |
| Scarico a spinta . . . . . | 25. 0, 6 | Controspinta . . . . . | 4. 25, 2 |
| Scarico a contropressione | 149. 0, 6 | Spinta . . . . . | 128. 25, 2 |
| Compressione . . . . . | 26. 34, 2 | Espansione. . . . . | 26. 34, 2 |
| Controspinta . . . . . | 4. 25, 2 | Scarico a spinta . . . . | 25. 0, 6 |

Confrontando questa tabella con quella del numero 22 si trova che l'espansione è cresciuta di quanto è diminuito lo scarico premente e che cresce la compressione di quanto è diminuito lo scarico a contropressione. Vi deve dunque essere un qualche vantaggio, attesochè l'espansione è ben più vantaggiosa dello scarico premente che comincia con forza del vapore uguale a quella con cui termina l'espansione: e quanto all' aumento nella compressione la perdita dev' essere minore, tanto più che la diminuzione dello scarico a contropressione vi rimedia ancora.

38. Avendo analizzato l' andamento della distribuzione del vapore nel cappello senza orlo, nel cappello con orlo esterno, nel cappello

munito d'ambedue gli orli, tocca adesso di esaminare un' altra disposizione, che fu seguíta in qualche locomotiva, dello smanco interno. Allora quando il cappello è in prima fase, cioè quando è posto ugualmente riguardo alle due luci d'immissione, nella parte interna non le chiude, ma avanza scoperta per ogni luce una porzioncella per la quale può il vapore comunicare colla luce di scarico. È chiaro intanto che l'orlo esterno deve superare lo smanco interno, altrimenti il vapore potrebbe per una certa parte della corsa entrare e fluire senza adoperare tutta la sua forza sull'embolo. Prima di applicare il calcolo veggiamo l'andamento generale del giuoco del vapore. Ammettendo una precessione il vapore spingerà l'embolo fino a tanto che il cappello indietreggiando copra la luce. Allora rimarrà intercettata la luce sino a che passa l'eccesso dell'ala sulla larghezza della luce medesima. Apertasi la comunicazione colla luce di scarico avrà luogo lo scarico del vapore a spinta favorevole, fino a che l'embolo termini la corsa. Continuerà lo scarico, ma premente contro il cammino dell' embolo fino a che, pel moto diretto del cappello, sia chiusa la luce di scarico. Allora per quel cammino che occorre al cappello onde avanzi di una quantità eguale all'eccesso dell' ala nella larghezza della luce, il vapore sarà compresso; finalmente affluendo il vapore avrà luogo la controspinta.

39. Sia $2e$ la corsa del cappello; $r$ l'orlo esteriore; $r+p$ la precessione lineare, $s$ lo smanco. Sia $\rho$ l'angolo di che l'eccentrico deve ruotare perchè il cappello avanzi nella seconda fase della quantità $r$; sia $\omega$ l'intera precessione. Sia poi $\gamma$ l'angolo di che deve ruotare l'eccentrico perchè il cappello avanzi nella seconda fase da chiudere la luce, cioè perchè avanzi nella seconda fase della quantità $s$.

La spinta durerà per una rotazione $180^\circ - \omega - \rho$; l'espansione durerà per una rotazione $\rho - \gamma$, e lo scarico a spinta durerà per una rotazione $\omega + \gamma$. Lo scarico a contropressione continuando fino a che il lembo interno del cappello chiude la luce corrisponderà alla rotazione $180^\circ - \omega + \gamma$. La compressione corrisponderà alla rotazione $\rho - \gamma$ e la controspinta finalmente durerà per la rotazione $\omega - \rho$. Gioverà anche in questo caso mettere le formule e la tabella.

Corsa del cappello . . . . . $2e$
Orlo esterno del cappello . . . . . $r$
Smanco interno . . . . . $s$
Precessione lineare . . . . . $r+p$
Angolo di rotazione per l'avanzamento dell'orlo esterno . $\rho$
Angolo di rotazione per avanzamento uguale allo smanco . $\gamma$
Precessione angolare . . . . . $\omega$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\rho)=\sqrt{\frac{e+r}{2e}} \qquad \operatorname{sen}\rho=\frac{r}{e}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\gamma)=\sqrt{\frac{e+s}{2e}} \qquad \text{ovvero} \qquad \operatorname{sen}\gamma=\frac{s}{e}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90^\circ+\omega)=\sqrt{\frac{e+r+p}{2e}} \qquad \operatorname{sen}\omega=\frac{r+p}{e}$$

| Faccia posteriore dell'embolo | | Faccia anteriore dell'embolo | |
|---|---|---|---|
| $180^\circ-\omega-\rho$ | Spinta | $180^\circ-\omega+\gamma$ | Scarico a contropress.ne |
| $\rho-\gamma$ | Espansione | $\rho-\gamma$ | Compressione |
| $\omega+\gamma$ | Scarico a spinta | $\omega-\rho$ | Controspinta |
| $180^\circ-\omega+\gamma$ | Scarico a contropressione | $180^\circ-\omega-\rho$ | Spinta |
| $\rho-\gamma$ | Compressione | $\rho-\gamma$ | Espansione |
| $\omega-\rho$ | Controspinta | $\omega+\gamma$ | Scarico a spinta |

Del resto confrontando questa tabella coll'altra del numero 33 si scorge che basta fare in quella $\rho'=-\gamma$, cioè che lo smanco figuri come un orlo negativo interno.

40. Per fare un esempio anche in questo sistema prenderemo dal Mathias i dati relativi alla Locomotiva *Creusot:*

Ivi è

$$2g=0,464;\ b=1,410;\ 2e=0,071:\ r=0,01;\ s=0,005;\ p=0,005$$

Troveremo perciò

$$\rho = 16^{\circ}.\,21',6\,;\ \gamma = 8^{\circ}.\,6'\,;\ \omega = 24^{\circ}.\,59',4$$

de' quali valori $\rho$ ed $\omega$ combinano con quelli della tavola di Mathias, $\gamma$ ne differisce per mezzo grado.

Con questi numeri formeremo il seguente prospetto.

*Angoli corrispondenti ai varii periodi nella doppia corsa per la macchina* Creusot.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Spinta per un angolo . . | 138.°39′,0 | Scarico a contropressione | 163.° 6,6 |
| Espansione . . . . . | 8. 15, 6 | Compressione. . . . . | 8. 15, 6 |
| Scarico a spinta . . . . . | 33. 5, 4 | Controspinta . . . . . | 8. 37, 8 |
| Scarico a contropressione | 163. 6, 6 | Spinta . . . . . | 138. 39, 0 |
| Compressione . . . . . | 8. 15, 6 | Espansione . . . . . | 8. 15, 6 |
| Controspinta. . . . . | 8. 37, 8 | Scarico a spinta . . . . | 33. 5, 4 |

Questa tabella può disporsi anche nel modo seguente per ricavare subito ad occhio le alternative di azioni contemporanee sulle due faccie dell' embolo.

*Angoli corrispondenti ai varii periodi nella doppia corsa per la Macchina* Creusot.

| Faccia posteriore | | Faccia anteriore | |
|---|---|---|---|
| Spinta per un angolo . . | 138.°39′,0 | | |
| Espansione . . . . . | 8. 15, 6 | Scarico a contropress.ne | 163°. 6′, 6 |
| Scarico a spinta . . . . . | 16. 2, 0 | | |
| Scarico a spinta . . . . . | 16. 53, 4 | Compressione . . . . . | 8. 15, 6 |
| | | Controspinta. . . . . | 8. 37, 8 |
| Scarico a contropressione | 163.° 6, 6 | Spinta . . . . . | 138. 39, 0 |
| | | Espansione. . . . . | 8. 15, 6 |
| | | Scarico a spinta . . . . | 16. 12, 0 |
| Compressione . . . . . | 8. 15, 6 | Scarico a spinta . . . . . | 16. 53, 4 |
| Controspinta . . . . . | 8. 37, 8 | | |

Anche qui riporteremo le misure lineari dei tratti percorsi dall'embolo ne' varii periodi, per mostrare come differiscano in lunghezza i periodi del medesimo nome che corrispondono dinanzi e di dietro all'embolo.

*Misure lineari corrispondenti ai varii periodi nel giuoco del vapore durante una doppia corsa nella Locomotiva* Creusot.

| Faccia posteriore | | Faccia anteriore | |
|---|---|---|---|
| Spinta | 0.3978 | Scarico a contropressione | 0.4524 |
| Espansione | 0.0229 | | |
| Scarico a spinta | 0.0317 | | |
| Scarico a spinta | 0.0116 | Compressione | 0.0086 |
| | | Controspinta | 0.0030 |
| Scarico a contropressione | 0.4556 | Spinta | 0.4145 |
| | | Espansione | 0.0176 |
| | | Scarico a spinta | 0.0235 |
| Compressione | 0.0062 | Scarico a spinta | 0.0084 |
| Controspinta | 0.0022 | | |

Vedesi perciò che la spinta sulla faccia anteriore dura per 0.4145, mentre che sulla faccia posteriore vale solo per 0.3978 cioè per 17 millimetri di meno; così l'espansione che sulla faccia anteriore è solo di 0,0176, sulla posteriore si esercita per 0.0229 cioè per 5 millimetri di più: e simili osservazioni possono farsi pegli altri periodi.

## III. *Dell'espansione variabile secondo l'apparato di* Majer.

41. Nel libretto che ho pubblicato poco fa sulla Locomotiva, e che intitolai *Idea generale della Locomotiva,* perchè l'unico scopo era quello di far conoscere l'essenziale di questa macchina meravigliosa alla generalità de' lettori, ho messo in fine e con qualche particolarità di figure l'apparato con cui il Majer ottenne l'espansione variabile. Avendo

accennate le condizioni generali, mi riserbai ad altro momento di sviluppare le formule ed i calcoli opportuni che non poteano convenire a quel libro, ed eccomi in questa Memoria a compiere, per quanto è in me, la fatta promessa.

E qui metto la figura (3) delle parti essenziali di questo apparato. Sul cappello ingrossato all'intorno e scavato lateralmente con due canaletti pei quali può il vapore, quando rimangono aperte le luci, insinuarsi nel cilindro, scorrono due piastre con moto di va e vieni. Queste due piastre sono attraversate da spranga incavata a viti opposte a spira inversa onde possono allontanarsi ed avvicinarsi. Allorchè una piastra copre l'apertura che è nel cappello, quando pure l'ala lasciasse libera la luce di afflusso, vapore non potrebbe penetrare nel cilindro. Per qual maniera quelle piastre si possano avvicinare od allontanare non ci fermiamo qui a dirlo; basta ricordare che un eccentrico dominando l'asta delle viti, le piastre sono mosse indietro e innanzi come il cappello, e che nel medesimo movimento di andata e ritorno possono facilmente allontanarsi ed avvicinarsi. Veniamo alle formule.

42. Dicendo $2v$ la corsa del sopracappello, che così chiamiamo l'apparato dell'espansione variabile, e dicendo $\mu''$ l'angolo di che ha ruotato l'eccentrico, contando sempre quest'angolo dalla posizione fondamentale posteriore e dicendo $s$ il viaggio che han fatto quelle piastre per quella rotazione, sarà al solito

$$s = 2v \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu'' : \qquad \text{ovvero} \qquad s = v(1 - \cos \mu'')$$

Questa formula può aversi per esatta essendo breve la corsa in confronto della lunghezza della biella che domina l'apparato.

Mettiamo che quando il sopracappello si collocasse nella posizione fondamentale ed anche il cappello, la distanza fra il lembo posterior della piastra ed il lembo posteriore della luce, che è da quella parte nel cappello, sia $m$. Per confrontare la posizione del sopracappello e del cappello è chiaro che, essendo $\mu'$ la rotazione dell'eccentrico relativo al cappello, dovremo confrontare

$$2v \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu'' \text{ con } m + 2e \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\mu'$$

Chiamando pertanto $d$ la distanza fra il lembo posteriore della luce, ed il lembo posteriore del sopra cappello, sarà

$$d = m + 2\,e\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\mu' - 2\,v\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\,\mu''$$

ovvero

$$d = m + e\,(1 - \cos\mu') - v\,(1 - \cos\mu'')$$

Fino a che $d$ è positivo, la luce scavata nel cappello è chiusa, nè può il vapore entrare nel cilindro. Quando $d$ è negativo, quella luce rimane scoperta, e se l'ala non copre la luce d'ingresso nel cilindro. il vapore potrà entrarvi; che se l'ala copre la luce, allora, quantunque il vapore s'insinui ne' canali laterali del cappello, non potrà penetrare nel cilindro. Quindi è che qualunque siasi $d$, non vi sarà efflusso di vapore che nel periodo di spinta, ed in questo poi fino a che sia $d$ negativo. Per questo se faremo che $d$ sia negativo per un certo numero di gradi, per l'angolo corrispondente alla spinta, per tal angolo seguirà afflusso, e dopo, cessando, avrà luogo l'espansione che si collegherà a quella operata dall'orlo o dagli orli del cappello.

43. Assumiamo

$$\mu' = 90^\circ + \omega + \mu\,; \qquad \mu'' = \alpha + \omega + \mu$$

e sarà

$$d = m + e - v + e\,\mathrm{sen}\,(\omega + \mu) + v\cos(\alpha + \omega + \mu)$$

ossia

$$d = m + e - v + [e\,\mathrm{sen}\,\omega + v\cos(\alpha + \omega)]\cos\mu + [e\cos\omega - v\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \omega)]\,\mathrm{sen}\,\mu$$

e ponendo

$$e\,\mathrm{sen}\,\omega + v\cos(\alpha + \omega) = h\,\mathrm{sen}\,i$$

$$e\cos\omega - v\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \omega) = h\cos i$$

avremo

$$d = m + e - v + h\,\mathrm{sen}\,(i + \mu).$$

In questa equazione bisogna poter determinare $m$ in modo che per valore determinato di $\mu$, $d$ risulti nullo, essendo prima negativo. Per mostrare come ciò si possa ottenere in caso semplice, supponiamo $e = v$, $\omega = 0$, ed avremo

$$e\cos\alpha = h\,\mathrm{sen}\,i\,, \qquad e - e\,\mathrm{sen}\,\alpha = h\cos i$$

alle quali equazioni si soddisfa con

$$i = -45^\circ \ , \quad h = e\sqrt{2}$$

laonde avremo

$$d = m + e\sqrt{2} \,.\, \text{sen}\,(\mu - 45^\circ)$$

Perchè il sopracappello impedisca l'ingresso al vapore dovrà essere questa espressione positiva da $\mu = 0$ a $\mu = 180^\circ$, quindi basterà fare $m = e$. Perchè sia negativa da $\mu = 0$ a $\mu = 90^\circ$ faremo $m = -e$. Volendo che sia sempre negativa faremo $m = -e\sqrt{2}$.

44. Del resto esaminando bene l'andamento di questa quantità troveremo non potersi passare successivamente per tutti i gradi intermedii di espansione variabile. Intanto bisogna prendere $\alpha = 180^\circ$ perchè il sopracappello sia simmetricamente disposto riguardo ai due fori laterali del cappello, e che perciò operi ugualmente dinanzi e di dietro; poi siccome il massimo valore del seno è l'unità e perciò corrispondente all'angolo $\mu = 135^\circ$, a tal angolo corrisponde il massimo valore positivo. Così avremo $d = m + e\sqrt{2}$.

Ora se si volesse che a tal angolo cominciasse l'espansione non vi potremo riuscire, perchè facendo $m = -e\sqrt{2}$ siccome col crescere di $\mu$ cala il seno, rimarrebbe $d$ negativo, lo che indica ingresso del vapore nel cilindro. Che se facessimo $m = < e\sqrt{2}$ cesserebbe di affluire vapore prima di $\mu = 135^\circ$, ma in alcuni casi dopo tal angolo tornerebbe ancora a fluire vapore nel cilindro, prima che l'embolo termini la corsa. Per convincersi di questo basta mettere $\mu = 120^\circ$; avremo allora $d = m + 1{,}366e$, per cui facendo $m = -1{,}366e$ da $\mu = 0$ a $\mu = 120^\circ$ entrerebbe vapore nel cilindro. Se ora calcoliamo $d$ per $\mu = 160^\circ$ sarà

$$d = -1{,}366e + 1{,}281e = -0.085e$$

cioè negativo, lo che significa afflusso di vapore.

Che anzi per sapere fino a che punto si possa ottenere l'espansione basta notare che per $\mu = 180^\circ$ abbiamo $\mu - 45 = 135^\circ$, che dai $90^\circ$ e prima e dopo tornano i medesimi seni, e che perciò il vapore non si può dominare nell'afflusso se non che ai $90^\circ$, a metà circa della corsa. Così il calcolo mostra quello che a prima giunta non sarebbesi preveduto, cioè che mentre possiamo togliere interamente il

vapore e darlo interamente, i gradi di espansione non si possono regolare che fino alla metà della corsa.

45. A sviluppare meglio questo argomento consideriamo i dati messi dal Mathias, riguardo alla espansione variabile del Majer. Ivi è

$$2e = 0^m,095;\ 2v = 0,115;\ r = 0,003;\ r' = 0;\ p = 0,005,$$

e perciò sarà

$$\rho = 3^\circ.37',2;\ \omega = 9^\circ.41',7$$

con lieve divario dai numeri messi in quell'opera.

Si troverà perciò

$$d = m - 0,01 + 0,07458 \operatorname{sen}(\mu - 40^\circ.44',9).$$

La spinta dura per un angolo $\mu = 180^\circ - \omega - \rho$ cioè per $166^\circ.41',1$. Ora a $\mu = 130^\circ.44',9$ il seno diventa massimo e di qua e di là assume uguali valori. Se adunque facessimo $m = -0,06458$, per quell'angolo sarebbe $d$ nullo, di qua e di là negativo, cioè libero l'ingresso al vapore. Facendo che $d$ si annulli per $\mu = 110^\circ 44',9$ dovremo fare $m = -0,06008$ per cui sarà

$$d = -0,07008 + 0,07458 \operatorname{sen}(\mu - 40^\circ.44',9)$$

Allora si vede che da $\mu = 0^\circ$ a $\mu = 110^\circ.44',9$ il vapore entra nel cilindro e sospinge l'embolo, che dai $110^\circ.44',9$ ai $130^\circ.44,9$ non può entrare vapore essendo coperta dal sopracappello la luce, e che dai $130^\circ.44',9$ ai $166^\circ.41',1$ torna il vapore a lavorare.

46. Perchè l'espansione variasse per tutti i gradi dovrebbe essere $i = 90^\circ$, mentre allora il $\operatorname{sen}(\mu - 90^\circ)$ comincierebbe dal massimo valor negativo e terminerebbe col massimo positivo, supponendo di variare $\mu$ da $0^\circ$ a $180^\circ$, ed una volta che vi fosse accomodato $m$ a rendere $d = 0$, rimarrebbe poi sempre $d$ positivo. Ma quando si considera che $\alpha$ deve essere $180^\circ$, affinchè l'apparato dell'espansione sia simmetricamente disposto riguardo alle due luci, quella condizione di $i = 90^\circ$ porta l'altra di $e\cos\omega + v\operatorname{sen}\omega = 0$, che per $\omega$ positivo non può essere soddisfatta.

47. Di qui si vede che a regolare l'espansione non rimane altro mezzo se non quello di ammettere una espansione intermedia alle due parti della spinta, cosicchè prima entri vapore e sospinga l'embolo,

poi segua una espansione, indi torni la spinta per dar luogo all'ultima espansione. Allora per confrontare la durata della spinta con quella dell'espansione dovremo sommare i due angoli, separati dall'espansione, pei quali entra vapore. Nell'esempio poco fa accennato la prima spinta dura da 0° a 110°.44′,9, poi per altri 15°.56′,2; in tutto per 126°.41′,1. E la prima espansione dura per 40°, l'ultima per 3.°37′,2.

48. Ammettendo quest'alternativa di spinta e di espansione veggiamo come sarebbe da determinarsi la quantità $m$. Sia $\lambda$ la somma dei due angoli pei quali si vuole duri la spinta; l'angolo dell'espansione intermedia sarà $180°-\omega-\rho-\lambda$, la metà $90°-\frac{1}{2}(\omega+\rho+\lambda)$; tolto da 90° avremo

$$\frac{1}{2}(\omega+\rho+\lambda)$$

e perciò dovrà essere

$$\mu-i=\frac{1}{2}(\omega+\rho+\lambda)$$

quell'angolo pel quale si annulla $d$. Nell'esempio precedente essendo $\lambda=126°.41',1$ troveremo $\mu-i=70°$; e così da $\mu-i=70°$ a $\mu-i=110°$ durerà l'espansione intermedia.

49. Noteremo ancora un'altra cosa. La durata della spinta e dell'espansione fu calcolata per angolo, mentre il lavoro dinamico del vapore bisogna riportarlo a frazioni della corsa. Ecco il modo di regolarsi nella valutazione degli angoli. Si determina dapprima la parte di corsa per la quale dura la spinta senza l'intervento del sopracappello e ciò col mezzo dell'equazione

$$s=2g\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\mu.\left\{1-\frac{g}{b}\cos^2\frac{1}{2}\mu\right\}$$

mettendo $\mu=180°-\omega-\rho$. Dopo questo si determina quel tanto di corsa per la quale si vuole che affluisca vapore. Dicendosi $s'$ questa parte, calcoleremo un valore di $\mu$, che diremo $\mu'$, corrispondente a quello $s'$, e ciò o per false posizioni col soccorso delle precedenti equazioni, o direttamente col soccorso dell'equazione (7) ricavata da queste. Se per

tutto l'angolo consecutivo a $\mu'$, per arrivare a $180^\circ - \omega - \rho$, è $d$ positivo, cioè non entra vapore nel cilindro, il problema è risoluto. Altrimenti bisogna introdurre due periodi di espansione nella corsa dell'embolo. A determinare poi con esattezza il valore di $m$, che assegna per quel grado di espansione la distanza delle piastre, fatto $\mu + i = 90^\circ$ di qua e di là calcoleremo per $\mu$ i valori di $s$. Vedremo così per qual angolo abbiasi $\frac{s - s'}{2}$. Determinando $m$ in modo che sia

$$m + e - v + h \operatorname{sen}(i + \mu) = 0$$

avremo raggiunto lo scopo, avvegnachè nella spinta $s$ è impedito l'accesso al vapore per un tratto $s - s'$ e perciò l'afflusso durerà per $s - (s - s')$ cioè per $s'$.

Potrebbersi anche stabilire le formule che direttamente conducessero al cercato valore di $m$ per ogni espansione, ma ci asteniamo da questo perchè le formule sono troppo composte ed al calcolo diretto è preferibile quello che ora abbiamo accennato; poi perchè bisogna accomodare il sopracappello ad una media espansione per le due corse di andata e ritorno, mentre, come abbiamo fatto vedere per la lunghezza della biella comparabile col raggio della manovella, i periodi dello stesso nome hanno diversa durata nelle due corse diretta e retrograda.

Abbiamo toccato questo argomento per mostrare come col calcolo si tien dietro alle circostanze del sopracappello e come nell'apparato del Majer per qualche caso bisogna introdurre un'espansione fra due spinte nella medesima corsa, sicchè in quella corsa abbiamo due periodi di spinta e due di espansione.

## IV. *Sulla valutazione del lavoro del vapore nell'espansione.*

50. Il lavoro del vapore che a costante pressione sospinge un embolo si calcola moltiplicando il numero di chilogrammi che rappresentano quella pressione pel viaggio dell'embolo, e perciò se nella corsa non vi fosse che il solo periodo di spinta, il computo riuscirebbe semplicissimo. Ma quando il vapore cessa di affluire e quello

che ormai si trova nel cilindro espandendosi preme ed insegue lo stantuffo, siccome va calando di forza, fa un lavoro che conviene determinare col soccorso del calcolo superiore. Riporterò a questo luogo le due formule proposte perchè almeno si vegga come vi sieno due metodi di computo che forse troppo si scambiano, e perchè si vegga come sarebbe da costruire la formula per la Locomotiva, stando a quei medesimi principii che il Pambour ha esposto e raccomandato nel suo Trattato generale delle macchine a vapore.

51. Una prima maniera di calcolare il lavoro del vapore nella espansione si fonda sulla legge di Mariotte, cioè che la pressione sia nell'inversa del volume. Supponendo pertanto che $B$ sia la base dell'embolo, $x$ l'altezza del cilindro del vapore corrispondente, e $p$ la pressione, il lavoro elementare sarà $p.Bdx$ e $p=\frac{K}{x}$, per cui il lavoro elementare sarà $BK\frac{dx}{x}$. Integrando questa espressione da $x=a$, quando incomincia l'espansione, sino ad $x=a+b$ quando succede all'espansione un altro periodo, sarà il lavoro dinamico espresso da

$$BK\,\text{Log.}\frac{a+b}{a}.$$

Dicendo poi $P$ la pressione del vapore, qual era al principio dell'espansione, quella formula si traduce nell'altra

$$BPa\,\text{Log.}\frac{a+b}{a}$$

Che se $P$ equivale ad $n$ atmosfere assolute, e si prenda per unità di superficie il metro quadrato, e per lineare il metro, avremo quel lavoro espresso da

$$10344.nBa\,\text{Log.}\frac{a+b}{a}$$

dove sarà da usarsi de' logaritmi iperbolici. Che se prenderemo ad unità dei volumi il centimetro cubo, come fa il Mathias, ed useremo dei logaritmi comuni, a quella formula sostituiremo la seguente

$$0.023795\,nV\,\text{Log.}\frac{a+b}{a}$$

dove $a, b$ possono essere espressi in qualsiasi unità, e $V$ va preso in centimetri cubi.

52. All'applicazione di questa formula può opporsi che la legge di Mariotte suppone il gaz sia sempre ridotto alla medesima temperatura, e che quella legge fu dimostrata pei gaz o pei vapori assai remoti dal punto di liquefazione. Per questo il Pambour propose un altro principio, di cui fece uso nel calcolo delle macchine a vapore e nella valutazione dell'espansione. Riporteremo a questo luogo il principio ed il calcolo del Pambour, apparecchiando la formula per le Locomotive, per quei casi nei quali bisogna adoperarlo, mentre egli suppone che nelle Locomotive siavi soltanto il periodo di spinta e di scarico.

53. Quando il vapore al massimo di densità si comprime rapidissimamente o si espande, deve perdere o guadagnare quantità di calorico affatto insensibile. E questo caso presentasi appunto nell'esercizio delle Locomotive, mentre una corsa dura appena un quarto di minuto secondo, e di questo tempo una frazione ed anche picciola appartiene alla compressione, alla espansione. Mettendo che la macchina corra colla velocità di 10 metri al secondo, di 36 chilometri all'ora, che la circonferenza delle ruote sia di cinque metri, avremo quattro corse al secondo; e siccome il periodo di espansione o compressione è di un nono della corsa, tal periodo sarà di $\frac{1}{36}$ di secondo. E quando pure si lavori ad espansione variabile tal periodo durerà per un decimo circa di secondo.

Ritenendo che sia trascurabile la perdita o guadagno di calorico fatto dal vapore, siccome il Pambour adotta la legge di Watt, sostenuta dalle esperienze di Clément, che a vaporizzare una data quantità di acqua occorre il medesimo calorico qualunque siasi la tensione, ritiene egli che il vapore si costituisca al massimo di densità conveniente al nuovo volume, cioè che sia sempre alla massima tensione corrispondente al volume che prende. Su questi dati fonda la sua formula che qui riportiamo.

54. Dicendo $\delta$ la densità massima del vapore a data temperatura.

alla quale corrisponda la pressione $p$, si assume e da Pambour e da Navier e da altri che per l'intervallo dalle una alle cinque atmosfere si possa prendere

$$\delta = c + fp$$

essendo $c$, $f$ due costanti, sulle quali diremo fra poco.

Quando il vapore comincia l'espansione sia $P$ la pressione, $aB$ il volume, $\delta'$ la densità ed avremo

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{Ba}{Bx},$$

ossia

$$\frac{c + fP}{c + fp} = \frac{a}{x}$$

donde si trae

$$p = \frac{a}{x}\left(\frac{c}{f} + P\right) - \frac{c}{f}$$

ovvero

$$p = \frac{a}{x}(m + P) - m,$$

facendo per semplicità di scrittura $\frac{c}{f} = m$. L'effetto dinamico elementare sarà perciò

$$Ba(m + P)\frac{dx}{x} - mB\,dx$$

e l'effetto dinamico totale nel viaggio $b$ sarà

$$Ba(m + P)\,\text{Log.}\frac{a + b}{a} - mBb$$

che può mettersi sotto l'aspetto

$$BaP\,\text{Log.}\frac{a + b}{a} + mB\left\{a\,\text{Log.}\left(1 + \frac{b}{a}\right) - b\right\}$$

dove il primo termine rappresenta l'effetto secondo la legge di Mariotte, l'altro quel tanto per cui differisce l'effetto calcolato col principio ammesso dal Pambour.

55. Essendo $n$ il numero di atmosfere e $V$ il volume di vapore che si espande avremo anche l'effetto espresso da

$$10344.nV\,\text{Log.}\frac{a + b}{a} + mV\left\{\text{Log.}\left(1 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}\right\}.$$

Secondo il Pambour è $m = 3017$ quando $p$ si esprima in chilogrammi per metro quadrato.

Esprimendo $V$ per centimetri cubici avremo perciò

$$0,010334\ n\,V \text{Log.}\frac{a+b}{a} + 0,003017\ V\left\{\text{Log.}\left(1+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}\right\}$$

usando de' logaritmi iperbolici.

Mettendo $n = 4; \frac{b}{a} = \frac{1}{6}; V = 34000$

avremo per effetto $215,67 - 1,184$

dinami, onde si vede la lieve differenza dei due metodi di calcolo.

Facendo $b = 2a$, cioè ammettendo che il vapore nell'espansione occupasse tre volte il volume primitivo, avremmo dinami

$$1444,15 - 92,46.$$

Da questi esempii si fa manifesto che per l'espansione costante delle Locomotive, dipendente dagli orli del cappello, può usarsi della prima formula; ma che nel lavoro della macchina a grande espansione dovremmo tener conto del secondo termine portato dalla teorica del Pambour.

36. Ritenendo pertanto la formula più semplice derivante dalla legge di Mariotte per calcolare il lavoro del vapore nei due periodi di spinta e di espansione, dovremo sommare $B.10334.n.s$, essendo $s$ quella parte di viaggio dello stantuffo cui corrisponde la spinta, con

$$0,023797.\ n\,V \text{Log.}\frac{a+b}{a}.$$

Essendo poi $h$ la libertà del cilindro, sarà $V = B(s+h)$, $a = s+h$, laonde ricaveremo, collo esprimere $V$ in centimetri cubici,

$$\left(0,010334\ \frac{s}{s+h} + 0,023797 \text{Log.}\frac{s+h+b}{s+h}\right) n\,V$$

pel lavoro di quei due periodi, dove $s$ ed $h$ e $b$ possono prendersi in che unità si vuole.

## V. *Sulla valutazione del lavoro del vapore nel periodo utile dello scarico.*

**37.** Abbiamo veduto che per la precessione e pegli orli messi nel cappello, il vapore che ha lavorato durante il primo periodo di spinta, nel consecutivo di espansione si scarica prima che l'embolo abbia terminata la corsa. Questo scarico anticipato vantaggia assai l'effetto dinamico del vapore, prima, perchè appuntandosi contro l'embolo, il preme nel senso medesimo del suo moto; poi, perchè diradandosi, e di molto, fa minore opposizione all'embolo quando ritorna.

Nell'esempio che abbiamo riportato della *Rapida*, supposto che tal macchina avesse orlo interno, lo scarico precede il termine della corsa per 25°, che è qualche cosa più di un nono della semirivoluzione di una ruota. Quindi la contropressione non durerà che per $\frac{8}{9}$. Ma lo scarico fatto per quei 25° riduce il vapore a minore densità, e poi quello scarico dà qualche impulso al vapore. Il sig. Colombani trattando profondamente col calcolo (*) la distribuzione del vapore secondo il sistema di Hawthorn, tentò di tener dietro colla teorica alla contropressione. E se è riuscito a numero medio che supera di molto quello che è raccomandato dai pratici, ne indica le cagioni inerenti alle gravissime difficoltà della questione, all'imperfezione della teorica del movimento de' fluidi elastici. Pure anche da quel dotto tentativo si può travedere la rapidità con cui cala la pressione. Giacchè il Colombani prese a fondamento delle sue ricerche la formula del Navier per l'efflusso de' fluidi elastici, noi esporremo un tentativo, nel calcolo dello scarico, ricorrendo a quella del Bernoulli. Mettiamo queste formule per un lontano tentativo di dare idea del computo di questo importantissimo periodo del lavoro di una Locomotiva.

**38.** Dicendo $v$ la velocità dello scarico quando il vapore è ad una tensione effettiva $e$ abbiamo

(*) Politecnico, anno 1842.

$$v = \sqrt{2\,g\,e\,\frac{m}{\delta}}$$

essendo $m$ la densità del mercurio dalla cui altezza si misura la tensione del vapore. Ammettendo poi $\delta = c + fe$

sarà $$v = \sqrt{2\,g\,m}\sqrt{\frac{e}{c+fe}}$$

Dicasi $l$ la lunghezza della luce, $\lambda$ la larghezza al tempo $t$ contata dal cominciamento dello scarico, sia $h$ il prodotto del coefficiente di contrazione per $\sqrt{2\,g\,m}$, $dQ$ la portata pel tempo infinitesimo $dt$

e sarà $$dQ = h\,l\lambda\,dt\sqrt{\frac{e}{c+fe}}$$

Ora se al tempo $t$ il volume del vapore è $Bx$, al tempo $t+dt$ sarà $B(x+dx)+dQ$, quel primo alla tensione assoluta $e+\varepsilon$, questo alla tensione assoluta $e+\varepsilon-de$, esprimendo con $\varepsilon$ la tensione atmosferica. Avremo perciò

$$\frac{B(x+dx)+dQ}{Bx} = \frac{e+\varepsilon}{e+\varepsilon+de}, \quad \text{ossia} \quad \frac{B\,dx+dQ}{Bx} = -\frac{de}{e+\varepsilon}$$

Adesso dovremmo esprimere $x$ in funzione del tempo ricavando $x$ dalla formula esprimente il moto del cappello, e ritenendo che la macchina corra uniformemente. Lo stesso è da dirsi di $\lambda$ fino a che la luce è tutta aperta, dopo di che rimarrà il fattore $l\lambda$ costante.

Facendo questo cadremmo in formule assai complicate, ed in formule che già non possono concordare col fatto. Per avere una qualche idea supporremo la luce tutta aperta, e nell'espressione

$$\frac{B\,dx+dQ}{Bx}$$

lascieremo $B\,dx$, sostituendo a $Bx$ il volume del vapore al cominciamento dello scarico. Colla prima supposizione rendesi più pronta la diminuzione della tensione del vapore facilitandone lo sfogo, colla seconda si aumenta la tensione in confronto di quella che ha da aver

luogo; sono due supposizioni che tendono a correggersi; non diciamo già vi sia esatto compenso: lo mettiamo come calcolo all'ingrosso e niente più.

Dicendo pertanto $V'$ il volume del vapore al momento dello scarico avremo $\frac{h l \lambda}{V} dt \sqrt{\frac{e}{c+fe}} = -\frac{de}{e+\varepsilon}$.

Mettendo poi per semplicità

$$\frac{h l \lambda}{V} = K \text{ , avremo } K dt = -\frac{1}{e+\varepsilon}\sqrt{f-\frac{c}{e}}\, de$$

Per integrare questa formula facciamo

$$f+\frac{c}{e}=z^2 \text{ ed avremo } -de=\frac{2 z dz}{c} e^2$$

$$e=\frac{c}{z^2-f} \text{ e } K dt=\frac{2 c z^2 dz}{(z^2-f)\left[c+\varepsilon(z^2-f)\right]}$$

Facendo $\frac{A}{z^2-f}+\frac{B}{\varepsilon z^2+c-f\varepsilon}=\frac{2 c z^2}{(z^2-f)(e z^2+c-f\varepsilon)}$

trovasi $A=2f \quad B=2(c-f\varepsilon)$

Mettendo $f=a^2$ , $c-f\varepsilon=\varepsilon b^2$

l'equazione precedente diventa

$$K dt = a^2 . \frac{2 dz}{z^2-a^2}+2 b^2 \frac{dz}{z^2+b^2}$$

Integrando, avremo

$$c+Kt=-a \text{ Log. } \frac{z+a}{z-a}+2\, b \text{ arc. tg. } \frac{z}{b}$$

Rimettendo in luogo di $z, a, b$ i loro valori, con facili riduzioni troveremo

$$c+Kt=-\sqrt{f}\,\text{Log.}\,\frac{\sqrt{(c+fe)}+\sqrt{fe}}{\sqrt{(c+fe)}-\sqrt{fe}}+2\sqrt{\frac{c-fe}{\varepsilon}}\,\text{arc. tg.}\,\sqrt{\frac{(c+fe)\varepsilon}{(c-f\varepsilon)e}}$$

A ridurre in numeri questa formula divideremo $\surd f$ per $M$ modulo dei logaritimi comuni, ossia moltiplicheremo $\surd f$ per 2,3025851; divideremo il coefficiente dell'arco per 3437, 7468 numero dei minuti contenuti nel raggio, e trovato poi l'arco lo convertiremo pure in minuti.

59. Prima di fare un'applicazione numerica osserveremo che la portata del vapore si è calcolata alla densità interiore. Quando infatti si usa della formula e del principio del Bernoulli, il prisma fluido scacciato dal vaso dalla colonna premente deve aver la medesima densità. Così ad una medesima altezza di colonna premente di mercurio o di acqua esce un medesimo volume. E se si dicesse che il vapore sortito deve avere una diversa densità, la massa deve per altro corrispondere a quel volume che si calcola colla densità interiore. D'altra parte le molte esperienze del D' Aubuisson convalidano e le leggi del Bernoulli ed il computo del volume come si è fatto. Vero è che l'esperienze istituite limitaronsi a discrete tensioni effettive; ma già abbiamo detto che è un calcolo all'ingrosso e niente più.

Quanto alla resistenza che soffre il vapore nell'uscita si è creduto di non tenerne conto, perchè non vi sono regole sicure. Si ripete che il nostro computo non può dare che un'idea grossolana di quello che si desidera.

Supponendo che il vapore non varii che dalle cinque ad una atmosfera, la densità può rappresentarsi con discreta approssimazione per $\delta = c + fe$, essendo $e$ la tensione effettiva, $c = 0.00059$, $f = 0.00067$. Così per $e = 0$ si ha $\delta = 0{,}00059$ che corrisponde ad $\frac{1}{1695}$ e per $e = 3{,}04$ quattro atmosfere effettive, si ha $\delta = 0.0026268$ che corrisponde ad $\frac{1}{381}$ valore molto prossimo al giusto.

Ammettendo $V' = 0^{m.c}, 034$; la luce di $0^{m.q}, 01$; il coefficiente di contrazione 0, 65; la tensione effettiva al principio dello scarico di quattro atmosfere, i tempi corrispondenti al calo di mezza in mezza atmosfera sono i seguenti:

dalle quattro ad atmosfere

| | |
|---|---|
| tre e mezza | 0″, 001015 |
| tre . . . . . | 0, 002136 |
| due e mezza | 0, 003480 |
| due . . . . . | 0, 005034 |
| una e mezza | 0, 007020 |
| una . . . . . | 0, 009566 |
| mezza . . . . | 0, 013511 |

Ora, ammettendo che la Locomotiva corra in ragione di 36 chilometri all'ora di dieci metri al secondo, che la circonferenza della ruota sia di cinque metri, per ogni corsa vi vorrà un quarto di secondo. Che se lo scarico a spinta occupa 23 gradi dei centottanta, lo scarico durerà per 0″, 031, tempo maggiore di quello che occorra, secondo il nostro computo, a ridurre il vapore dalle quattro alla mezza atmosfera effettiva.

Di più se calcoleremo dopo quanto tempo il vapore ch'era a quattro atmosfere si equilibra coll'aria troveremo 0″, 025, tempo ancora minore di quello pel quale dura lo scarico a spinta. Vero è che il nostro calcolo è così grossolano da non potervi prestare gran fede, e che d'altra parte non abbiamo tenuto conto di quelle difficoltà che si oppongono alla fuga del vapore, dovendo desso ripiegarsi sotto il cappello e per tortuoso canale fuggire nello scaricatore. Ma che la fuga del vapore avvenga assai sollecita possiamo anche giudicarlo dal fiatare di una Locomotiva quando marcia lentamente. Allora si ascolta l'alternativo sfogarsi del vapore dai due cilindri ed il forte sbuffo dura poco, quasi che in brevissimo tempo si equilibri il vapore del cilindro coll'atmosfera.

A studiare questo periodo dell'esercizio di una Locomotiva sembrerebbe ragionevole di istituire alcune esperienze, dalle quali si potesse argomentare con che rapidità cala la tensione del vapore nel cilindro quando gli si permetta l'uscita. Facile cosa sarebbe di approntare un meccanismo che aprisse la luce per piccole frazioni di secondo, e che, ad ogni sfogo, si avesse la tensione residua.

60. Termineremo queste ricerche, disposte più a mostrare l'importanza del soggetto, che a svilupparlo, notando che a macchina corrente per 24 o 26 chilometri all'ora, a scarico precedente il termine della corsa per 25 o più gradi, forse non si andrà molto lungi dal vero ammettendo che il vapore si equilibri coll'atmosfera, onde all'embolo che ritorna sia solo d'ostacolo la pressione atmosferica. Se questo fosse, apparirebbe manifesto il vantaggio dello scarico precedente il termine della corsa, mentre tutta la spinta che esercita il vapore appuntandosi contro l'embolo e nel senso in che si muove, diventerebbe forza vantaggiosa, tutto al contrario del sistema col quale si sfoga il vapore a corsa compiuta. Così il vantaggio riesce doppio di quella quantità. Per fare un esempio mettiamo che la tensione media sia di due atmosfere, che il cammino dell'embolo sia di 3 centimetri, la sezione del cilindro di centimetri quadrati 845, ed avrebbesi un effetto di 52, 39 dinami e di 105 sarebbe la differenza fra i due sistemi.

## VI. *Sul periodo di contropressione, di compressione e di controspinta.*

61. Quando l'embolo torna indietro deve cacciare innanzi a sè il vapore che ancora si trova nel cilindro. Se il vapore fosse ridotto alla pressione atmosferica basterebbe considerare la spinta valutando la tensione effettiva in luogo dell'assoluta, ma secondo il Pambour quel vapore che fugge ed è inseguito dall'embolo va preso ad una tensione media che dipende dalla velocità della corsa, dalla vaporizzazione, e dall'apertura dello scaricatore. Secondo il Pambour la contropressione è in ragione diretta de' due primi elementi, nell'inversa del terzo, ed a condizioni ordinarie equivale ad un quarto di atmosfera oltre l'esteriore, che vuol dire quando si considera la tensione effettiva del vapore premente bisogna calcolare contropremente un quarto di atmosfera. Su questo dato il Mathias ha messo a confronto la contropressione in molte macchine. Il Colombani, come abbiamo detto, trova la contropressione equivalente ad una media molto maggiore.

Abbiamo già notato precedentemente il grande vantaggio di cominciare lo scarico prima che l'embolo compia la corsa e perchè, ancora che fugga, preme favorevolmente sull'embolo, poi perchè si dirada moltissimo e con lieve forza contropera al ritorno dell'embolo; e per quello che può dirsi in questo argomento difficile sembra che anticipando lo scarico di venti e più gradi debba sfogarsi assai del vapore, onde il residuo si abbassi di tensione a poco più dell'atmosfera. Se questa fosse la media tensione contropremente non potrebb'essere di un quarto di atmosfera sull'ordinaria, avvegnachè nel lungo periodo dello scarico a contropressione vi sarebbe tempo e molto da fare che il vapore si equilibri coll'atmosfera. Lo ripetiamo, alcuni esperimenti diretti a vedere come cali la tensione per efflussi di vapore corrispondenti a picciole frazioni di secondo potrebbero dare gran lume su questo argomento, tanto importante per ben dirigere la distribuzione del vapore nelle Locomotive.

62. Quanto alla compressione dovremo rifare il calcolo esposto per l'espansione. Se $B(a'+b')$ è il volume di vapore ad $n'$ atmosfere, quando comincia quel periodo, ed al termine il volume è ridotto a $Ba'$, il controlavoro del vapore, stando alla legge di Mariotte, sarà espresso da dinami

$$0,023795 \,.\, n' \,.\, V' \,.\, \text{Log.} \frac{a'+b'}{a'}$$

essendo $V'=B(a'+b')$ espresso in centimetri cubici ed usando de' comuni logaritmi.

Quanto al periodo di controspinta si calcola facilmente il controlavoro moltiplicando la pressione esercitata sull'embolo in chilogrammi pel viaggio fatto in quell'intervallo. Siccome tal periodo dura per picciolo angolo di rotazione, e per quell'angolo è lievissimo il moto dello stantuffo, quel controlavoro è sempre picciolissimo. Così la picciola perdita è compensata largamente dall'aver pronto il vapore per operare la spinta e dallo smorzamento graduato della velocità, ed alleviamento degli organi della macchina.

## VII. *Riassunto de' precedenti calcoli e formula pel calcolo del moto permanente d'una Locomotiva.*

**63.** Prima di tutto dalla corsa del cappello $2e$, dagli orli esterno $r$ ed interno $r'$, ovvero dallo smanco interno $s$, e dalla precessione lineare $p$ si determineranno gli angoli di rotazione corrispondenti ai singoli periodi in una doppia corsa. Siccome il calcolo generale e le formule convenienti in varii casi furono messe alla distesa ed illustrate con esempii, non le riporteremo di nuovo a questo luogo.

Determinati gli angoli di rotazione corrispondenti ai varii periodi in una doppia corsa o giramento intero della ruota motrice, calcoleremo il viaggio corrispondente dello stantuffo. Essendo $\mu'$ l'angolo corrispondente al principio di un periodo, $\mu''$ l'angolo corrispondente alla fine, il viaggio dell'embolo sarà dato dalla formula

$$g(\cos\mu' - \cos\mu'') + \frac{g^2}{2b}(\operatorname{sen}^2\mu' - \operatorname{sen}^2\mu'')$$

avvertendo che si bada alla sola grandezza del risultato.

Nella corsa diretta diremo $f, h, l$ i periodi lineari di spinta, di espansione, di scarico utile sulla faccia posteriore; diremo $m, q, t$ i periodi lineari di contropressione, di compressione, di controspinta sull'opposta faccia. Nella corsa retrograda esprimeremo colla medesima lettera accentata gli analoghi periodi lineari.

Così $h'$ esprimerà il viaggio retrogrado dell'embolo mentre dura l'espansione sulla faccia anteriore, ed $m'$ il viaggio retrogrado dell'embolo mentre dinanzi alla faccia posteriore si scarica il vapore che ha lavorato nella corsa diretta. Colle lettere maiuscole del medesimo nome o semplici od accentate indicheremo il lavoro o controlavoro del vapore negli analoghi periodi. Così indicheremo per $T$ il controlavoro del vapore, ch'entrando anteriormente prima che l'embolo abbia terminata la corsa, fa ostacolo al suo movimento.

**64.** Quanto al primo periodo di spinta se il vapore è ad una tensione assoluta di $n$ atmosfere, e sia $B$ la sezione dell'embolo espressa in metri quadrati, sarà il lavoro dato da $10334 \times n B f$.

Nel valutare $B$, dovremo escludere la parte della faccia corrispondente al gambo del medesimo stantuffo. Nella *Rapida* essendo la sezione dello stantuffo di 854 centimetri quadrati, la sezione del gambo, per quanto si ricava dal disegno, corrisponde a quindici centimetri quadrati, quantità non trascurabile.

Del resto a procedere esattamente vi vuole un' altra correzione. Siccome noi teniamo conto della tensione assoluta del vapore per calcolare a suo tempo l'opposizione che fa l'atmosfera esteriore, bisogna considerare che riguardo alla sezione del gambo opera la pressione atmosferica, sicchè al termine precedente calcolato come fu detto bisogna aggiungere

$$10334\, b\, f$$

esprimendo con $b$ la sezione del gambo. Riunendo insieme queste due espressioni pel periodo di spinta sulla faccia posteriore, l'effetto dinamico sarà dato in dinami da

$$F = 10334\, f(b + n\, B)$$

essendo $f$ il viaggio dell'embolo in metri durante la spinta; $b$ la sezione del gambo in metri quadrati, $B$ la sezione dell'embolo diminuita di quella del gambo espressa anch'essa in metri quadrati, ed $n$ il numero di atmosfere misuranti la tensione assoluta del vapore premente.

65. Per valutare giustamente il periodo di espansione bisogna conoscere la quantità di vapore che è nel cilindro e la sua tensione assoluta al cominciamento. Supporremo che la libertà del cilindro e quel vapore che sta nei condotti e quello che è nel tubo lasciato libero dal moto dell'embolo nella spinta sia un volume $B\, a$ espresso in metri cubici. Allora l'effetto dinamico corrispondente a quel periodo sarà in dinami

$$23797 . n\, B\, a \,\mathrm{Log.}\, \frac{a + h}{a}$$

Anche qui a calcolare con esattezza bisogna aggiugnervi la pressione atmosferica sul gambo cioè

$$10334 . b\, h.$$

Riunendo insieme queste due espressioni pel periodo di espansione sulla faccia posteriore dell'embolo avremo

$$\mu = 23797 . n B a \log . \frac{a+h}{a} + 10334 . b h$$

66. Sul periodo di scarico a spinta non possiamo mettere regola precisa. Affinchè per altro nelle formule finali rimanga un segno di quel lavoro del vapore, supporremo che durante quel periodo prema il vapore appuntandosi contro l'embolo con una frazione di $n$ e perciò tal lavoro si esprimerà con

$$10334 . \lambda n B l$$

esprimendo con $\lambda$ quella parte che conviene prendere di $n$. Aggiungendo a questo lavoro l'altro dell'ordinaria atmosfera avremo

$$L = 10334 (\lambda n B + b) l$$

67. Venendo a considerare la faccia anteriore dell'embolo nella corsa diretta, il primo periodo è di contropressione. Secondo il Pambour questa contropressione si calcola colla formula $0,1124 . v \frac{s'}{s}$ essendo $v$ la velocità in chilometri per ora; $s'$ la vaporizzazione totale in metri cubi per ora; $s$ la sezione dell'orifizio dello scaricatore in centimetri quadrati, ed il risultato riportandosi al metro quadrato; cosicchè per la sezione intera $B'$ dell'embolo avressimo

$$0,1124 . v \frac{s'}{s} B'$$

ed il controlavoro $0,1124 . v \frac{s'}{s} B' . m .$

A questo risultato bisogna aggiungere il contrasto della pressione atmosferica cioè $10334\ B'$ e perciò avrebbesi per tal periodo

$$M = (10334 + 0,1124 . v \frac{s'}{s}) B' m$$

Abbiamo per altro osservato che quando lo scarico a contropressione

è preceduto da uno scarico a spinta, per cui il vapore siasi sfogato in gran parte, pare che la regola del Pambour non possa aver luogo, e che conduca a risultati un po' troppo forti. D'altra parte ed il Pambour ed il Mathias considerano che nell'ordinario andamento delle comuni Locomotive si possa assumere per misura della contropressione una frazione di atmosfera. Indicando con $\mu$ questa frazione di atmosfera, d'ordinario il quarto, avremo:

$$M = 10334\,(1+\mu)\,B'\,m$$

Rimarrà da esaminare di nuovo questo argomento per conchiudere sul valore di $\mu$ a seconda dei casi.

68. Tocca adesso dire del periodo di compressione. Per calcolare giustamente il controlavoro del vapore in questo periodo bisognerebbe conoscere il volume del vapore che rimane chiuso e compresso per quell'intervallo, e la tensione assoluta alla quale si trova. Il Mathias suppone che quel vapore sia alla tensione assoluta $1+\mu$. Ma se $\mu$ rappresenta quella media tensione assoluta che contrasta all'embolo, che opera la contropressione, non si potrà prendere certamente per quella che corrisponde al termine dello scarico, al cominciamento della compressione. Noi supporremo che la tensione assoluta sia $1+\varphi$, ritenendo che $\varphi$, generalmente parlando, sia piccola quantità.

Riguardo al volume del vapore lo rappresenteremo per $B'c$. Per avere $c$ bisogna sommare $q$ viaggio dell'embolo nella compressione con $t$ viaggio corrispondente alla controspinta e con quella lunghezza che rappresenta, oltre alla libertà del cilindro, il vapore contenuto ne' condotti. In breve se per una Locomotiva si calcola il volume corrispondente alla libertà del cilindro ed ai condotti e si fa questo tanto per la faccia posteriore che per l'anteriore, quelle due altezze serviranno a calcolare facilmente la quantità $a$ e la $c$. Dopo queste premesse il controlavoro nella compressione sarà valutato dalla formula

$$Q = 23795\,(1+\varphi)\,B'\,c\log\frac{c+q}{c}.$$

69. Per la controspinta, siccome all'aprirsi della luce rapidissima-

mente entra il vapore e si mette alla tensione assoluta alla quale poi lavora, noi esprimeremo il controlavoro del vapore in questo periodo

per $$T = 10334 \,.\, n\, B'\, t$$

piccolissima quantità attesa la picciolezza del cammino $t$.

70. Riunendo tutti questi calcoli, relativi alla corsa diretta, avremo pel lavoro del vapore nella corsa diretta la formula

$$F + H + L - M - Q - T$$

ossia sostituendo i valori analitici ed operando qualche semplice riduzione, quel lavoro sarà dato da

$$10334 \left\{ b(f + h + l) + B(nf + n\lambda l) - B'\left[(1+\mu)m + nt\right]\right\}$$

$$+ 23797 \left\{ nB\, a \log \frac{a+h}{a} - (1+\varphi) B'\, c \log. \frac{c+q}{c} \right\}$$

71. Per la corsa retrograda avremo $F' = 10344 \,.\, n\, B'\, f'$, essendo $B'$ la sezione intera dell'embolo; avremo

$$H' = 23797 \,.\, nB'\, a' \log \frac{a'+h'}{a'}; \qquad L' = 10334 \,.\, \lambda\, nB'\, l',$$

dove per $\lambda$ ritiensi il medesimo coefficiente vista la grande difficoltà di una giusta determinazione e la non grande differenza fra i due periodi di scarico utile di dietro e dinanzi l'embolo.

Poi avremo $$M' = 10334 \left[(1+\mu) B + b\right] m'$$

$$Q' = 23797\,(1+\varphi)\, B'\, c \log \frac{c'+q'}{c'} + 10334\, b\,.\, q'$$

$$T' = 10334\,(nB + b)\, t'$$

Sommando le prime tre quantità e sottraendo le tre seguenti avremo le formule

$$F' + H' + L' - M' + Q' + T'$$

per esprimere il lavoro del vapore nella corsa retrograda. Sostituendo

i valori analitici, ed operando qualche riduzione, si arriverà all'espressione

$$10334\,\{B'(nf'+\lambda nl')-[(1+\mu)m'+nt']B-b(m'+q'+t')\}$$

$$+23797\left\{nB'a'\log\frac{a'+h'}{a'}-(1+\varphi)Bc'\log\frac{c'+q'}{c'}\right\}$$

Riunendo in una sola le due precedenti espressioni avremo il lavoro del vapore nella corsa diretta e retrograda di un embolo, e nel doppio il lavoro del vapore durante la rivoluzione di una ruota. Comunque queste formule possono apparire complicate, siccome per ogni macchina la più parte di quelle quantità sono determinate, così per ogni particolar macchina locomotiva avremo un'espressione della forma

$$n(A+\lambda E)+E\mu+G\varphi$$

e quando si potessero stabilire opportuni valori per $\lambda$, $\mu$, $\varphi$ in locomotiva ordinaria ad ordinario andamento avressimo una espressione semplice $An+E$. Riguardo poi a questa espressione bisogna avvertire che veramente il termine $E$ dipende da $n$, che anzi per $n=1$ dev'essere $A+E$ nullo; ma noi abbiamo messo quei due termini ritenendo che $E$ possa aversi per costante in un corso ordinario della locomotiva, e con tensioni poco diverse dalle consuete. Ad apparecchiare formule per una serie diversa di velocità e di tensioni bisognerebbe conoscere qualche cosa più della natura del vapore.

73. Adesso prendiamo a considerare il lavoro delle resistenze e delle passività. Sia $P$ il numero delle tonnellate corrispondenti al treno e scorta, sia $p$ il peso della locomotiva in tonnellate, $K$ il coefficiente di attrito sulla rotaia, $g$ la pendenza per mille della strada, $\delta$ il coefficiente dell'attrito addizionale, $v$ la velocità in chilometri per ora, $u$ il coefficiente della resistenza dell'aria, $I$ l'attrito della macchina isolata, e per quello che venne esposto dal Pambour la somma delle resistenze e passività sarà espressa da

$$(1+\delta)\{(K+g)P+gp+uv^2\}+I$$

Dicendo poi $D$ il diametro delle ruote motrici, il lavoro delle resi-

stenze e delle passività, durante la rivoluzione di una ruota, sarà

$$(1+\delta)\{K+g)P+gp+uv^2\}\pi D+\pi ID$$

Questo lavoro bisogna confrontarlo con $An+c$ che come abbiamo detto si compone prendendo il doppio del lavoro di un solo embolo nella corsa diretta e retrograda. Quanto a $K$ suggerisce il Pambour di prendere 2, 69 per tonnellata, riguardo a $\delta$ bisogna prendere secondo il medesimo autore 0,137 per le macchine a ruote non accoppiate. Per quello risguarda il coefficiente $u$ del quadrato della velocità nella resistenza dell'aria, secondo il Pambour si ha $u=0{,}003064\ \Sigma$ e per $\Sigma$ esprimesi la superficie del treno esposta all'urto del vento in metri quadrati. Ma per treni ordinarii sopra strade di larghezza ordinaria prenderemo per $\Sigma$ otto metri più un metro per ogni vagone. Per ultimo riguardo ad $I$ prenderemo 6,70 per tonnellata. Dopo questo stabiliamo la seguente equazione fondamentale

$$An+C=(1+\delta)\{(K+g)P+gp+uv^2\}\pi D+\pi ID \qquad (a)$$

74. Ci rimane adesso da determinare la relazione fra la velocità e la vaporizzazione effettiva. Se non vi fosse la libertà di cilindro è chiaro che ad ogni doppia corsa dell'embolo, cioè ad ogni rivoluzione di ruota il vapore consumato sarebbe espresso per ogni cilindro da

$$Bf+B'f'$$

cioè pei due cilindri da $2Bf+2B'f'$. Ma bisogna considerare anche la libertà del cilindro, la capacità dei condotti immittenti nel cilindro, ed il vapore che rimane compresso fino al momento nel quale aprendosi le luci entra il vapore ad operare prima la controspinta e poi la spinta. Vediamo brevemente come sarebbe da farsi il conto con esattezza. Sia $1+\varphi$ la tensione del vapore in atmosfere al cominciamento della contropressione; siccome il volume $B(c'+q')$ riducesi a $Bc'$, dopo la compressione la tensione sarà $\frac{c'+q'}{c'}(1+\varphi)$. Consideriamo adesso a che volume ridurrebbesi portando quel vapore ad $n$

atmosfere. Ammettendo vera in questo caso la legge di Mariotte sarà il volume $\frac{1+\varphi}{n} B(c'+q')$. Così nelle due corse rimane già dentro la macchina una quantità di vapore ad $n$ atmosfere espressa da

$$\frac{1+\varphi}{n}[B(c'+q')+B'(c+q)].$$

Siccome ne occorre un volume rappresentato da $Ba+B'a'$, la quantità effettiva del vapore che verrà consumato da un solo cilindro durante una doppia corsa sarà

$$Ba+B'a'-\frac{1+\varphi}{n}\{B(c'+q')+B'(c+q)\}$$

e da tutti i due cilindri, nel giro d'una ruota

$$2Ba+2B'a'-2\frac{1+\varphi}{n}\{B(c'+q')+B'(c+q)\}.$$

Rappresentiamo questo volume per $V$, onde abbiasi

$$V=2Ba+2B'a'-2\frac{1+\varphi}{n}[B(c'+q')+B'(c+q)] \qquad (b)$$

75. Rappresentando con $\frac{1}{\alpha+\beta.n}$ il volume relativo del vapore ad $n$ atmosfere e con $S$ la vaporizzazione effettiva, espressa per metri cubi di acqua all'ora, con $\frac{S}{\alpha+\beta.n}$ sarà espresso il volume del vapore consumato in un'ora. D'altra parte esprimendo con $v$ la velocità della locomotiva in chilometri per un'ora, il numero delle volte che ogni ruota avrà fatto un giro sarà dato da $\frac{1000.v}{\pi D}$, il vapore consu-

mato sarà rappresentato da $\frac{1000 . v}{\pi D} V$; laonde avremo

$$\frac{1000 . v}{\pi D} V = \frac{S}{\alpha + \beta n}$$

ossia

$$v = \frac{\pi}{1000} \cdot \frac{D S}{V(\alpha + \beta n)} . \qquad (c)$$

76. Queste tre equazioni noi crediamo di dover sostituire alle equazioni del Pambour, perchè le condizioni della precessione e degli orli nel cappello mutano stranamente le condizioni di distribuzione e di consumo del vapore. Nè si potrebbe spiegare perchè il Mathias dopo avere analizzato con tanta minutezza il lavoro utile dovuto ad un litro di vapore a quattro atmosfere per molte macchine, dopo aver messo la tabella di confronto veramente istruttiva, nella fine dell'opera abbia riportato le formule del Pambour che suppongono il semplice avvicendarsi della spinta e dello scarico nel lavoro di una Locomotiva.

77. All'uso di queste formule ci rimane da determinare i due coefficienti $\alpha$ e $\beta$ che concorrono a formare l'espressione della densità del vapore ad $n$ atmosfere effettive. Altra volta abbiamo assunto l'espressione $0,00039 + 0,00067 . e$ essendo $e$ la tensione effettiva espressa per centimetri di mercurio. Per tradurla ad $n$ atmosfere assolute dobbiamo fare $e = 0,76 (n - 1)$, onde avressimo

$$0,00008 + 0,00051 . n$$

per cui sarebbe

$$\alpha = 0,00008 \ , \ \beta = 0,00051 .$$

Abbiamo usato di tali valori nella discussione sullo scarico perchè l'andamento di densità fosse più giusto nelle basse tensioni. Adesso troveremo i valori di $\alpha, \beta$ secondo i dati della formula del Pambour per adottarli nel calcolo della Locomotiva. Secondo il Pambour è $\delta = 0,0001421 + 0,0000000471 . p$ esprimendo con $p$ la pressione assoluta in chilogrammi sul metro quadrato. Sarà perciò

$$p = 10334 . n \quad \text{ossia} \quad \delta = 0,0001421 + 0,0004867 . n$$

Adottando perciò questa formula, perchè intorno alle quattro atmosfere rappresenta bastevolmente bene la densità del vapore, faremo

$$\alpha = 0,0001421 \quad ; \quad \beta = 0,0004867$$

78. Ci rimane a considerare l'influenza di un altro elemento. La Locomotiva nel corso, per mezzo delle trombe alimentari, caccia acqua in caldaia: ecco un lavoro di cui non si è tenuto conto. Considerando le dimensioni della *Rapida* se ad ogni giro di ruota le trombe lavorassero a pieno getto, entrerebbe in caldaia una quantità di acqua espressa da $0^{m.c},0015$; e per una velocità di trenta chilometri all'ora ne entrerebbero nove metri cubi circa. Supponendo che la tensione del vapore sia di quattro atmosfere assolute, di tre effettive, trascurando il lieve lavoro per l'ascesa dell'acqua, avressimo 279000 dinami. Dividendo questo numero per 3600, numero de' secondi contenuti in un'ora e per 75 dinami corrispondenti alla forza di un cavallo, avremo uno con lieve divario. Così a lavoro continuo e pieno delle trombe, il lavoro per l'iniezione, secondo la velocità assunta, sarebbe di un cavallo. Ma poichè basta la quarta parte di quell'acqua, vedesi che il lavoro ordinario dell'iniezione corrisponde ad un quarto circa di cavallo, è lavoro trascurabile e da non introdursi nelle formule.

(*Letta il* 21 *Giugno* 1846).

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

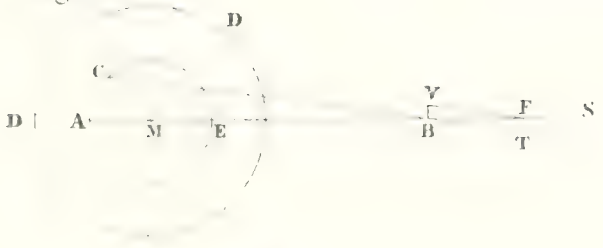



Fig. 4

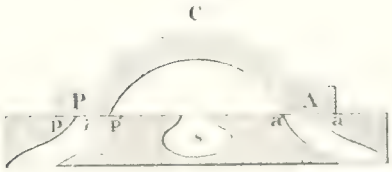
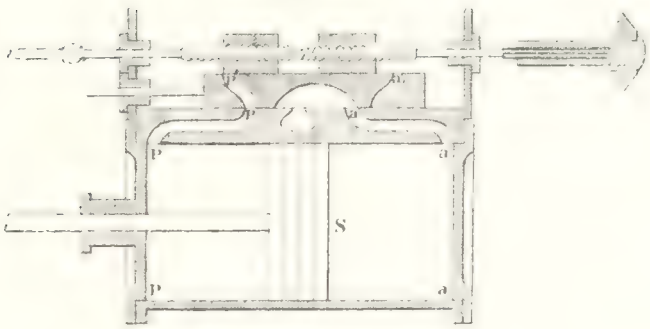
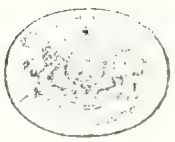



Fig. 5





# RINVENIMENTO

# DELL'ACHILLEINA E DELL'ACIDO ACHILLEICO

## NELL' ASSENZIO OMBELLIFERO (*Achillea Clavenae*, Linn.)

## E NUOVI STUDII SOPRA QUESTE SOSTANZE

## MEMORIA

DI BARTOLOMMEO ZANON

## PARTE I.

Nella mia memoria sull'Achilleina e sull'acido Achilleico, inserita nel secondo volume delle Memorie di questo I. R. Istituto, promisi di ritornare sull'argomento nell'occasione di praticare alcuni sperimenti analitici di confronto sull'assenzio ombellifero (*Achillea Clavenae*, Linn.): ed eccomi a soddisfare in qualche modo all'obbligo assuntomi, descrivendo i risultati delle mie osservazioni e sperienze istituite in proposito.

Incomincierò la presente memoria coll'estendere quelle notizie che valgano a porre in chiaro tutto ciò che si riferisce alla scoperta, agli usi ed alle proprietà dell'assenzio ombellifero: continuerò coll'esposizione di quel processo che mi condusse a separare il principio attivo di questa pianta, ov'esporrò quelle ragioni che m'indussero a con-

siderare un tale principio per Achilleina, e darò conto di alcune sperienze istituite posteriormente sull'Achilleina medesima. Per ultimo aggiungerò quanto mi fu dato di osservare co' nuovi miei studii relativamente all'acido Achilleico, e ad alcune sue combinazioni.

## §. I.

### *Brevi notizie dei fatti che riguardano la scoperta, gli usi e le proprietà dell'assenzio ombellifero.*

L'assenzio ombellifero, da quanto noi sappiamo, fu scoperto per la prima volta dal farmacista di Belluno Nicolò Chiavena nel 1608 e dallo stesso due anni dopo fu compilata una dotta memoria (1). In seguito varii botanici si occuparono nelle indagini della natura di questa pianta, apponendole ciascuno un nome variato. Per esempio, vi fu chi la chiamò Assenzio bianco alpino ombellifero con fiori bianchi d'Achillea, chi Absinthium alpinum umbelliferum latifolium, chi Absinthium Montis Serva ec.; ma Linneo, quell'immortale naturalista, appoggiandosi ai più rimarcabili e distinti caratteri di questo vegetabile, trovò opportuno di aggregarlo al genere delle Achillee, aggiungendogli al nome generico quello dello scopritore, denominandolo perciò *Achillea Clavenae*.

La scoperta di questa pianta, ed in seguito il riconoscimento delle sue proprietà febbrifughe, toniche, antelmintiche e deostruenti, diede origine a soggetto di lucrosa speculazione, avendo egli ottenuto dalla repubblica di Venezia un brevetto d'investitura, mediante il quale era abilitato a vendere esclusivamente tanto la pianta in natura, quanto una conserva che con quella preparava mediante l'unione di una determinata quantità di zucchero.

Col progresso di tempo s'impiegò questa pianta a comporre anche un estratto, una tintura ed un elisire, i quali preparati si manten-

(1) Memoria latina in 8.° stampata in Venezia nel 1610, portante il titolo: *Historia Absinthii Umbelliferi, Nicolai Clavenae Bellunensis.*

nero sempre in credito. Ora poi l'estratto e la tintura sono i due articoli che vengono a preferenza ricercati, dei quali se ne fa un consumo assai maggiore di quello che veniva fatto negli ultimi cinquanta anni. Non si tratta più di fornire soltanto di questi rimedii la città di Belluno e la sua provincia, ma di mandarne in molte città d'Italia ed anche all' estero. I farmacisti di Belluno dovranno quindi trovarsi d'ora innanzi sempre ben provveduti di tali farmachi (1), in quanto che, dopo sperimentata l'efficacia del decotto di millefoglio, come antidoto contro le febbri intermittenti, l'assenzio ombellifero, siccome appartenente al medesimo genere di piante, va acquistando maggior credito come febbrifugo, e più ancora i suoi preparati. Infatti alcuni medici trovano utilissima la tintura d'assenzio di Monte Serva (2) somministrata a cucchiaiate fra il giorno per impedire nuovi accessi di febbre dopo la presa del solfato di chinina.

In seguito a tutto questo, dopo una pratica medica sostenuta per quasi due secoli e mezzo, sufficientissima a dimostrare con fondamento le proprietà dell'assenzio ombellifero, era tempo oramai che venisse istituito su di esso un qualche saggio chimico che atto fosse a dimostrare possibilmente quale dei principii immediati fosse quello che appalesa un' azione elettiva medicamentosa, particolarmente in ciò che si riferisce alla virtù di fugare le febbri intermittenti. E valga il vero, dopo la scoperta dell'Achilleina nel millefoglio (*Achillea millefolium*, Linn.) non mi riuscì difficile il presagire un simile principio nell'assenzio ombellifero. In appoggio quindi ad una tale mia idea,

(1) Dico i farmacisti di Belluno, perchè io credo che in questo paese, dove fu scoperta la pianta ed usata in medicina pel lungo corso di 239 anni, se ne farà probabilmente il maggior consumo. Ad ogni modo, riflettendo che l'*Achillea Clavenae* è indigena de' luoghi montuosi ed alpestri, crescendo essa abbondantemente sopra tutta la lunga fila delle alpi italiane settentrionali, essa potrà formar egualmente l'oggetto di qualche utilità per tanti altri farmacisti, e particolarmente per quelli del nostro Regno-Lombardo Veneto e del Tirolo.

(2) Si conosce più comunemente a Belluno e nella sua provincia questa pianta col nome di Assenzio di Monte Serva, a motivo che fu rinvenuta per la prima volta alla sommità del monte di questo nome; monte che trovasi a due chilometri al nord-est di Belluno, e che elevasi fino all'altezza di 2041, 07 metri dal livello del mare.

non esitai di porre in opera quel processo medesimo che mi servì ad estrarre l'Achilleina dall'*Achillea millefolium* di Linneo. Per altro nell'atto delle mie operazioni, seguendo con attenzione l'andamento di un tale processo, mi è accaduto di osservare alcuni fenomeni non avvertiti la prima volta; fenomeni che, per essere chiariti opportunamente, mi obbligano a ripetere in questa memoria la descrizione del mio operato.

## §. II.

*Succinta descrizione del processo impiegato per separare il principio attivo dell'assenzio ombellifero; riconoscimento di tale principio in Achilleina, e susseguenti osservazioni.*

1.° Fatte esaurire tutte le parti solubili dell'assenzio ombellifero mediante ripetute decozioni coll'acqua piovana, riuniti tutti i liquidi e chiarificati con bianco d'uovo, vennero evaporati fino ad un'avanzata concentrazione. Lasciato in quiete il liquido residuale fino all'indomani, avea deposta una quantità di materia, la quale consisteva per lo più in fibra vegetabile della pianta, in materia colorante, in materia estrattiva nera ed in varii sali.

2.° Il liquido feltrato per carta presentava tutti i caratteri del decotto di millefoglio, come feci osservare nella prima mia memoria: aveva cioè un sapore amaro, arrossava la carta di tornasole, dava un precipitato biancastro coll'acido ossalico, un precipitato giallo scuro coll'acetato di piombo, ed un precipitato giallo di cedro coll'acetato basico di questo metallo.

3.° Dopo queste osservazioni il liquido venne privato intieramente della sua materia colorante, ed anche del suo acido, mediante una dissoluzione feltrata di acetato acido di piombo. Con questo reagente io ebbi un copioso precipitato che raccolsi sul feltro e posi a parte.

4.° Separata così la parte liquida dalle materie precipitatesi, l'assoggettai ad una corrente di gas idrosolforico lavato, mediante il quale si precipitò quella porzione di ossido di piombo dell'acetato già mes-

sovi in qualche esuberanza. Il liquido feltrato di nuovo avea un bel color giallo-rossigno, ed un sapore amaro, che ricordava quello della pianta, sebbene dasse segno di acidità per la presenza di quel poco di acido acetico lasciato dall'ossido di piombo già precipitato, come dissi al n.° 3. Ridotto il liquido a questo punto, lo sottoposi a regolare svaporazione mediante il bagno a vapore, e lo ridussi a consistenza di un denso estratto, che terminai di asciugare al calor di stufa.

5°. La risultante materia estrattiva fu poi introdotta in un matraccio e trattata coll'alcool bollente della densità di 0, 820, nel quale si redisciolse in parte, colorando il liquido in giallo. Questo trattamento alcoolico venne ripetuto più volte, cioè fino a che il liquido non riceveva più verun coloramento, riunendo in fine le tinture spiritose in un solo fiasco.

6.° Devo far presente in questa circostanza, che lasciando digerire troppo a lungo la materia estrattiva nell'alcool così bollente, la soluzione si carica sempre più, assumendo un colore rosso scuro. Io ho trovato opportuno di rinnovare spesse volte l'alcoole, affine di avere delle soluzioni più leggiere, e perciò meno colorate. Nel primo caso l'alcool bollente della notata gravità, oltre di sciogliere quel principio immediato di cui io andava in traccia, si carica anche di una materia straniera, la quale si deposita poi in parte pel raffreddamento del liquido in una polvere leggiera in fiocchi di un giallo-pallido, che si separa colla feltrazione (1). La rinnovazione dell'alcool non riesce tut-

(1) La materia rimasta sulla carta del feltro venne dimenticata per varii giorni in luogo caldo, dopo di che la trovai annerita e svolgente un odore fetido di sostanze animali in decomposizione. Un tal fenomeno da me inatteso, m'indusse a preparare dell'altro estratto acquoso della medesima pianta, affine di procurarmi poi di questa nuova materia per sottoporla ad esame con qualche attenzione. Infatti, trattato l'estratto ottenuto come prima coll'alcool bollente della gravità specifica suindicata, ebbi occasione di tener dietro ai cambiamenti che succedevano nel liquido. Quando l'alcool era bollente, tutte le sostanze si tenevano in perfetta soluzione; ma col raffreddamento nacque la precipitazione della materia polverulenta in fiocchi gialli, come feci già osservare, che separai colla feltrazione. Assoggettata questa ad un esame chimico, mi diede dei risultati tali da doverla considerare come materia nitrogenata che si assomiglia al glutine. Peraltro la sua facilità di annerirsi rapidamente al contatto dell'aria, e di

tavia ad escludere intieramente la materia sunnominata, ma le tinture riescono meno inquinate. Che ciò sia vero, lo provano le successive operazioni (1). Unite le soluzioni spiritose, e poste nel bagno-maria dell'alambicco con una quarta parte in volume di acqua pura, vennero distillate fino all'estrazione di tutto l'alcool impiegato.

7.° La materia residua rimasta nel bagno-maria, disciolta nell'acqua già aggiunta alla soluzione spiritosa, avea assunto un colore scuro: ciò avvenne in conseguenza dell'alterazione sofferta da una porzione della già nominata materia straniera. Si era questa abbruciata in parte ed aveva comunicato al liquido un poco di odore di materia vegeto-animale in combustione. Tuttavia, tanto quella che si era alterata, quanto l'altra rimasta illesa dall'azione del calore, aveano conservato la loro forma di fiocchi, colla differenza, che la prima si era annerita e si manteneva galleggiante nel liquido, e la seconda si era deposta sul fondo del vaso distillatorio e si conservava del primitivo

decomporsi in parte col solo calore dell'acqua bollente, come si potrà rilevare al n.° 7 di questa memoria, mi fa supporre che la materia stessa sia costituita di glutine e di un'altra sostanza forse pur essa nitrogenata. Certo è, che le nominate due sostanze levate dal feltro e sottoposte alla distillazione secca, mi diedero dell'ammoniaca, la quale potè essere raccolta in una bottiglia contenente dell'acqua distillata fredda.

(1) La materia estrattiva spogliata per la massima parte coll'alcool bollente delle sostanze in esso solubili, era divenuta molto solida: era di un color grigio tendente al rossigno, ma colla sua esposizione all'aria divenne molle, e si annerì in modo tale, che osservata in massa riusciva traslucida come il bitume. Si rediscIolse nell'acqua fredda, ma colla quiete fece qualche deposizione. Assoggettata ad un breve esame, mostrò di contenere ancora della sostanza glutinosa, come dissi nella precedente nota, della materia estrattiva ossidata, della gomma o mucilagine, del tanino, qualche traccia di albumina vegetabile ed alcuni sali a base terrosa. Distillata a secco diede un poco di ammoniaca. Abbruciata la massa estrattiva e lisciviate le ceneri coll'acqua calda ebbi, dopo la feltrazione e concentrazione del liquido, del solfato e del carbonato di potassa. Le sostanze, che si resero insolubili dall'acqua, vennero esposte ad un calore un po' più elevato (ad oggetto di consumare le materie carbonose), le quali sostanze dimostrarono poi, col mezzo de' reagenti, di contenere: acido solforico, acido fosforico ed anche acido carbonico, nonchè le basi terrose calce e magnesia. Anche lo scheletro della pianta, quello che fu assoggettato alla bollitura per ottener l'estratto, abbruciato che fu ed esaminatene le poche ceneri, mostrò di avere in sè qualche traccia ancora dei nominati sali; più della silice.

colore. Nello stesso liquido trovavasi pure in sospensione della resina, la quale venne poi separata colla feltrazione del liquido stesso per carta, unitamente alle altre summentovate sostanze.

8.° Il liquido acquoso passato pel feltro, evaporato nel solito bagno a vapore, fu ridotto alla consistenza di un denso estratto. La materia così addensata non rappresentava in vero tutti que' caratteri distinti e proprii dell'Achilleina avuta dal millefoglio. Essa appariva invece come un estratto quasi nero, che per altro univa in sè il sapore amaro e proprio dell'Achilleina: avea perduto intieramente colla svaporazione quell' odore che sentivasi di abbruciato. Restava quindi di redisciogliela nell'alcool quasi anidro bollente, e feltrarne la dissoluzione dopo il raffreddamento. Mediante questa nuova operazione si separò ancora di quella materia che ebbi più volte a nominare, ed anche poca sostanza carbonosa leggierissima. Diluita in fine la tintura spiritosa di poca acqua, e distillatone tutto l'alcool, io ebbi di nuovo nel bagnomaria un residuo, che feltrato e svaporato a secchezza, mi diede un estratto bellissimo, il quale assoggettato ad esame si manifestò per Achilleina pura.

9.° Devo per altro avvertire, che l'Achilleina così ottenuta arrossava debolmente la carta di tornasole: ciò dipendeva da qualche traccia di acido acetico non interamente svaporatosi, di quello cioè, che fu lasciato dall'acetato di piombo aggiunto al liquido nell'operazione descritta al n.° 3. Occorse quindi, per eliminare tutto quest'acido, di mantenere per alcun tempo la capsula coll'Achilleina stessa sul bagno vaporoso, aggiungendo di quando in quando qualche goccia di acqua per ritardarne l'asciugamento, rimuovendo continuamente la materia, onde dar adito all'acido in discorso di evaporarsi con maggior sollecitudine. Finalmente posi la capsula nella stufa per terminare la disseccazione del preparato.

Operando con tutte le surriferite precauzioni, si ha un'Achilleina scevra da ogni materia straniera: essa non presenta alcuna reazione sulle carte reagenti; si discioglie completamente nell'alcool bollente della gravità 0,806, e la dissoluzione spiritosa, evaporata a siccità, lascia un residuo solubilissimo nell' acqua, formando un liquido limpi-

dissimo, di color giallo più o meno intenso, secondo che varia la quantità di acqua che s'impiega nella dissoluzione: proprietà queste che devono essere osservate scrupolosamente ogni qual volta si tratta di avere un'Achilleina veramente pura.

Nel modo suaccennato rinvenni e separai l'Achilleina dall'assenzio ombellifero od *Achillea Clavenae* di Linneo, la quale Achilleina si appalesò identica ne' suoi caratteri a quella già estratta dal millefoglio. È indispensabile però di far presente che l'assenzio ombellifero contiene l'Achilleina in minore quantità di quello ne contenga il millefoglio; ond'è che ogni qualvolta si amasse di avere in abbondanza di questo farmaco, reggerà meglio l'interesse d'impiegare quest'ultima pianta, in vista principalmente che il millefoglio alligna in luoghi più piani, sugli orli delle strade, e perfino nel mezzo delle campagne poco coltivate.

Per opportuna notizia di chi non avesse veduta l'altra mia memoria su di questo argomento, non increscerà ch'io richiami con brevi parole i principali caratteri fisico-chimici dell'Achilleina.

Feci osservare in allora che l'Achilleina da me rinvenuta nel millefoglio si presenta sotto l'aspetto di una massa estrattiva dura, non acida nè alcalina, di color bruno, e di un giallo traente al rosso negli orli, di un leggier odore suo proprio, di sapore amaro non disaggradevole, solubilissima nell'acqua, deliquescente, insolubile nell'alcool anidro freddo e nell'etere, solubile nell'alcool bollente, distruttibile dal cloro, precipitabile dall'acetato basico di piombo ed in parte anche dall'ammoniaca.

Oltre a quanto già dissi, devo ora aggiungere i risultati di quelle sperienze che praticai posteriormente su di questa sostanza medesima. Dissi che l'Achilleina è insolubile nell'alcool freddo: ora nuovi sperimenti hanno dimostrato che l'addizione di qualche goccia di un acido liquido, come ad esempio di acido achilleico o degli acidi tartrico, citrico, nitrico o solforico è sufficiente a comunicarle la proprietà di rendersi solubile in tale veicolo.

La potassa e la soda rese liquide dall'acqua distillata e versate a gocce in separati bicchieri, ove si trovano delle dissoluzioni di Achil-

leina, determinano dopo alcune ore dei precipitati fioccosi, leggieri, i quali raccolti sopra appositi feltri ed esposti all'aria, si asciugano e si conservano senza inumidirsi. L'acqua fredda mostra di avere poca azione sopra di essi, ma la calda li discioglie con facilità. L'acqua di calce origina un precipitato nell'Achilleina pressochè eguale a quelli prodotti dalla potassa e dalla soda, colla differenza per altro, che nell'atto che si effettua la sua dissoluzione nell'acqua, esso lascia cadere la più parte della sua base terrosa.

Parlando poi dell'azione chimica ch'esercita l'acetato basico di piombo sull'Achilleina in dissoluzione, fu già osservato, che il precipitato che ne risulta è solubile in molta acqua, insolubile nell'alcool puro, inalterabile dall'aria e dalla luce. In seguito, in forza di ulteriori sperienze ebbi a conoscere, che tale precipitato lavato coll'alcool e disseccato ad un calore di gradi 65 R.r ed esaminato, si trova composto di protossido di piombo 68,18, Achilleina 31,82. Ma la combinazione che ne risulta è tanto leggiera, che la sola acqua, e particolarmente se è calda, è bastante per decomporla: proprietà che non osservai alloraquando mi occupava nei lavori dell'Achilleina estratta dal millefoglio. Ecco ciò che segue in questo caso. Versando ripetute volte dell'acqua sopra il feltro in cui vi sia il precipitato in discorso, l'Achilleina combinata all'ossido di piombo si discioglie in parte, e l'ossido di questo metallo rimane isolato sul feltro allo stato di protossido. Pare adunque che l'ossido di piombo formi coll'Achilleina due combinazioni differenti, una decomponibile dalla sola acqua, e l'altra molto più resistente. La dissoluzione che attraversa la carta del feltro, oltre di contenere l'Achilleina già distaccatasi dall'ossido metallico, mantiene in sè dell'ossido di piombo, il quale viene appalesato facilmente dagl'idrosolfati alcalini e terrosi. Potrebbesi credere che l'ossido di piombo si trovasse disciolto dalla semplice acqua (proprietà che possede, secondo Guyton Morveau), ma non mi pare che questo sia il caso; poichè il liquido molto diluito di acqua di fonte sottoposto a lunga bollitura fino all'asciugamento, e rediscIolto il residuo in nuova acqua, non lasciò alcun sedimento. Per separare un tal ossido dalla sua combinazione, dovetti ridurre nuovamente la dis-

soluzione a seccamento, poi distruggere la materia vegetabile a mezzo del calore.

Io desidero che le prove esposte in questa memoria possano valere a convalidar viemmeglio le proprietà caratteristiche dell'Achilleina, affinchè questa sostanza, ch'io riguardo come utile alla medicina, non possa in alcun caso essere confusa con altri principii immediati vegetabili di altra natura.

## §. III.

*Alcune considerazioni intorno alle riferite proprietà chimiche dell'Achilleina, ed al suo modo di esistere nei vegetabili che la contengono.*

L'Achilleina è, come si ha potuto osservare nel corso di tante operazioni, un principio immediato non acido nè alcalino, contenuto dall'*Achillea millefolium* e dall'*Achillea Clavenae* di Linneo. Sebbene questa sostanza allo stato di purezza non eserciti alcun'azione sui colori vegetabili, è fornita nullameno della proprietà di combinarsi tanto agli acidi, che alle basi salificabili propriamente dette, formando dei composti chimici: e quantunque gli acidi e gli alcali impiegati in tali combinazioni non perdano intieramente le loro proprietà di reagire sulle carte esploratorie, non si possono tuttavia riguardare come in semplice mescolanza; imperciocchè il composto che ne risulta assume nuovi caratteri tanto fisici che chimici. Per esempio l'Achilleina si mostra perfettamente insolubile tanto nell'etere solforico, che nell'alcool assoluto freddo (1); ma per l'addizione di qualche goccia di acido achilleico. o di qualche altro acido sì vegetabile che minerale, essa cangia le sue proprietà e si rende solubile in tali mestrui. Questa stessa Achilleina, solubilissima com'è nell'acqua tanto fredda che calda, si discioglie anche nell'ammoniaca; ma se la dissoluzione rimane

(1) Veggasi la prima mia memoria su di questo argomento al §. III. n.° 24 ed anche la presente al §. II.

in quest'ultimo caso qualche tempo all'aria fino a che ha perduto l'alcali eccedente, il liquido lascia cadere una materia in fiocchi, che è meno solubile dell'Achilleina stessa (1).

A questo proposito si ha pure osservato, che la potassa e la soda disciolte, come pure l'acqua di calce, versate a gocce in una dissoluzione di Achilleina nell'acqua, determinano dei precipitati, che sono inalterabili all'aria, e poco solubili nell'acqua fredda: di più, che l'acetato basico di piombo precipita tutta l'Achilleina dalla sua dissoluzione (2).

Questi fatti provano a tutta evidenza, che tanto gli acidi, che gli alcali esercitano sull'Achilleina delle reazioni propriamente chimiche.

Fu già osservato da varii chimici, che altri principii immediati vegetabili, che si risguardano come corpi indifferenti, godono delle proprietà di combinarsi egualmente agli acidi ed agli alcali, fra i quali ne citeremo due di tal genere, che il celebratissimo Berzelius comprese nella seconda classe dei principii vegetabili indifferenti, cioè la genzianina e la picrotossina.

La prima di queste sostanze, secondo Henry e Caventou, è senza azione sulle tinture vegetabili, pure precipita dalle loro dissoluzioni i sali di ferro e di rame; scaccia l'acido carbonico dalle combinazioni alcaline, e forma con queste basi dei cristalli aghiformi di un giallo d'oro. Gli acidi favoriscono la dissoluzione della genzianina nell'acqua, dalla di cui azione devono nascere delle combinazioni, che non sono state bastantemente studiate.

La seconda, la picrotossina, non altera neppur essa le carte esploratorie, ma si combina agli acidi, secondo Boulay, e dà origine a sali acidi, cristallizzabili, poco solubili. Essa si discioglie facilmente negli alcali: costituisce coll'acetato di piombo una combinazione permanente all'aria asciutta, che può essere decomposta dall'acido carbonico.

Riflettendo con qualche attenzione alle esposte proprietà dell'Achilleina, ed anche a quelle della genzianina e della picrotossina, io sarei inclinato a considerare queste sostanze, con tutte quelle di simile

(1) Memoria prima §. III. n.° 28.

(2) Memoria presente §. II.

natura contenute da altre piante, siccome corpi intermedii, quelli cioè che costituiscono l'anello della catena dei principii immediati dei vegetabili, che sta fra gli acidi e le basi di natura organica. Abbiamo già veduto, che queste sostanze fanno ora le funzioni di basi, ora quelle di acidi: ed è appunto per questo che le combinazioni che ne risultano riescono sempre legate da forze poco resistenti.

Ponendo poi mente a ciò che si riferisce al modo di esistere dell'Achilleina nel millefoglio e nell' assenzio ombellifero, io non saprei risguardarla altrimenti che come in perfetta dissoluzione nel succhio delle dette piante, combinata in parte all' acido achilleico, ed in parte mantenuta in relazione chimica con tutti gli altri principii immediati coi quali è sempre in contatto. Dico anche cogli altri principii, perchè non si può sospettare, che nello stesso vegetabile possanvi esistere dei corpi assolutamente indifferenti. Anche i principii inorganici, quelli che vengono assorbiti dalle radici delle piante, devono essere considerati come in perfetta armonia con quelli che costituiscono l'intero organismo vegetabile. Io non saprei vedere il mezzo di persuadermi altrimenti, qualora nulla osti alla dottrina che viene accolta dalla maggior parte dei chimici moderni, vale a dire che le combinazioni chimiche si effettuino soltanto fra i corpi di contraria elettricità. In relazione quindi a tale dottrina, noi dobbiamo ritenere che tutti i principii immediati componenti una pianta siano dotati di un'azione particolare più o meno distinta e tale da costituire quella forza elettro-chimica che li fanno reagire costantemente gli uni sugli altri in modo da formare nella pianta stessa quella serie legata e non mai interrotta di corpi, i quali si mantengono mirabilmente uniti nell'equilibrio stabilitosi dalle rispettive loro forze.

(*Letta li* 29 *Maggio* 1847.)

# ALCUNE CONSIDERAZIONI
# SUGLI EFFETTI DELL' ATTRITO
## E
## SUL MODO DI CALCOLARLI
# MEMORIA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

1. La Meccanica dei corpi di forma invariabile è compresa per la massima parte nel principio fondamentale della composizione delle forze; poichè con questo solo principio si risolvono i due problemi generali della Statica e della Dinamica. Se tutte le forze applicate ad un corpo invariabile sieno tali che la loro risultante determinata coi metodi offerti dalla Matematica sia assolutamente nulla, quel sistema sarà in equilibrio: così a stabilire la condizione d' equilibrio non occorre conoscere le masse delle varie parti del corpo, e tutto dipende dal principio che se due sistemi di forze abbiano una medesima risultante, i due sistemi sono talmente identici nei loro effetti che l'uno può sempre sostituirsi all' altro. — Questo principio serve anche a risolvere il problema della Dinamica; poichè nel caso che alle varie parti di un corpo invariabile sieno applicate forze tali che se ciascuna di esse movesse la singola parte del corpo, cui è applicata, il corpo non

potesse mantenere la propria invariabilità; basterà immaginare che al dato sistema di forze un altro ne sia sostituito di *equivalente* (cioè o che abbia la medesima unica risultante del primo, o che sia, parimente ad esso, riducibile alle medesime due forze), e questo secondo sistema sia costituito da forze applicate a tutte le singole molecole (o punti materiali del corpo), e tali che muovendo separatamente ciascuna molecola, le molecole conservino le stesse mutue posizioni, sicchè rimanga invariabile la forma del corpo. Le forze del secondo sistema, ossia i movimenti da esse individualmente prodotti, costituiscono appunto la soluzione del problema dinamico. Questo perciò consiste nell' equivalenza tra il sistema delle forze realmente applicate, ed il sistema delle forze rappresentanti i singoli movimenti acquistati dalle molecole: perlochè se tutte le forze del secondo sistema si rivolgano in verso opposto e si riuniscano a tutte le forze del primo sistema, si avrà un sistema complessivo di forze, che saranno in equilibrio. — Tal metodo di soluzione è una sì immediata applicazione del principio d' identità di effetto di due sistemi equivalenti di forze, che potrebbe sembrare che esso non meritasse di assumere il nome del suo scopritore, giacchè anche prima del D' Alembert era conosciuto il principio della composizione e decomposizione delle forze: ma non bisogna dimenticare che le cose più semplici e più evidenti sono non di rado ben difficili da scoprirsi; e giustamente dee attribuirsi molto onore a chi espone un principio tanto generale da contenere tutta una scienza, abbenchè sia soltanto una modificazione di altro principio già conosciuto.

2. Quantunque il principio della equivalenza delle forze, e quello della velocità proporzionale alla forza ed inversa alla massa, riducano la Statica e la Dinamica a semplici problemi matematici; pure vi sono alcuni altri importantissimi principii che il Meccanico dee desumere dall' esperienza; tali sono per esempio quelli riguardanti le resistenze, ed in particolare l' attrito: inoltre dopo avere stabilito, un poco coll' esperienza, un poco coll' ipotesi, le leggi riguardanti l' attrito, si trova talora qualche difficoltà nell' applicarle; e mi avvenne più volte d' incontrare delle assolute discrepanze nei modi proposti per calco-

lare l'influenza degli attriti. Per la qual cosa credo non affatto inutile sottoporre al Vostro giudizio una Memoria che scrissi da parecchj anni nell'occasione che il chiar. prof. Vincenzo Amici presentò alla Riunione scientifica tenuta in Padova alcune sue vedute intorno al modo di calcolare l'attrito nella vite, in opposizione alla formula già data (1825) dal chiar. Poncelet nelle sue Lezioni a Metz, ed inserita nel T. II. del Giorn. Matematico del Crelle.

3. Nel movimento delle macchine, e nel loro stato prossimo al moto, hanno somma influenza gli attriti, sempre inevitabili quando due corpi al contatto debbano prendere un qualche movimento relativo, ed anzi è effetto degli attriti che una macchina possa rimanere in quiete quantunque le forze che agiscono su di essa e le resistenze dei suoi appoggi non si facciano equilibrio. L'attrito è una resistenza, o forza che voglia dirsi, la cui direzione non è per sè stessa determinata, ma è opposta alla direzione del movimento, che ha luogo o che starebbe per cominciare; ed anche la grandezza dell'attrito può essere o grande fino ad un certo limite o piccola, giacchè tal resistenza esiste solamente in quanto vi sia una forza opposta da distruggere: inoltre gli attriti dipendono dalle pressioni fra i corpi che debbono muoversi, e queste pressioni non sono direttamente conosciute, ma si deducono, talvolta non molto facilmente, dalle forze, a cui le pressioni unitamente cogli attriti debbono far equilibrio. Queste cagioni di difficoltà sono sufficienti a spiegare le discrepanze nella determinazione degli attriti, delle quali feci alcun cenno.

4. Cominciando a calcolare l'attrito nella vite, supponiamo che il maschio sia verticale e la madre-vite si aggiri intorno ad esso sollevando un peso; le forze applicate sieno tali che esse non abbiano alcuna risultante, ma formino insieme una *coppia*, o, come io amo chiamarlo, un *giratore* (veggasi la Nota I.) parallelo all'asse della vite. Così tutte le forze che agiscono sulla vite si riducano ad una sola forza la cui direzione coincida coll'asse, e ad un giratore di egual direzione. Questa restrizione la credo necessaria, onde togliere il caso delle pressioni contro l'asse della vite, le quali complicherebbero non poco il problema a motivo dell'incastro fra le prominenze e le cavità delle

due parti della vite; perciò supporremo che la madre-vite sia mossa non da una sola forza orizzontale applicata all' estremità di una leva, bensì da un paio, almeno, di forze eguali parallele e direttamente opposte. Supporremo inoltre che la vite sia usata, sicchè liberamente si muova, poichè altrimenti ben s' intende che, se la madre-vite stringesse la spira del maschio, l' attrito potrebbe esser grandissimo indipendentemente affatto dal peso che vuol sollevarsi. Nelle fatte supposizioni la madre-vite premerà soltanto sulla superficie superiore della spira del maschio; questa superficie è un' elicoide generata dal moto di una retta che prolungata taglia l' asse sotto un angolo costante; la pressione sarà normale a tal elicode, e l' attrito agirà in ciascun punto di contatto nella direzione tangente all' elica, che viene descritta da un punto della madre-vite. Per ora consideriamo soltanto la porzione di elicoide che è compresa fra due eliche vicinissime.

5. Sembrerebbe a prima giunta che si potesse suppor applicata in ciascun punto dell' elica una porzione elementare del peso e delle forze applicate alla madre-vite, poscia decomporre la loro risultante in una forza perpendicolare alla superficie elicoidica, la quale costituirebbe la pressione, ed in una tangenziale alla medesima superficie: ma per questa via si andrebbe incontro ad erronee conseguenze, poichè tutte le predette forze tangenziali non possono equilibrarsi, e la loro risultante agendo sulla vite produce una pressione che deve aggiungersi alla precedente. Il Poncelet non è già caduto in questo errore, ma trovando forse piuttosto difficile di stabilire direttamente l'equilibrio delle forze elementari trasportate in ciascun punto, ricorse al principio delle velocità virtuali che applicò anche all' attrito. Il metodo che mi sembra più naturale e comodo è il seguente: per ciascun punto dell' elicoide compresa fra le due eliche vicinissime s'immagini la pressione normale alla superficie, e l'attrito tangente all' elica (il quale è una determinata frazione della pressione); tutte queste forze elementari si compongano in una forza ed in un giratore risultanti, che si facciano uguali ed opposti alla forza ed al giratore applicati alla madre-vite; da queste due equazioni si elimini la pressione e si avrà il cercato rapporto tra il peso sollevato ed il momento di rotazione

delle forze impiegate. — Si osservi che, ammettendo che la pressione sia eguale in ogni punto dell'elicoide, si suppone che la vite sia formata da un numero intero di giri, ed inoltre si trascura il giratore obbliquo all'asse prodotto dalle pressioni ed attriti elementari e dipendente da ciò che i loro punti d'applicazione non sono situati in un medesimo piano orizzontale.

6. Sia $h$ il passo della vite, $r$ il raggio della projezione orizzontale dell'elica che si considera, $a$ $b$ gli angoli formati colla verticale dalle tangenti dell'elica e dalle generatrici dell'elicoide; sia $F$ la risultante di tutto il peso applicato alla madre-vite, la qual risultante cade nell'asse della vite; sia $G$ il giratore risultante, cioè la somma dei momenti di rotazione, intorno all'asse, delle forze orizzontali applicate alla madre-vite; sia $\Delta N$ la pressione in un elemento dell'elicoide, ed $f$ il coefficiente d'attrito.

7. Adoperando il mio metodo delle equipollenze e indicando con $1$, $\mathcal{V}$ due assi coordinati orizzontali, e con $\Lambda$ l'asse verticale, l'elica sarà espressa dall'equipollenza (Veggasi la Nota II.)

$$OM \triangleq r\cos x + r\operatorname{sen} x \,.\, \mathcal{V} + \frac{h}{2\pi} x \,.\, \Lambda ,$$

e la sua tangente avrà la direzione espressa da

$$-r\operatorname{sen} x + r\cos x \,.\, \mathcal{V} + \frac{h}{2\pi}\Lambda \,.$$

Considerando il punto dell'elica che si trova sul primo asse coordinato, e che perciò corrisponde ad $x = o$ ed osservando che

$$\frac{2\pi r}{h} = \operatorname{tg}. a$$

si vedrà che la tangente dell'elica ha la direzione $\operatorname{tg} a \,.\, \mathcal{V} + \Lambda$. La generatrice dell'elicoide ha poi la direzione espressa da $\operatorname{sen} b - \cos b \,.\, \Lambda$, quindi la normale alla superficie avrà la direzione espressa da

$$\operatorname{tg} a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} b \,.\, \mathcal{V} + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \Lambda$$

che è perpendicolare ad ambedue le precedenti: perciò se si chiami

$\Delta N$ la pressione elementare nel punto di cui si tratta, essa sarà espressa in grandezza e direzione da

$$\frac{\operatorname{tg} a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} b \,.\, \mathrm{V} + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \Lambda}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} \Delta N \;:$$

l'attrito sarà pure espresso da

$$-(\operatorname{sen} a \,.\, \mathrm{V} + \cos a \,.\, \Lambda) f \Delta N \,.$$

8. Tutto ciò viene a dire (e qualunque metodo si adoperi non sarà difficile verificarlo) che la pressione $\Delta N$ ha parallelamente ai tre assi coordinati le componenti

$$(1)\ \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \cos b}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} \Delta N\ , \qquad (2)\ \frac{-\operatorname{sen} b}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} \Delta N\ .$$

$$(3)\ \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{sen} b}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} \Delta N\ .$$

e che l'attrito si compone della forza orizzontale

$$(4)\ -\operatorname{sen} a \,.\, f \Delta N$$

e della verticale

$$(5)\ -\cos a \,.\, f \Delta N\ .$$

Per l'uguale pressione in ogni punto dell'elica, per la simmetria di questa curva, e perchè essa si suppone composta di un numero intero di giri, le forze elementari orizzontali (1) (2) (4) corrispondenti a tutti i punti dell'elica avranno la risultante nulla; e la risultante di tutte le forze elementari sarà la forza verticale

$$F = \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, N}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} - \cos a \,.\, fN\,.$$

Il giratore risultante verticale (ed abbiamo ritenuto di trascurare ogni altro) si otterrà osservando che la (1) passa per l'asse e quindi non ha alcun momento, e le (2) (4) hanno il braccio di leva $r$, perciò

$$G = \frac{\operatorname{sen} b \,.\, rN}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} + \operatorname{sen} a \,.\, frN\ .$$

Eliminando $N$ si ottiene la relazione tra la forza ed il giratore

$$(6)\quad \frac{G}{rF} = \frac{\operatorname{sen} b + f \operatorname{sen} a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{tg} a - f \cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen} b)}} \,.$$

9. Se invece si supponga che il peso verticale $F$ sia decomposto in forze elementari $\Delta F$ egualmente distribuite in tutti i punti dell'elica, e che il giratore $G$ sia decomposto in forze elementari $\frac{\Delta G}{r}$ agenti nei varii punti dell' elica colle direzioni orizzontali e perpendicolari alle normali abbassate dai rispettivi punti di applicazione sull' asse della vite; e che perciò nel punto dell' elica individuato dalla $OM \triangleq r$ agiscano le forze espresse in grandezza e direzione da

$$-\Delta F \,.\, \Lambda \,,\quad \frac{\Delta G}{r}\, V,$$

poscia ambedue queste forze si decompongano in tre, l' una tangente all' elica, cioè colla direzione $\operatorname{sen} a \,.\, V + \cos a \,.\, \Lambda$, la seconda normale alla superficie elicoidica, cioè colla direzione (Veggasi la Nota III.)

$$\frac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, V + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \Lambda}{\cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}}$$

e la terza perpendicolare alla due precedenti, cioè colla direzione

$$\frac{\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \,.\, \cos a \,.\, \cos b \,.\, V - \operatorname{sen}^2 a \,.\, \cos b \,.\, \Lambda}{\cos b \sqrt{(\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{sen}^2 a)}}$$

queste tre forze avranno le grandezze

$$(7)\quad -\cos a \,.\, \Delta F + \frac{\operatorname{sen} a}{r} \Delta G$$

$$(8)\quad \frac{-\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \Delta F - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \frac{\Delta G}{r}}{\cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}}$$

$$(9)\quad \frac{\operatorname{sen}^2 a \,.\, \cos b \,.\, \Delta F + \operatorname{sen} a \,.\, \cos a \,.\, \cos b \,.\, \frac{\Delta G}{r}}{\cos b \sqrt{(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{tg}^2 b)}}$$

Ora se si volesse trascurare la terza, e supporre che la prima eguagli l'attrito prodotto dalla seconda sarebbe

$$\operatorname{sen} a \,.\, \frac{\Delta G}{r} - \cos a \,.\, \Delta F = f \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \Delta F + \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \,\frac{\Delta G}{r}}{\cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}}$$

ed avvenendo la stessa cosa in tutti i punti dell' elica si avrebbe per la condizione d' equilibrio nella vite la

$$(10) \qquad \frac{G}{rF} = \frac{\cos^2 a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)} + f \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \,.\, \cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)} - f \cos a \,.\, \operatorname{sen} b}$$

che è la stessa equazione data nel testo del *Resumé des Leçons sur l' application de la Mécanique* etc. *par Navier*, il quale aggiunge in nota la formula del Poncelet, senza addurre alcuna ragione per preferire l'altra. Invece abbiamo veduto che essa è sbagliata, perchè vi sono trascurate le forze (9) tangenti alla superficie elicoidica e perpendicolari all' elica.

**10.** Le due formule (6) (10) si accordano insieme quando la vite è a spira rettangolare, cioè quando $b = 90.^\circ$ e danno

$$(11) \qquad \frac{G}{rF} = \frac{\cos a + f \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a - f \cos a} \quad ;$$

in ogni altro caso esse discordano. — Supponiamo invece che $a = 90.^\circ$ allora l' elica si cangerà in un circolo, ed in luogo di una vite avremo un cono fisso col vertice rivolto all' insù, ed un tronco di cono cavo che gira intorno ad esso. Questo cono cavo essendo aggravato dal peso $F$, il giratore necessario per farlo ruotare vincendo l'attrito, sarà dato dall' equazione (6) del Poncelet, la qual riducesi alla

$$(12) \qquad \frac{G}{rF} = \frac{f}{\operatorname{sen} b}$$

Per lo contrario la formula (10) del Navier darebbe

$$(13) \qquad \frac{G}{rF} = f \operatorname{sen} b \ ,$$

per lo che il giratore sarebbe tanto più piccolo, quanto più piccolo

fosse il seno dell' angolo formato dai lati del cono col suo asse, cioè quanto più acuto fosse il cono. La causa dell' errore consiste, come dicemmo, nel trascurare le forze (9) che nel presente caso si riducono a $\cos b \,.\, \Delta F$, e sono dirette secondo i lati del cono, le quali forze elementari sono ben lungi dall' equilibrarsi, e la loro risultante aumenta la pressione erroneamente attribuita alle sole forze elementari (8).

**11.** Il calcolo per la vite si faciliterà ponendo $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} b} = \operatorname{tg} e$, ed essendo $h \operatorname{tg} a = 2\pi r$ la (6) darà

$$\frac{2\pi G}{hF} = \frac{1 + f\frac{\operatorname{sen} a}{\cos e}}{1 - f\frac{\operatorname{sen} a}{\cos e \,.\, \operatorname{tg}^2 a}} \quad ;$$

$\frac{2\pi G}{h}$ è la forza che col braccio di leva eguale al passo della vite diviso pel rapporto della circonferenza al raggio sarà in procinto di vincere l' attrito e sollevare il peso $F$ applicato alla madre-vite. Risulta dalla predetta formula che anche tenendo conto dell' attrito il rapporto $\frac{2\pi G}{hF}$ è indipendente dal passo della vite, purchè peraltro il raggio sia proporzionale al passo sicchè $\operatorname{tg} a = \frac{2\pi r}{h}$ conservi un valore costante. Il rapporto $\frac{2\pi G}{hF}$ cresce quanto più la retta generatrice della spira si discosta dall' orizzontale, quindi la vite che meno risente l' attrito è quella a spira rettangolare, per la quale si ha

$$\frac{2\pi G}{hF} = \frac{1 + f \operatorname{tg} a}{1 - f \operatorname{cot} a}$$

Ed in questa vite l' attrito è minimo quando $\operatorname{tg} a = \sqrt{(1 + f^2)} + f$ ed allora si ha

$$\frac{2\pi G}{hF} = [\sqrt{(1 + f^2)} + f]^2 \,.$$

12. Se in via d' esempio si prenda per coefficiente di attrito fra due metalli ben levigati ed untuosi $f = 0,17$, la vite nella quale l'attrito produrrebbe la minor perdita di forza sarebbe quella a spira rettangolare determinata da $b = 90.^{\circ}$ e $\operatorname{tg} a = 1,18$ quindi $\frac{r}{h} = 0,19$, cioè il passo della vite maggiore di cinque volte il raggio, e sarebbe $\frac{2\pi G}{hF} = 1,40$. Se conservando lo stesso rapporto $\frac{r}{h} = 0,19$ la spira, anzichè esser rettangolare, fosse generata da un triangolo equilatero, cioè fosse $b = 60.^{\circ}$ si troverebbe $\frac{2\pi G}{hF} = 1,45$. — Nella pratica il passo della vite è ordinariamente molto più piccolo di quello che ora abbiamo supposto, ed essendo perciò $\operatorname{tg} a$ piuttosto grande, si può con sufficiente approssimazione servirsi della formula

$$(14) \qquad \frac{2\pi G}{hF} = \frac{\operatorname{sen} b + f \operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} b - f \operatorname{cot} a} \quad ,$$

la quale differisce dalla (11) soltanto per essersi cangiato il coefficiente d' attrito $f$ in $\frac{f}{\operatorname{sen} b}$. Così se sia $\operatorname{tg} a = 11$, cioè $\frac{r}{h} = \frac{7}{4}$ e la spira sia rettangolare sarà $\frac{2\pi G}{hF} = 2,92$, e se invece la spira sia generata da un triangolo equilatero tanto la formula esatta quanto la approssimata darà $\frac{2\pi G}{hF} = 3,21$ .

13. Per dare l' esatta teoria della vite bisognerebbe considerare che il contatto e quindi la pressione ha luogo in tutta la larghezza della spira, anzichè, come finora abbiamo supposto, sopra un solo elemento infinitesimo compreso fra due eliche vicinissime; ma non si può conoscere in qual modo la pressione si distribuisca nei varii punti di una retta generatrice della superficie elicoidica della spira, dipendendo ciò dalla costruzione più o meno accurata della vite, dall' elasticità dei corpi che la formano, dal loro consumo, ec. Potrà supporsi che la pressione sia da per tutto la stessa, e quindi per ciascun elemento

sia proporzionale alla sua area, oppure che sia proporzionale alla proiezione orizzontale di questa area; dopo ciò bisognerà integrare separatamente le equazioni già trovate per la forza e pel giratore risultanti da tutte le pressioni e da tutti gli attriti: del resto l'incertezza che rimane nella determinazione della pressione, e la trascuranza delle pressioni laterali mostrano che non può sperarsi molta precisione; sicchè basterà adoperare una formula approssimata e prender per raggio della vite il medio tra quelli delle eliche massima e minima appartenenti alla spira.

**14.** Nelle formule approssimate

$$F = N(\operatorname{sen} b - f \cot a) \quad , \qquad \frac{2\pi G}{h} = N(\operatorname{sen} b + f \operatorname{tg} a)$$

$N$ rappresenta la pressione sull'elemento di superficie compreso fra due eliche che hanno i raggi $r$, $r + \Delta r$; perciò potremo prendere $N$ proporzionale a $2\pi r \Delta r$, che è la proiezione orizzontale dell'area di tal elemento, ed osservando che $h$ è uguale in tutte le eliche della spira, e che perciò $r$ è proporzionale a $\operatorname{tg} a$, potremo porre $N = n \operatorname{tg} a \, \Delta(\operatorname{tg} a)$ poscia integrando fra i limiti $a_0$ $a_1$ avremo

$$F = n \left[ \frac{\operatorname{sen} b}{2} (\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_0) - f \right] (\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} a_0)$$

$$\frac{2\pi G}{h} = n \left[ \frac{\operatorname{sen} b}{2} (\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_0) + \frac{f}{3} (\operatorname{tg}^2 a_1 + \operatorname{tg} a_1 . \operatorname{tg} a_0 + \operatorname{tg} a_0^2) \right] (\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} a_0)$$

perciò sarà

$$\frac{2\pi G}{h F} = \frac{\operatorname{sen} b + f \operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} b - f \cot a}$$

essendo $\operatorname{tg} a$ un valore intermedio tra $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_0)$,

e $$\frac{2}{3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 a_1 + \operatorname{tg} a_1 . \operatorname{tg} a_0 + \operatorname{tg}^2 a_0}{\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_0} \, ;$$

le quali espressioni sono nei casi pratici poco differenti, sicchè senza

error sensibile potremo preferire la più semplice, e prendere per $a$ l' inclinazione colla verticale dell' elica media della spira.

15. Pel caso che invece di una vite si abbia un cono, cioè sia $a = 90.^{\circ}$, le formule esatte $F = N \operatorname{sen} b$, $G = f r N$ mutatovi $N$ in $n r \Delta r$ poscia integrate danno pel tronco di cono compreso fra i due circoli di raggio $r_0$ ed $r_1$

$$\frac{G}{F} = \frac{2 f (r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)}{3 \operatorname{sen} b (r_1 + r_0)},$$

quindi servirà la formula già data $\frac{G}{r F} = \frac{f}{\operatorname{sen} b}$, essendo $r$ il raggio medio espresso da $\frac{2 (r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)}{3 (r_1 + r_0)}$.

16. Il chiar. prof. Vincenzo Amici per determinare l' influenza dell' attrito nella vite a spira triangolare comincia dal risolvere un' altra questione più semplice; trovare cioè la forza necessaria per muovere orizzontalmente un cuneo le cui facce poggiano su due spranghe orizzontali, e la cui testa è aggravata di un dato peso. Quantunque non mi sembri giusta la deduzione da un problema all' altro, perchè la spira triangolare della vite dee considerarsi premuta dalla madrevite in una sola delle sue facce, e perchè le circostanze sono non poco diverse; e quantunque creda che nessun metodo di soluzione possa metter in dubbio quello superiormente esposto, che conduce alla stessa formula del Poncelet: nulladimeno credo dover occuparmi della questione posta innanzi dal prof. Amici per l' interesse che essa presenta; e perchè, quantunque erronea mi sembri la soluzione da lui data, pure debbo confessare che un altro Matematico da me consultato m' indicò precisamente quella stessa soluzione.

17. Sembra a primo aspetto che quando un cuneo di dato angolo e di dato peso si appoggia fra due spranghe orizzontali, la forza necessaria per muoverlo orizzontalmente dipendente dall' attrito sia determinata; pure la cosa non è così; e la sperienza viene facilmente a confermare quest' ultima opinione, poichè il cuneo (particolarmente

se molto acuto) potrà essere stato cacciato tra le due spranghe con piccola o con gran forza, e quantunque il suo peso sia lo stesso, pure il cuneo continuerà a premere le spranghe con forze molto differenti nei due casi, e differenti saranno perciò gli attriti che si vogliono vincere. Infatti nelle due facce del cuneo hanno luogo due pressioni ed inoltre due attriti, i quali sono affatto arbitrarii in direzione ed in grandezza purchè non superino una certa frazione delle corrispondenti pressioni; sicchè in infiniti modi si potrà stabilire l'equilibrio tra queste quattro forze ed il peso del cuneo. Questo può essere o leggermente poggiato tra le due spranghe in guisa che gli attriti nella loro massima energia sieno impiegati a sostenerlo, e quindi minime sieno le pressioni; — o interamente sostenuto dalle pressioni, sicchè nello stato di quiete gli attriti sieno nulli; — o infisso più o meno fortemente sicchè gli attriti concorrano col peso ad aumentare le pressioni. Nel secondo caso, cioè quando le sole pressioni sostengono il cuneo, la forza orizzontale che dee muoverlo dovrà vincere tutto intero l'attrito, negli altri casi dovrà superare soltanto una componente dell'attrito, poichè un'altra componente agisce perpendicolarmente allo spigolo del cuneo.

18. La predetta indeterminazione del problema cessa peraltro, a mio credere, quando il cuneo sia già stato o si trovi presentemente in movimento orizzontale, poichè in tal caso l'attrito agisce per intero ed unicamente nella direzione opposta al movimento, sicchè le pressioni sono quali risultano dal peso del cuneo senza alcuna influenza dell'attrito. Il prof. Amici suppone per lo contrario che le pressioni sieno le minime possibili, cioè che l'attrito eserciti tutta l'azione di cui è suscettibile a sostenere il peso; ma in tal caso la forza orizzontale capace a sturbare l'equilibrio sarebbe eccessivamente piccola, e non già, come egli ammette, eguale all'attrito, giacchè se ciò fosse l'attrito agirebbe nello stesso tempo in due direzioni perpendicolari, e perciò la sua complessiva energia sarebbe maggiore di quella massima che dipende dalla pressione.

19. Sia $2b$ l'angolo-diedro del cuneo, che per brevità supporremo isoscele, $F$ il peso del cuneo, $N$ ciascuna delle pressioni che

le sue facce esercitano su due spranghe fisse orizzontali, e parallele allo spigolo del cuneo, $Q$ la forza orizzontale che tira il cuneo, e rispetto alla quale dee cercarsi lo stato prossimo al moto, $f$ il coefficiente d'attrito; sieno finalmente $fN\operatorname{sen}\varphi$, $fN\cos\varphi$ le due forze componenti dell'attrito fra una faccia ed una spranga, la $fN\operatorname{sen}\varphi$ essendo orizzontale, e la $fN\cos\varphi$ perpendicolare allo spigolo del cuneo, cioè l'effettiva direzione dell'attrito formi l'angolo $90.^{\circ}-\varphi$ con quello spigolo. — Le forze orizzontali e perpendicolari allo spigolo si equilibrano a motivo delle due uguali pressioni $N$, e supposto che pure si equilibrino i momenti di rotazione, la condizione dello stato prossimo al moto sarà stabilita dalle due equazioni

$$F = 2N\operatorname{sen} b + 2fN\cos\varphi\,.\cos b \quad , \qquad Q = 2fN\operatorname{sen}\varphi \quad .$$

Per l'equilibrio, ossia per lo stato di quiete, si richiede soltanto che queste due equazioni sieno soddisfatte da un valore di $f$ che non superi il coefficiente d'attrito. Quando $\operatorname{tg} b < f$ il valore di $N$ può anche divenir infinito, e quindi allora sarà infinita anche la $Q$. Se $\operatorname{tg} b > f$

il valore di $$\frac{Q}{F} = \frac{f\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen} b + f\cos\varphi\,.\cos b}$$

sarà massimo quando $$\cos\varphi = -f\cot b\,,$$

e sarà nullo quando $$\cos\varphi = \pm 1\,.$$

20. Può dimandarsi da qual peso $P$ debba essere preventivamente premuto il cuneo acciocchè, dopo avere sostituito al peso $P$ il peso minore $F$, l'attrito nella direzione perpendicolare allo spigolo del cuneo abbia il coefficiente $f\cos\varphi$. Ora questo attrito dà

$$2N = \frac{F}{\operatorname{sen} b + f\cos\varphi\,.\cos b}\;;$$

bisogna adunque che le pressioni $N$ ed il massimo attrito ad esse corrispondente facessero equilibrio al peso $P$, perciò

$$P = 2N(\operatorname{sen} b + f\cos b) = \frac{F(\operatorname{sen} b + f\cos b)}{\operatorname{sen} b + f\cos\varphi\,.\cos b}\;.$$

Si osservi che se il cuneo sia preventivamente aggravato di un peso

$$P > \frac{F(\operatorname{sen} b + f\cos b)}{\operatorname{sen} b - f\cos b}$$

le pressioni $N$ diminuiscono quando al peso $P$ si sostituisce il peso minore $F$, e diventano $2N = \dfrac{F}{\operatorname{sen} b - f\cos b}$, e l'attrito è tutto impiegato ad impedire un'ulteriore diminuzione delle pressioni. In questo ultimo caso, non meno che nell'altro che $P = F$, quindi

$$2N = \frac{F}{\operatorname{sen} b + f\cos b},$$

nel quale l'attrito è tutto impiegato a sollievo delle pressioni ed a sostegno del peso, sarà $Q = 0$; cioè qualunque forza orizzontale benchè minima sarà sufficiente a sturbare lo stato d'equilibrio fra il peso $F$ e le pressioni $N$: ad onta di ciò dall'applicazione di questa piccolissima forza non ne verrà un sensibile movimento, poichè nel caso di

$$2N = \frac{F}{\operatorname{sen} b - f\cos b}$$

le pressioni $N$ si diminuiranno alcun poco e l'attrito, non più tutto impiegato ad impedirne la diminuzione, potrà opporsi all'azione della forza $Q$; e lo stesso avverrà nel caso di

$$2N = \frac{F}{\operatorname{sen} b + f\cos b},$$

dopo un piccolo aumento di queste pressioni.

**21.** Se $\cos\varphi = 0$, $\operatorname{sen}\varphi = 1$, e perciò tutto l'attrito si opponga alla forza orizzontale $Q$ si avrà lo stato prossimo al moto. Allora è

$$2N = \frac{F}{\operatorname{sen} b}, \qquad Q = \frac{fF}{\operatorname{sen} b};$$

ogni altra forza minore di questa $Q$ potrà sturbare l'equilibrio nel

senso precedentemente stabilito, non già produrre (quantunque alcun poco accresciuta) alcun movimento sensibile. Nello stesso modo una forza $Q > \frac{fF}{\operatorname{sen} b}$ potrà rimanere distrutta dall'attrito, ma ciò dipenderà soltanto dall'essere stato precedentemente gravitato il cuneo di un peso maggiore di $F$, il quale avrà rese le pressioni $N$ maggiori di quelle che competono al peso $F$: questa circostanza si toglierà quando il cuneo si muova nel senso orizzontale, ed allora lo stato prossimo al moto sarà stabilito dalla precedente equazione

$$Q = \frac{fF}{\operatorname{sen} b} .$$

22. Un esempio numerico gioverà alla chiarezza e darà modo facile di assicurarsi che veramente in ogni caso sono soddisfatte le condizioni d'equilibrio. Sia $f = \frac{1}{4}$, $\operatorname{sen} b = 0{,}8$, $\cos b = 0{,}6$, $F = 1$; quando il cuneo sia poggiato leggermente fra le due spranghe le pressioni saranno

$$2N = \frac{1}{\operatorname{sen} b + f \cos b} = 1{,}053 ,$$

le quali danno la forza verticale 0,842 e l'attrito 0,263, che agisce sulle due facce del cuneo perpendicolarmente allo spigolo, quindi dà la forza verticale 0,158, che unita alla precedente 0,842 fa equilibrio al peso 1. Se il cuneo si tiri colla piccola forza orizzontale $Q = 0{,}074$ esso non si moverà; ma si muteranno le pressioni divenendo $2N = 1{,}059$, che danno la forza verticale 0,847; gli attriti che sono uguali a $2fN = 0{,}265$ non saranno più perpendicolari allo spigolo, la loro componente orizzontale 0,024 (giacchè $\operatorname{sen} \varphi = 0{,}28$ $\cos \varphi = 0{,}96$) distruggerà la forza $Q$, e la componente 0,255 perpendicolare allo spigolo darà la forza verticale 0,153, che unitamente alla 0,847 sosterrà il peso 1. Perchè il cuneo sia in procinto di muoversi orizzontalmente dovrà essere

$$Q = \frac{fF}{\operatorname{sen} b} = 0{,}3125 ;$$

allora le pressioni diventano

$$2N = \frac{1}{\operatorname{sen} b} = 1,250 \ .$$

che danno la forza verticale 1 ; l'attrito $2fN = 0,3125$ agisce orizzontalmente, e distrugge la forza $Q$, la quale aumentando di poco vincerà l'attrito, ed il cuneo si moverà. — Se il cuneo sia gravitato preventivamente del peso

$$P = \frac{F(\operatorname{sen} b + f\cos b)}{\operatorname{sen} b + f\cos\varphi\cos b} = 1,006$$

si avrà $2N = 1,059$ e l'attrito $0,265$ sarà perpendicolare allo spigolo ed avrà la componente verticale $0,159$, che unita alla componente $0,847$ delle pressioni sosterrà il peso $P$; quando a questo si sostituisce il peso $F = 1$ le pressioni rimangono le stesse, ma l'attrito diventa $0,255$, che dà la forza verticale $0,153$. Niuna meraviglia che l'attrito sia minore del massimo valore di cui sarebbe suscettibile; esso poi acquisterà il suo valore massimo se al cuneo si applichi come sopra la forza $Q = 0,074$.

23. Secondo il prof. Amici l'attrito nel movimento orizzontale del cuneo è espresso da

$$Q = \frac{fF}{\operatorname{sen} b + f\cos b}$$

perchè le pressioni sono

$$2N = \frac{F}{\operatorname{sen} b + f\cos b} \ ;$$

nel nostro esempio sarà $2N = 1,053$ e $Q = 0,263$. Ora perchè le pressioni $2N$, che danno la forza verticale $0,842$ possano sostenere il peso 1 bisogna che a loro si aggiunga l'attrito $0,263$ perpendicolare allo spigolo del cuneo; e perchè rimanga equilibrata la forza $Q$ bisognerebbe che un uguale attrito avesse luogo orizzontalmente; dunque il contatto fra il cuneo e le spranghe dovrebbe dar luogo agli attriti colla direzione inclinata di 45.° all'orizzonte ed uguali a

$0,263 \times \sqrt{2}$, cioè maggiori di quelli che si possono avere dalle pressioni 1,055 essendo $f = \frac{1}{4}$.

Ritenendo $F = 1$, $f = \frac{1}{4}$, se $\operatorname{sen} b = 0,100$, $\cos b = 0,995$ la formula del prof. Amici dà $Q = 0,716$; non sarà difficile sperimentare se con una forza alcun poco maggiore di questa il cuneo prenda un moto progressivo orizzontale; per me ritengo che vi si richiederà invece la forza

$$Q = \frac{fF}{\operatorname{sen} b} = 2,5 .$$

24. Procedendo adesso a considerare qualche altra questione relativa agli attriti vedremo come le soluzioni di problemi in apparenza semplicissimi riescano piuttosto complicate per la indeterminazione nella direzione delle resistenze di attrito, e perchè delle grandezze di tali resistenze si conoscono soltanto i limiti superiori, sicchè invece di equazioni si hanno a risolvere delle disuguaglianze. — Sembra che debba essere cosa facilissima determinare il movimento iniziale di una verga che poggia coi suoi due estremi sopra un piano orizzontale, e che è soggetta ad una o più forze situate in quello stesso piano, oltre che agli attriti, che dipendono dalle pressioni esercitate negli estremi della verga.

25. Sia $m$ la massa della verga, $d\ d'$ le distanze dei suoi estremi $A\ A'$ dal centro di massa, $a^2 m$ il momento d' inerzia della verga rispetto all' asse verticale che passa pel centro; sieno $E\ F$ le componenti rispettivamente parallela e perpendicolare alla verga della forza medesima, e sia $G$ il giratore verticale pure applicato alla verga; gli attriti nei punti $A\ A'$ avranno dei limiti superiori, che nelle ordinarie circostanze saranno proporzionali a $\frac{d' m}{d + d'}$, $\frac{d m}{d + d'}$, e che noi indicheremo rispettivamente con $f\ f'$; chiamiamo poi $x\ y\ x'\ y'$ le forze componenti di ciascun attrito, e dirette le $x\ x'$ parallelamente e le $y\ y'$ perpendicolarmente alla verga.

26. Avverrà necessariamente uno di questi quattro casi: o rimarranno fermi ambedue gli estremi della verga, o rimarrà fermo l'uno,

o l'altro, o nessuno. — Le solite condizioni d'equilibrio, due relative alle forze ed una al giratore, mostrano che la verga rimarrà in quiete se si possa soddisfare alle

$$E+x+x'=0\ ,\qquad F+y+y'=0\ ,\qquad G-d\,y+d'\,y=0\ ,$$
$$x^2+y^2<f^2\ ,\quad x'^2+y'^2<f'^2\ :$$

le equazioni seconda e terza danno i valori di $y\ y'$, poscia è facile vedere se le disuguaglianze permettano di verificare la prima equazione.

27. Se, per secondo caso, l'estremo $A$ rimanga fermo, e la verga vi giri intorno colla velocità $\omega$; allora l'attrito nel punto $A'$ si eserciterà tutto in direzione opposta al movimento, cioè perpendicolare alla verga, e si dovrà poter soddisfare alle equazioni

$$E+x=0\ ,\qquad F+y-f'=m\,d\,\omega\ ,\qquad G-d\,y-d\,f'=m\,a^2\,\omega$$

ed alla disuguaglianza $x^2+y^2<f^2$. — In ugual modo la verga ruoterà colla velocità $\omega$ intorno all'estremo $A'$ se si potranno soddisfare le $E+x'=0,\quad F+f+y'=-m\,d\,\omega,\quad G-d\,f+d'\,y'=m\,a^2\,\omega\ ,$

$$x'^2+y'^2<f'^2\ .$$

28. Che se finalmente non sia possibile alcuno dei tre casi precedenti bisognerà che la verga si muova ruotando intorno al proprio centro di gravità colla velocità angolare $\omega$ nello stesso tempo che questo centro assumerà la velocità colle componenti $u\ v$ parallela e perpendicolare alla verga; e così muovendosi ambedue gli estremi della verga si eserciteranno colà gli attriti in tutta la loro massima energia, e precisamente in direzioni opposte ai reali movimenti; quindi per determinare le incognite $\omega\ u\ v\ x\ y\ x'\ y'$ avremo le sette equazioni

$$E+x+x'=m\,u\ ,\quad F+y+y'=m\,v\ ,\quad G-d\,y+d'\,y=m\,a^2\,\omega\ ,$$
$$x^2+y^2=f^2\ ,\ x'^2+y'^2=f'^2,\ \frac{y}{x}=\frac{-v+d\,\omega}{-u}\ ,\ \frac{y'}{x'}=\frac{-v-d'\,\omega}{-u}\ ;$$

e, coll'avvertenza che $x\ x'$ abbiamo segni opposti al segno di $u$, tali equazioni ammetteranno quell'unica soluzione che determinerà il reale

movimento; ma il calcolo delle sette incognite (riducibili tosto a cinque) riuscirà abbastanza laborioso.

29. L'attrito della prima specie è pienamente espresso dicendolo consistere in una forza proporzionale alla pressione, e che agisce nel punto di contatto in direzione opposta al movimeuto; è pure ugualmente chiara la definizione dell'attrito della terza specie che risulta dalla precedente. In quanto all'attrito della seconda specie mi sembra che piuttosto di esprimerlo con una forza proporzionale alla pressione, ed in ragione inversa del raggio del cilindro che ruzzola sopra un piano, sia molto più razionale esprimerlo con un giratore proporzionale alla pressione ed indipendente dal raggio. Infatti se la resistenza di questo attrito consistesse in una forza agente nella linea di contatto fra il piano orizzontale e il cilindro che vi ruzzola sopra, sarebbe necessaria una egual forza a vincere tal attrito sia che essa fosse applicata orizzontalmente al centro, od alla circonferenza del cilindro: invece nel secondo caso è sufficiente la metà di forza che nel primo; e l'attrito può esser vinto anche da una forza verticale applicata alla circonferenza del cilindro. Se in un cilindro maggiore occorre minor forza a vincere l'attrito non è già perchè l'attrito sia minore, ma perchè è maggiore la distanza della forza dall'asse di istantanea rotazione, il quale è la sede dell'attrito. Tutte queste circostanze di fatto si esprimono pienamente dicendo che l'attrito della seconda specie è un giratore, il quale ammettendo le leggi stabilite dal Coulomb, è proporzionale alla pressione e dipendente dallo stato di levigatezza del cilindro, non già dal suo raggio. La ragione per la quale anche all'attrito della seconda specie si dà il nome di forza dee trovarsi in ciò che la considerazione del giratore o asse della coppia è affatto moderna: per la stessa ragione suol dirsi anche forza di torsione, quantunque la torsione sia per certo un giratore non già una forza nel significato più ristretto della parola. Fu già notato anche dal nostro collega prof. Conti (Atti dell'I. R. Istituto T. III. 1845. pag. 39) che l'attrito della seconda specie va misurato da un momento e non da una forza. Da questa maniera di esprimere l'attrito della seconda specie nascono spontanee le formule che determinano le circo-

stanze del movimento di un cilindro poggiato sopra un piano inclinato, oppure poggiato sopra un piano orizzontale e soggetto ad una forza e ad un giratore; mi limiterò alla discussione di un caso più semplice.

30. Prima peraltro gioverà ricordare che la ipotesi del Coulomb. secondo la quale l'attrito della seconda specie misurato nel modo comune sarebbe inversamente proporzionale al raggio del cilindro, (ossia il giratore equivalente a tale attrito sarebbe indipendente dal raggio) fu combattuta dal Dupuit, che trovò l'attrito inversamente proporzionale alla sola radice del raggio; il Morin per lo contrario sostenne con nuove sperienze la legge del Coulomb; i Commissarii dell'Istituto di Francia approvando il lavoro del Morin non dissimularono che parecchie sperienze indicavano che l'esponente del raggio fosse, anzichè $-1$, come vorrebbe la legge del Coulomb, talvolta $-\frac{4}{5}$, talvolta $-\frac{3}{4}$, e talvolta per fino tra $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{2}$; questo ultimo valore la darebbe vinta al Dupuit, il quale vivamente impugnò la validità delle conclusioni che il Morin trasse dalle proprie sperienze.

31. Tornano poi a forte appoggio dell'opinione del Dupuit le sperienze che i signori Pacinotti e Galli pubblicarono non è molto nel Giornale di Pisa (Il Cimento, Marzo, Aprile 1846): inoltre quantunque le difficoltà che s'incontrano nello spiegare teoricamente i fenomeni di attrito non permettano di accordare piena fiducia alle teorie, nulladimeno non si può non attribuire qualche peso anche alla maniera, colla quale i suddetti Fisici Italiani mostrano che veramente l'attrito della seconda specie misurato nel modo solito deve procedere in ragione inversa della radice del raggio. Viene da ciò che l'attrito espresso da un giratore sarà direttamente proporzionale alla radice del raggio; così per un cilindro di abete che ruzzola su piano pur di abete l'attrito sarà misurato da un giratore eguale alla pressione moltiplicata per la lunghezza $\sqrt{(0^{mm},0016\,.\,r)}$. Infatti se immaginiamo che il piede $A$ della perpendicolare abbassata sul piano orizzontale dal centro $C$ del cilindro sia in una cavità compresa tra quelle pro-

minenze, che non mancano nemmeno nella superficie più levigata, e se sia $h$ l' altezza di una di queste prominenze, il contatto avrà luogo non solamente nel punto $A$, ma anche in un punto $B$ posto dal primo alla distanza $AB = \sqrt{(2hr)}$; e siccome nel ruzzolare del cilindro la rotazione dovrà effettuarsi intorno al punto $B$, così vi occorrerà un giratore eguale al peso del cilindro moltiplicato per la distanza del punto $B$ dalla linea verticale $CA$, ossia moltiplicato (molto approssimatamente) per $\sqrt{(2hr)}$. Da ciò sembra risultare che l' abete ben levigato abbia delle prominenze dell' altezza $h = 0^{mm},0003$.

32. Un cilindro che abbia il raggio $r$, la massa $m$, e rispetto al suo asse il momento d' inerzia $M$, sia poggiato sopra un piano orizzontale e sia soggetto alla gravità $g$, alla forza orizzontale $F$, la cui direzione dimezzi perpendicolarmente l' asse del cilindro, ed al giratore $G$ parallelo a questo asse, e talmente diretto da far ruzzolare il cilindro per lo stesso verso per cui lo tira la forza $F$. Si chiamino $x$ la forza diretta oppostamente alla $F$, ed $y$ il giratore opposto a $G$, i quali rappresentino rispettivamente l' attrito di prima e di seconda specie fra il cilindro ed il piano: sia $f$ il coefficiente dell' attrito della prima specie, sicchè $fgm$ sia il massimo valore a cui può giungere $x$, e sia $\varphi$ la lunghezza che moltiplicata per la pressione $gm$ dà il massimo valore di $y$.

33. Il cilindro rimarrà in quiete se si possano soddisfare le due equazioni $F = x$, $G = y - rx$, essendo $x \prec fgm$, $y \prec \varphi gm$; dove il segno $\prec$ indica disuguaglianze riguardanti i valori assoluti e non i segni, e non esclude l' eguaglianza. Infatti la prima equazione stabilisce l' equilibrio tra la forza orizzontale e l' attrito ad essa opposto, e la seconda stabilisce l' equilibrio tra i giratori, tenendo conto anche di quello prodotto dall' attrito della prima specie. Le condizioni d' equilibrio sono dunque espresse da

$$(1) \qquad F \prec fgm\,, \qquad (2) \qquad G + rF \prec \varphi gm\,.$$

34. Se il cilindro ruzzola senza strisciare, l' attrito della seconda specie si eserciterà per intero, cioè si avrà $y = \mp \varphi gm$; ogni punto del cilindro, nel quale esso tocca il piano, dovrà nel primo istante del

movimento rimanere in quiete. Ora la forza $F - x$ agisce sulla massa $m$, perciò il differenziale della velocità è $\frac{F-x}{m}$; similmente il differenziale della velocità angolare di rotazione risultante dal giratore $G + r\,x \mp \varphi\,g\,m$ è $\frac{G + r\,x \mp \varphi\,g\,m}{M}$, perciò dovrà essere

$\frac{F-x}{m} = r\,\frac{G + r\,x \mp \varphi\,g\,m}{M}$; si noti che $\varphi$ prenderà il segno superiore o l'inferiore secondo che la rotazione avrà luogo in un senso piuttostochè nell'altro, cioè secondo che $G + r\,x \mp \varphi\,g\,m$ (e perciò anche $F - x$) sarà positivo o negativo. Così le condizioni per questo secondo caso saranno espresse da

$$(3)\quad (M + m\,r^2)\,x = M\,F - m\,r\,G \mp \varphi\,g\,m^2\,r \lessgtr (M + m\,r^2)\,f\,g\,m$$

dandosi a $\varphi$ il segno superiore o l'inferiore secondo che

$$(4)\qquad r\,F + G \mp \varphi\,g\,m > \text{ oppure } < 0\,.$$

35. Un terzo caso sarà quello che il cilindro strisci senza ruotare; allora l'attrito della prima specie dovrà avere il suo massimo valore $x = \mp f\,g\,m$, il segno di $x$ essendo quello stesso di $F - x$, e sarà nullo il giratore $G + r\,x - y$; perciò dovrà essere

$$(5)\qquad y = G \mp f\,g\,m\,r \lessgtr \varphi\,g\,m$$

adoperandosi il segno superiore o l'inferiore secondo che

$$(6)\qquad F \mp f\,g\,m > \text{ oppure } < 0\,.$$

36. Finalmente quando vi è nello stesso tempo strisciamento e rotazione; nelle espressioni $F \mp f\,g\,m$, $G \pm f\,g\,m\,r \mp \varphi\,g\,m$ della forza e del giratore che agiscono sul cilindro, $f$ avrà il segno superiore o l'inferiore secondo che sarà

$$(7)\qquad \frac{F \mp f\,g\,m}{m} - \frac{G\,r \pm f\,g\,m\,r^2 \mp \varphi\,g\,m\,r}{M} > \text{ oppure } < 0\,,$$

e $\varphi$ avrà il segno superiore o l'inferiore secondo che sarà

$$(8)\qquad G \pm f\,g\,m\,r \mp \varphi\,g\,m > \text{ oppure } < 0\,.$$

**37.** Ci sarà facile riconoscere che non possono sussistere insieme due delle precedenti (§§ **33. 34. 35. 36.**) condizioni. Supponiamo che sia positiva la quantità $G$, come lo sono necessariamente le $m, r, M, g, f, \varphi$, e per brevità immaginiamo che le $m, r, g$ sieno uguali alle unità di massa, di lunghezza, e di forza. **1.°** Quando hanno luogo le (1) $F \prec f$, (2) $G+F \prec \varphi$, la seconda mostra l'impossibilità della (4) $G+F \mp \varphi >$, o $<0$, e la prima mostra l'impossibilità della (6) $F \mp f >$, o $<0$. — Che se dovessero sussistere le (7) (8) con ambedue i segni superiori cioè

(7) $MF-G-(M+1)f+\varphi>0$ (8) $G+F-\varphi>0$

la somma di queste darebbe $M(F-f)>0$ che è in contraddizione colla (1). — Che se nelle (7) (8) si desse il segno inferiore ad $f$ ed il superiore a $\varphi$ si avrebbe

(7) $MF-G+(M+1)f+\varphi<0$ (8) $G-f-\varphi>0$

ed a motivo delle (1) (2) che danno

$$f+F=, \text{ o } >0 \qquad \varphi-G-F=, \text{ o } >0$$

ne verrebbe, sommando colla (8), $0>0$. — E prendendo ambedue i segni inferiori, le

(7) $MF-G+(M+1)f-\varphi<0$ (8) $G-f+\varphi<0$

sommate darebbero $M(F+f)<0$ in contraddizione colla (1). — Si osservi finalmente che la (8) $G+f+\varphi<0$ è impossibile.

Nel secondo caso trattato al § **34** si prendano da prima i segni superiori, cioè si abbiano le

(5) $MF-G+\varphi \prec (M+1)f$ (4) $F+G-\varphi>0$.

Se dovessero insieme con esse sussistere le (5) (6) coi segni superiori, le quali possono scriversi così (5) $G+f=$, o $<0$, (6) $F-f>0$; dall' ultima moltiplicata per $M$ sottraendo la penultima si avrebbe $MF-G-(M+1)f+\varphi>0$, che è in contraddizione colla (5). — Che se si avessero le (5) $G-f \prec \varphi$ (6) $F+f<0$ la differenza delle (4) (6) darebbe $G-f-\varphi>0$ che è contraddetta dalla (5). — Che se nella (7) si desse a $\varphi$ il segno superiore si avrebbe

(7) $MF-G \mp (M+1)f+\varphi >$, o $<0$ ambedue rese impossibili dalla (5). — Che se si avessero le (7) $MF-G+(M+1)f-\varphi<0$ (8) $G-f+\varphi<0$ sottraendo dalla (4) moltiplicata per $M$ la (7) e

la (8) moltiplicata per $(M+1)$ si avrebbe $-2M\varphi > 0$ che è impossibile.

3.° Nel medesimo secondo caso (§ 34) se si prendano i segni inferiori, e perciò le (5) (4) divengano con facile cangiamento

(5) $-MF+G+\varphi =$ , o $< (M+1)f$ (4) $F+G+\varphi < 0$

la seconda mostra che $F$ è negativa e che perciò non può aver luogo la (6) col segno superiore; in quanto alle (5) $G-f \prec \varphi$, (6) $F+f<0$ quest' ultima moltiplicata per $M$ e sommata alla (5) darebbe $G-f+\varphi<0$ che è contraddetta dalla (5). — Che se si avessero le (7) (8) coi segni superiori, cioè

(7) $MF-G-(M+1)f+\varphi>0$ , (8) $G+f-\varphi>0$

sottraendo dalla (4) moltiplicata per $M$ la (7) e la (8) moltiplicata per $(M+1)$ si avrebbe $2M\varphi<0$ che è impossibile. — Che se fosse

(7) $MF-G+(M+1)f\mp\varphi<0$

sommando colla (5) si avrebbe $\varphi\pm\varphi<0$.

4.° Nel terzo caso (§ 35) prendendo i segni superiori si ha

(5) $G+F=$, o $<\varphi$ (6) $F-f>0$ ;

la prima non può sussistere insieme colla (8) $G\pm f-\varphi>0$. — Che se fosse (7) $MF-G+(M+1)f-\varphi<0$ (8) $G-f+\varphi<0$ dalla (6) moltiplicata per $M$ sottraendo le (7) (8) si avrebbe $-2Mf>0$ , che è assurda.

5.° Finalmente nello stesso terzo caso (§ 35) si prendano i segni inferiori e si avrà (5) $G-f \prec \varphi$ (6) $F+f<0$ e se potessero sussistere anche le

(7) $MF-G-(M+1)f+\varphi>0$ (8) $G+f-\varphi>0$

si avrebbe col precedente calcolo $2Mf<0$ . — È poi evidente che ambedue le (8) $G-f\mp\varphi>$, o $<0$ sono in contraddizione colla (5).

38. Se al cilindro di cui abbiamo superiormente parlato supponiamo sostituito un prisma poggiato con una delle sue facce rettangole sul piano orizzontale, e diciamo $r$ la perpendicolare abbassata dal centro di massa del prisma sul piano orizzontale, e $d$ la distanza del suo piede dallo spigolo intorno a cui il prisma starà per ruotare, noi dovremo considerare oltre la forza $x \prec f\,g\,m$ prodotta dall' at-

trito della prima specie, ed il giratore $\gamma \prec \varphi\, g\, m$ prodotto dall'attrito della seconda specie (e che supporremo sia per lo spigolo del prisma quello stesso che ha luogo nel cilindro) anche il giratore $z \prec g\, m\, d$ dipendente dalla resistenza del piano orizzontale, la quale può indifferentemente esercitarsi nei varii punti della faccia del prisma, e quindi il suo momento rispetto all'asse del prisma può giungere a $g\, m\, d$. Dopo ciò se per esempio si cerchi la condizione perchè il prisma striscii senza ruotare, si troverà $y = G \pm f\, g\, m\, r \prec \varphi\, g\, m + d\, g\, m$ prendendosi l'un segno o l'altro secondo che $p \mp f\, g\, m > , < \varphi$, dove i due termini $p$, $\mp f\, g\, m$ deggiono necessariamente essere di segno opposto.

39. Se non che quando un corpo scorre sopra un altro è da ritenersi che l'attrito della prima specie produca oltre che una resistenza opposta alla direzione del movimento anche un urto perpendicolare alla superficie di contatto, il qual urto potrà secondo le peculiari circostanze tendere a raddrizzare il corpo od a rovesciarlo. Questo urto perpendicolare alla superficie in cui ha luogo l'attrito dipende senza alcun dubbio dalla velocità del movimento; il ragionamento e l'esperienza si accordano nel mostrare che a motivo delle minime asprezze delle superficie dei corpi, nel moto relativo di due corpi a contatto risultano degli urti obbliqui, che tendono nello stesso tempo a diminuire il movimento relativo e ad allontanare i due corpi l'uno dall'altro. — Forse questo effetto dell'attrito non fu bastantemente studiato, e sarebbe molto opportuno l'esaminare se col suo mezzo si potessero compiutamente spiegare quei singolari e pur comunissimi fenomeni presentati dai corpi che girano intorno ad un asse, ed i quali si sostengono in piedi e talvolta si raddrizzano contro quanto sembrerebbe dover risultare dalla gravità: voglio parlare cioè del paléo o trottola, e di quei dischi che in quiete a mala pena possono star dritti sopra un piano perfettamente orizzontale, ed invece ruotando possono scorrere per lungo tratto senza cadere, oppure aggirarsi intorno ad un asse verticale piegandosi or da un lato or dall'altro, e rimanendo in piedi finchè conservino sufficiente velocità di rotazione.

# NOTE

(*Nota I.* § 4.)

Quando alquante forze hanno la risultante nulla, ma non si fanno equilibrio, esse equivalgono ad una *coppia* (*couple*) di forze uguali parallele ed oppostamente dirette. Una retta perpendicolare al piano in cui si trova la *coppia*, e proporzionale al prodotto delle due forze per la loro distanza, rappresenta ciò che io chiamo un *giratore*, perchè l'effetto della coppia da esso espressa si è di far girare il corpo cui sia applicata. Si osservi che la direzione della retta rappresentante il giratore è determinata dalla direzione del movimento rotatorio prodotto dalla coppia. — Due giratori uguali paralleli e diretti per lo stesso verso sono identici qualunque sia la loro posizione. — I giratori rappresentati come sopra si compongono precisamente alla stessa maniera delle forze. — Ogni forza può trasportarsi da un punto ad un altro di un sistema rigido mantenendo la grandezza ed il parallelismo, purchè vi si aggiunga un giratore eguale al prodotto della forza per la distanza delle rette che ne segnano la direzione nelle sue successive posizioni, e perpendicolare al piano di tali rette. — Ad un qualunque sistema di forze e di giratori equivale sempre una forza insieme con un giratore, e la posizione della forza risultante può scegliersi in guisa che il giratore sia ad essa parallelo; allora esso è il minimo possibile. — Un sistema di forze e di giratori è in equilibrio quando la forza ed il giratore risultanti sono ambedue nulli. Ne viene che se un corpo rigido sia sottoposto ad un sistema di potenze, il cui effetto sia distrutto da un sistema di resistenze, se riducansi le potenze ad una forza e ad un giratore, e lo stesso si faccia per le resistenze, coll'avvertenza che la forza risultante di queste abbia un punto comune colla risultante delle potenze; tanto le due forze quanto i due giratori saranno uguali ed opposti.

Quello che io chiamo *giratore* fu detto *asse della coppia*, ed anche *momento lineare*; il nome da me adottato parmi che meglio spieghi la natura della cosa. La parola *coppia* presenterebbe un'idea falsa se non fosse intesa in un significato del tutto particolare; poichè non è vero che due forze quali si vogliano equivalgano ad un giratore, e nemmeno è vero che un giratore non possa risultare se non da una coppia di forze, giacchè esso può egualmente risultare da qualunque numero di forze (purchè abbiano la risultante nulla e non sieno in equilibrio). All'eleganza ed alla semplicità delle teorie meccaniche giova che si considerino separatamente e le forze e i giratori; mostrando la grandissima analogia della composizione delle forze e di quella dei giratori, e poscia dicendo come le forze si compongano coi giratori. Le forze sono espressioni di cause che producono o tendono a produrre moto rettilineo; i giratori sono espressioni di cause che producono o tendono a produrre moto rotatorio. — La tensione di una corda presenta un tipo materiale di una forza, mentre la torsione rappresenta un giratore.

(*Nota II.* § 7.)

In questo § mi sono servito del metodo delle equipollenze, intorno al quale ho già inserita una memoria nel Vol. I. di questa Raccolta dell' I. R. Istituto; del resto ad ognuno sarà facilissimo giungere agli stessi risultamenti.

Secondo quel metodo una direzione scelta ad arbitrio si prende per asse delle unità reali (1), vale a dire tutte le lunghezze parallele a tal asse sono espresse da numeri reali: una direzione perpendicolare a quella prima è l'asse del $\sqrt{}$, vale a dire le lunghezze di tal direzione sono indicate mediante il moltiplicatore $\sqrt{}$, che si calcola precisamente come $\sqrt{-1}$ *radice meno uno,* e che per sincope io chiamo *ramuno:* una terza direzione perpendicolare alle due prime è l'asse del $\wedge$, che io chiamo *ortosale* (da ὀρθὸς retto), perchè si erige perpendicolarmente al piano, cui sono paralleli gli assi $1$, $\sqrt{}$.

Un punto della circonferenza del circolo posto nel piano $1\sqrt{}$ col centro $O$ ed il raggio $r$ è espresso da $OL \triangleq r(\cos x + \operatorname{sen} x\ \sqrt{})$; poichè prendendo dal centro una lunghezza $r\cos x$ nella direzione dell' unità reale, poscia la lunghezza $r\operatorname{sen} x$ nella direzione del ramuno si cade su quella circonferenza. Se $x$ è proporzionale al tempo, il movimento del punto $L$ su quella circonferenza è uniforme: è pure uniforme nella direzione dell' ortosale il movimento espresso da $LM \triangleq \frac{h}{2\pi} x \wedge$. Componendo insieme questi due movimenti otteniamo l'equipollenza dell' elica quale si vede nel testo; differenziandola rispetto ad $x$ si ha la direzione della tangente di tal curva.

Nel caso di $x = 0$ tal direzione è espressa da $r\sqrt{} + \frac{h}{2\pi} \wedge$, e siccome quando si considera la sola direzione di una retta la sua espressione può indifferentemente moltiplicarsi per qualsiasi numero, così la suddetta tangente è anche espressa da $\frac{2\pi r}{h}\sqrt{} + \wedge \triangleq \operatorname{tg} a.\sqrt{} + \wedge$.

Nel suddetto caso di $x = 0$ il punto $M$ dell' elica determinato da $OM \triangleq r$ si trova sopra uno degli assi coordinati, e la generatrice dell' elicoide, che incontra l'asse $\wedge$ sotto l'angolo $b$, e discende al punto $M$, ha la direzione espressa da $\operatorname{sen} b - \cos b \wedge$: si avrà la normale alla superficie elicoidica cercando la retta che è perpendicolare a questa generatrice ed alla predetta tangente dell' elica. Ora rammentando che le due rette espresse da $A + B\sqrt{} + C\wedge$ $A' + B'\sqrt{} + C'\wedge$ sono perpendicolari quando $AA' + BB' + CC' = 0$ sarà facile vedere che la direzione della normale è espressa da $\operatorname{tg} a . \cos b - \operatorname{sen} b . \sqrt{} + \operatorname{tg} a . \operatorname{sen} b . \wedge$. E se in questa direzione dee prendersi la forza $\Delta N$ essa sarà rappresentata da

$$\frac{\operatorname{tg} a . \cos b - \operatorname{sen} b . \sqrt{} + \operatorname{tg} a . \operatorname{sen} b . \wedge}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}} \Delta N ;$$

dove il moltiplicatore di $\Delta N$ rappresenta una retta, la cui lunghezza è uguale all' unità, e perciò esso non cangia la grandezza di $\Delta N$.

(*Nota III. al* § 9.)

Abbiamo già veduto nella Nota precedente che nel punto dato da $OM \mathbin{\Omega} r$ la tangente dell'elica e la normale alla superficie elicoidica possono rappresentarsi rispettivamente con

$$\operatorname{sen} a \,.\, \mathrm{V} + \cos a \,.\, \Lambda \;, \quad \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \mathrm{V} + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \Lambda}{\cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}}$$

ed è facile vedere che la retta perpendicolare ad entrambe avrà la direzione espressa da

$$\frac{\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \,.\, \cos a \,.\, \cos b \,.\, \mathrm{V} - \operatorname{sen}^2 a \,.\, \cos b \,.\, \Lambda}{\cos b \,.\, \sqrt{(\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{sen}^2 a)}}$$

così si hanno le espressioni di tre rette eguali all'unità e tra loro perpendicolari; da queste espressioni si ricava che la retta verticale eguale all'unità ed espressa da $\Lambda$ ha sulle tre rette predette le proiezioni $\cos a$, $\dfrac{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}{\cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)}}$, $\dfrac{-\operatorname{sen}^2 a \,.\, \cos b}{\cos b \sqrt{(\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{sen}^2 a)}}$; perciò le tre componenti della forza $-\Delta F$ sono quelle date nel testo. Dicasi simil cosa della decomposizione di $\dfrac{\Delta G}{r} \mathrm{V}$.

Può notarsi che $\cos b \sqrt{(\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{sen}^2 a)} = \cos a \sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{sen} b^2)}$.

(*Letta il* 30 *Gennaio* 1847.)

# SAGGIO

# SULL'ALGEBRA DEGLI IMMAGINARII

DEL PROF.

GIUSTO BELLAVITIS

Vi sono dei Filosofi, vi sono degli Scienziati, che pretenderebbero che per rettamente ragionare si dovessero da prima definire esattamente quelle idee delle quali vuol trattarsi; che si dovessero aver sempre presenti al pensiero le definizioni, per vedere se sia ad esse conforme quanto di quelle idee si andrà discorrendo. Vorrebbero questi scrupolosi che non si desse alle parole maggior valore di quello che comporti la definizione: vorrebbero che dalle scienze affatto si proscrivessero le parole di significato o non ben preciso od ambiguo. — Esigenze queste che alcuno direbbe esorbitanti e non poco minaccevoli alla vastità di molte scienze: nulladimeno non si saprebbe negare a tali esigenze un cotal poco di ragionevolezza quando si rivolgono a quelle scienze che pretendono esser figlie immediate della sola ragione, alla Filosofia cioè ed alla Matematica pura; — della Filosofia non intendo parlare.

Per quegli scrupolosi le formule dell'Algebra ed i loro calcoli sarebbero chimere o giuochi da fanciulli, se le lettere ed i segni, che si contengono in quelle formule, non esprimessero dei numeri e delle operazioni, delle quali si abbiano idee compiute e precise. E quando

la Matematica acquistò vastissimo e nuovo campo nello studio sistematico di quelle idee, considerate (non v'ha dubbio) anche dagli antichi, e che i moderni denominarono o *indivisibili*, o *flussioni*, o *differenziali;* quegli scrupolosi si fecero a dimandare che cosa s'intendesse per un *infinitesimo* minore di qualsiasi quantità, in che esso differisse dal nulla, o come si pretendesse calcolare dei nulla quasi fossero delle quantità: ed i Matematici, per cercare di rispondere a tali dimande, volsero e rivolsero quelle idee, immaginarono i *limiti*, e le *derivate*, e forse non fecero che allontanare più o meno la difficoltà, senza poterla del tutto superare. — Considerando gl' infinitesimi come quantità piccolissime, il loro calcolo diviene pienamente legittimo; ma il trascurare poi tali quantità in confronto delle quantità finite, altra volta ritenere le quantità infinitesime e trascurare le infinitesime d' ordine superiore, sono cose che fanno pensare che i calcoli sieno soltanto approssimati: e qualche illustre Matematico non si astenne dall' adoperare un linguaggio, che confermerebbe vie più in tale supposizione; se d' altronde a tutti i Matematici non fosse certissimo, che i ragionamenti del calcolo infinitesimale, per quanto possano sembrare imperfetti nella forma, sono rigorosamente veri nella sostanza.

Se tanta difficoltà si ebbe e si ha tuttavia nell' ammettere che le regole, con cui si calcolano le quantità finite, possano applicarsi a quantità infinitesime od evanescenti; potrebbe credersi a buon dritto che maggiori difficoltà si saranno promosse quando si pensò di applicare quei calcoli a quantità che non sono quantità, ad idee, delle quali questo solo può dirsi che contengono una contraddizione; che sono impossibili. Nulladimeno, mentre anche molti ignari delle Matematiche parlarono a lungo delle oscurità del calcolo infinitesimale, e credettero che le loro obbiezioni valessero a smuovere i fondamenti della scienza, fu poi riguardato con molto maggior indulgenza il calcolo delle *quantità immaginarie*. È vero che l'idea di *quantità* nasce dal confronto di due cose della stessa specie, e precisamente da quel *quante volte* una delle cose dovrebbe togliersi all' altra per interamente esaurirla; è vero che *quantità immaginaria* è un' idea affatto

differente, se pur può dirsi idea l'accozzamento di due parole: ma dal momento che queste quantità immaginarie si esprimevano con una lettera o con un segno, e si calcolavano alla maniera delle quantità, pare che la massima parte dei Matematici se ne sieno pienamente accontentati.

E d'altronde sono pur cose mirabili quell'introdurre nelle formule dei segni senza alcun possibile significato, e poscia dopo un certo lavoro di calcolo trarne fuori una qualche verità; quel ricercare una soluzione impossibile e veder l'Algebra che risponde con una quantità immaginaria, e tal'altra volta cercare una quantità reale e trovare una formula tutta involta di simboli immaginarii e perciò affatto inutile. La realtà è spesso così gretta, l'immaginario così meraviglioso, che a niuno dee spiacere che anche la Matematica abbia i suoi immaginarii! Non è guari che un celebre Matematico cercò estendere i calcoli a tre immaginarii anzichè ad uno solo.

Ad onta di tutto ciò quegli scrupoli di cui or ora parlava, quelle esigenze di definire l'oggetto del discorso giunsero talvolta a promuovere dei dubbii anche contro le *quantità immaginarie*; così il celebre Cauchy dichiarò che i raziocinii estesi dal reale all'immaginario non possono considerarsi che come induzioni atte a far indovinare qualche volta la verità, ma che poco si accordano colla tanto vantata esattezza delle scienze matematiche, ed egli considerò ogni equazione contenente immaginarii come un'espressione simbolica di due equazioni fra quantità reali; ma dubito molto che se si volessero seguire tali rigorosi principii, l'uso delle quantità immaginarie perderebbe ogni facilità.

Chi abbia scorsa un'opera d'Algebra può inoltre aver osservato che, quantunque si ritenga come cosa per sè stessa evidente, che alle quantità immaginarie si possano applicare i calcoli e le regole che valgono per le quantità reali, nulladimeno quasi tutte le questioni si riferiscono propriamente alle sole quantità reali; e delle quantità immaginarie si parla soltanto quando esse vengono ad introdursi nel processo del calcolo. Così per esempio se si tratta della risoluzione di un'equazione algebraica, si suppone che tutti i suoi coefficienti

sieno reali; e di quantità immaginarie si parla solamente quando si trova che il numero delle radici reali è minore del grado dell' equazione: — nei problemi di massimo o minimo tacitamente si suppone che le variabili abbiano valori reali; . . . . . nè finirei sì presto se volessi accennare tutti i casi, nei quali si considerano per regola le quantità reali, e le quantità immaginarie soltanto per eccezione.

Ora ammessa una volta la legittimità dei calcoli delle quantità immaginarie, io credo che tal principio debba adoperarsi in tutta la sua generalità, e che debba formarsi un' Algebra, la quale tratti sempre degl' *immaginarii* (e quando dico *immaginarii* intendo parlare dei soliti binomii contenenti una parte reale ed una immaginaria senza escludere il caso che manchi la seconda parte, e perciò l' immaginario si riduca ad una quantità reale). Di questa Algebra più generale delle Algebre finora scritte mi propongo di dare un Saggio nella presente Memoria. — Scorrendo questo Saggio si vedrà quante questioni dell'Algebra meritassero di essere considerate sotto un punto di vista più generale, e forse si riconoscerà che molto rimane ancora da fare in questo argomento.

Veramente io crederei che l'Algebra delle quantità reali fosse una scienza da trattarsi prima e separatamente dall' Algebra degl' immaginarii, della quale essa è un caso particolare; ma molti Matematici hanno una decisa predilezione per procedere invece dal generale al particolare; eglino potranno soddisfare tal predilezione cominciando a bella prima dall' Algebra degl' immaginarii. Ho detto che a mio credere l' Algebra delle quantità reali dovrebbe trattarsi separatamente dall' altra, perchè io credo che anche senza nemmeno nominare una quantità immaginaria l' Algebra possa spingersi molto innanzi; forse più di quanto può occorrere a chiunque abbia bisogno di conoscere le verità dell' Algebra senza poi formarsene uno studio speciale. Qual danno si arrecherebbe all' insegnamento se agli studiosi si parlasse delle sole vere quantità, e così si perdesse una occasione per abituarli a ritenere che i dotti hanno il potere di chiamare quantità anche ciò che non è una quantità, e che dal momento che ad una cosa si diede il nome di quantità, essa è soggetta alle stesse regole delle

vere quantità? Di tale questione non intendo occuparmi, chè già il mio desiderio che l' Algebra delle quantità si esponga senza considerare gl' immaginarii è forse soltanto una utopía.

Qualunque sia il picciol conto in cui debba tenersi l' esigenza di non trattare se non di cose esattamente definite, pure io non ardirei occuparmi delle quantità immaginarie se non avessi un tipo reale a cui riferirle, se dovessi limitarmi all' unione di due parole *quantità* ed *immaginaria,* e ad una condizione, cui nessuna quantità può soddisfare: per quanta fiducia io voglia avere in quella certa facoltà, che dicesi ragione umana, non potrei astenermi dal temere che essa cada in qualche errore quando non vi sia un fatto, il quale verifichi o raddrizzi le sue deduzioni . — Forse che si potrebbe addurre qualche esempio di errori, in cui sia caduta la ragione umana quando si occupò di sole idee astratte.

Il tipo, o, come si disse, la rappresentazione delle quantità immaginarie, fu data da parecchi Analisti molto prima che io ne deducessi il mio metodo delle equipollenze; anche il Cauchy la adopera non rade volte, ma sempre come un mezzo di esprimere più chiaramente qualche circostanza relativa alle quantità immaginarie, non già come l' essenziale ed unica definizione delle medesime: io invece la prenderò come la vera definizione, e da essa dedurrò le proprietà degli immaginarii.

Consideriamo un piano verticale, in esso una retta orizzontale, e in questa un punto di origine: una porzione della linea orizzontale contata dal punto di origine ci rappresenta una quantità reale, che è positiva se il secondo estremo della porzione di retta è a destra del punto di origine, e negativa nel caso opposto. Ora se pel punto di origine sia tirata sul piano verticale una qualunque retta non orizzontale, essa ci rappresenterà ciò che noi, per discostarci il meno possibile dal comune linguaggio, diremo un *immaginario*. Vedremo che questo *immaginario* è soggetto alle stesse regole, a cui si sottopone quel *non so che,* cui gli Analisti dissero una *quantità immaginaria:* e vedremo che una retta verticale condotta pel punto di origine ed uguale all' unità di lunghezza, corrisponde colla quantità immaginaria $\pm\sqrt{-1}$.

Che cosa è la somma di due immaginarii? Ciò deve stabilirsi per definizione, non mai dedursi dalla definizione relativa alla somma delle quantità, che ne è soltanto un caso particolare. La somma di due immaginarii è espressa da una retta, la quale potrebbe anche rappresentare nel solito modo la risultante di due forze applicate al punto di origine e rappresentate dalle rette, che esprimono i due immaginarii che vogliono sommarsi.—Il prodotto di due quantità si riduce ad una somma quando il moltiplicatore è un numero intero; ma la definizione è più difficile se i due fattori sieno quantità frazionarie od anche incommensurabili. Parmi che il prodotto sia quella quantità, nella quale si cangia il moltiplicatore quando all' unità si sostituisce il moltiplicando: nello stesso modo il prodotto di due immaginarii è espresso da quella retta, che ha con quella esprimente il moltiplicando lo stesso rapporto di *grandezza* e d' *inclinazione*, che la retta esprimente il moltiplicatore ha con quella che esprime l' unità.

Nella retta che esprime un immaginario si nota la grandezza e l' inclinazione: quando quest' ultima è 0.° o 180.° l' immaginario diventa una quantità positiva o negativa. I nomi di *grandezza* e d' *inclinazione* nascono spontanei dall' oggetto, e sono molto più opportuni di quelli di *modulo* e di *argomento*, che adoperandosi in altri significati porterebbero non poca confusione, come in seguito avremo occasione di osservare.

Supposto che non giovi occupare i Matematici studiosi nell' esame di oggetti nè definiti, nè definibili, io crederei che anche nell' Algebra elementare se pur si vogliano nominare gl' immaginarii, essi si debbano considerare come rappresentanti le rette inclinate a quella retta, su cui si prendono le quantità reali: val meglio cercare un tipo ed una definizione nella Geometria, piuttostochè parlare di cosa, di cui non può formarsi alcuna idea. Otterrebbesi un altro vantaggio nel collegare per tal guisa l' Algebra elementare colla Geometria piana, che si abituerebbe lo studioso al linguaggio del metodo delle equipollenze, il quale con pochissimi principii insegna a trovare per via diretta i teoremi della Geometria elementare, comprende sotto un più ampio aspetto il metodo delle coordinate, ed è utile in tutta la Geo-

metria e la Meccanica. La rappresentazione geometrica degli immaginarii, che era quasi affatto dimenticata quando alcuni anni or sono io ne traeva il metodo delle equipollenze, forma ora oggetto di frequentissime comunicazioni nel *Philosophical Magazine*.

L'oggetto della presente memoria non è, come già dissi, l'uso geometrico del metodo delle equipollenze, bensì lo studio puramente algebraico degl'immaginarii considerati in tutta generalità. Io tratto da prima della risoluzione delle equazioni nelle quali l'incognita è elevata ad alcune potenze espresse da numeri interi, ed i coefficienti sono per regola immaginarii, e soltanto per eccezione divengono quantità reali. Il primo teorema da dimostrare è quello che tali equazioni ammettono sempre tante radici quant'è il loro grado. Credo che debba aggiungersi qualche considerazione, onde rendere del tutto rigorosa la dimostrazione data dal Cauchy dell'essere impossibile che un'equazione algebraica sia priva di radici. Continuando l'esame della teoria delle equazioni, mi si offerse subito una lacuna nell'Algebra degl'immaginarii: in quella dei reali il teorema del Rolle insegna che fra due radici ne cade sempre una dell'equazione derivata; nelle equazioni ad immaginarii resta ancora vero che se l'equazione ha due radici uguali, tale radice soddisfà anche all'equazione derivata; ma qual è il teorema analogo a quello del Rolle? Quali relazioni di posizione vi sono tra i punti che rappresentano le radici di un'equazione, e quelli che rappresentano le radici della sua derivata? — La compiuta risoluzione delle equazioni esige poi il calcolo degl'*indici*, il quale senza dubbio non sarebbe stato scoperto dal Cauchy, se egli non avesse conosciuta la rappresentazione geometrica degl'immaginarii.

Io espongo da prima le formule per la risoluzione algebraica, le quali quando si tratta di equazioni ad immaginarii sono sempre egualmente adoperabili non essendovi più caso irreducibile. Passo poi alla risoluzione numerica approssimata delle equazioni, la quale presenta dei calcoli non poco laboriosi; ma si noti che se per risolvere un'equazione a coefficienti immaginarii si vuol cominciare col ridurla a coefficienti reali; ciò ne raddoppia il grado, e poi rimane da cercare le radici immaginarie di tal equazione: operazione questa tutt'altro che spedita.

Un argomento molto più singolare e piccante si presenta nella teoria dei numeri interi. Quando si vogliono introdurre nell' Algebra gl' immaginarii in tutta la generalità, anzichè in via d' eccezione, sono interi non solo i numeri reali, ma eziandio le somme di numeri reali e di numeri moltiplicati per $\sqrt{-1}$. — Buona parte della teoria degli immaginarii interi può modellarsi su quella dei numeri interi; ma per ben altra parte occorre inventare nuovi metodi, scoprire nuove proposizioni, e nel presente Saggio bene spesso non potei far altro che indicare le questioni che io non seppi risolvere.

È noto che nella teoria dei numeri interi sono chiamati numeri *primi*, e sono considerati come indecomponibili in fattori i numeri 2, 3, 13, 17, ec.; invece nella più vasta teoria degli interi reali od immaginarii questi sono interi composti, e rimangono semplici solamente i numeri 3, 7, 11, 19, ec. e gli immaginarii $1+\sqrt{}$, $2\pm\sqrt{}$, $3\pm 2\sqrt{}$, $4\pm\sqrt{}$, $3\pm 2\sqrt{}$, ec.

Ho creduto che darei qualche utilità al presente Saggio estendendomi alcun poco intorno alla più comoda risoluzione delle varie questioni riguardanti gl' interi: nello stesso tempo che, trattando l' argomento sotto il più ampio aspetto da me assunto, le teorie divenendo più generali, divennero talvolta più semplici. Indico come si decomponga nei suoi fattori semplici un numero anche grandissimo, e poscia la considerazione degl' immaginarii mi mostra che da questo problema si deduce la risoluzione di quell' altro di trovare due numeri reali conoscendo la somma dei loro quadrati.

Nella teoria degl' interi si ha il calcolo delle *congruenze*, le quali presentano tante curiose analogie colle equazioni (due interi si dicono *congruenti* quando o sono uguali o differiscono di un dato *modulo* moltiplicato per un qualunque intero arbitrario). Le congruenze più osservabili sono quelle a modulo semplice; ed abbiamo già notato che nel calcolo degl' immaginarii cessano d' esser semplici i numeri primi 2, 3, 13, ec. Una di tali congruenze non può avere più radici del suo grado; avrebbe potuto credersi che introducendo gl' immaginarii anche nella teoria degli interi, il numero delle radici fosse sempre uguale al grado della congruenza: ma la cosa non è così; vi sono

delle congruenze anche di grado dispari affatto prive di radici, altre che hanno un numero di radici minore del grado. Per tali congruenze cessano d' esser applicabili quelle formule simmetriche, mediante le quali i coefficienti della congruenza si esprimono in funzione delle radici. Si potrebbe forse introdurre nel calcolo un simbolo che indicasse la mancanza di qualche radice; questo simbolo lo si chiamerebbe, per esempio, un numero *ultraimmaginario,* e datogli una volta il nome di numero si riterrebbe d' essere in diritto di calcolarlo come un numero; e le pagine si empirebbero di calcoli su questi numeri ultraimmaginarii; ed allora tutte le congruenze avrebbero buono o mal grado tante radici quant' è il loro grado; e si magnificherebbe la generalità dell' Algebra che cogli *ultraimmaginarii* indicherebbe la mancanza di radici reali od immaginarie. Ecco un bel campo per gli amatori degli immaginarii; per me confesso che non so andare se non terra terra; ove non abbia un tipo reale che mi offra un significato alle cifre, diffido della mia ragione, diffido fin anche dei calcoli.

Molto difficile è la risoluzione numerica delle congruenze (specialmente di quelle a modulo reale); credo che manchi ogni criterio da sostituirsi agl' *indici*, che vedemmo quanto utili riescano nella teoria delle equazioni limitando il numero dei tentativi; peraltro i metodi che servono per la risoluzione delle equazioni del 3.° o del 4.° grado. o, a dir meglio, per la loro riduzione ad equazioni binomie, servono egualmente per le congruenze. L' analogia farebbe supporre che una congruenza del 3.° grado avente una sola radice non potesse mai condurre al caso irreducibile; pure la cosa non è cosi; viceversa vi sono delle congruenze con tre radici che non cadono nel caso irreducibile.

La risoluzione delle congruenze binomie sarebbe facilissima, se per ciascun modulo si formassero tutte le potenze di una radice primitiva; gli esponenti di tali potenze furono chiamati *indici*, io credo più opportuno di chiamarli *logaritmi ;* perchè infatti essi hanno le proprietà dei logaritmi, e la risoluzione delle congruenze binomie si riduce alla divisione del logaritmo del termine dato per l' esponente dell' incognita. Nel calcolo degl' immaginarii queste parziali tavole di logaritmi diventerebbero molto estese quando il modulo reale sia al-

cun poco grande: faccio però vedere come anche una tavola minore sia sufficiente a trovare tali logaritmi.

Nel presente Saggio mi estesi alcun poco esponendo il metodo che praticamente mi sembra più utile per determinare le radici primitive delle congruenze binomie; trattai più brevemente delle congruenze a modulo composto; e della ricerca dei moduli che rendono possibili date congruenze, vale a dire dei divisori delle espressioni di data forma. Passo da poi alla risoluzione delle equazioni indeterminate del 2.° grado, nelle quali naturalmente si distinguono le equazioni omogenee a tre incognite, e le non omogenee a due sole incognite: non sarà inutile vedere come per le prime i metodi dell' immortale Lagrangia si applichino anche al caso degl' immaginarii, e come anzi la maggior generalità dell' argomento renda il metodo alquanto più semplice. Rimane molto più difficile la risoluzione delle equazioni non omogenee relative agl' immaginarii.

Abbozzati così alcuni capi di quella estesissima teoria che potrà formarsi sulle proprietà degl' immaginarii interi, mi occupo di estendere le altre parti dell' Algebra agl' immaginarii trattati in tutta la generalità.

Se in un termine di un' equazione algebraica l' incognita prende un esponente irrazionale, l' equazione diventa trascendente: quando si rifletta alla difficoltà di trovare una radice immaginaria di equazioni algebraiche si potrà credere che la difficoltà diventerà molto maggiore per tali equazioni trascendenti; ma queste hanno un numero infinito di radici immaginarie, e l' abbondanza rende facile la ricerca. Si potrebbe dire che anche le equazioni algebraiche hanno un numero infinito di radici immaginarie; se non che tutte quelle, che differiscono soltanto per un numero intero di circonferenze nella loro inclinazione, vanno a coincidere in uno stesso punto: invece nell' equazione trascendente tutte le radici cadono in infiniti punti di una curva; curva singolarissima, perchè non è costituita da punti contigui, bensì da punti che si succedono saltuariamente, e che quantunque di numero infinito pure non si può dire che coprano tutta la curva, poichè si può dimostrare che essi lasciano tra di loro infiniti intervalli: ossia,

in altri termini, infiniti punti della curva soddisfanno l' equazione, ed infiniti tra loro intercalati non la soddisfanno.

La cosa diviene più singolare se l' equazione contenga due termini, nei quali l' incognita sia elevata a potenze di esponenti irrazionali anche fra di loro; allora qualunque immaginario (tranne quelli compresi in alcuni particolari spazii) può prendersi approssimatamente per radice. Non so che alcuno abbia trattato di queste equazioni che sono approssimatamente soddisfatte da qualsiasi immaginario; mi pare che esse sieno una fra le tante prove del moltissimo che rimane da fare nell' Algebra degl' immaginarii.

Venendo alle funzioni trascendenti degl' immaginarii, bisogna da prima stabilirne la definizione in guisa ch' essa comprenda quella relativa alle quantità reali, e conduca a leggi analoghe. Nel calcolo dei reali si hanno gli Esponenziali ed i Logaritmi, dai quali dipendono i Seni iperbolici e le funzioni opposte: hanno con queste ultime molta analogia, ma ne sono affatto separate le funzioni dette Seno ed Arco-seno. Invece nel calcolo degl' immaginarii gli esponenziali ed i logaritmi, ed i seni iperbolici e le funzioni opposte che ne provengono, comprendono come caso particolare anche i comuni seno ed arco-seno: così nel calcolo degl' immaginarii tutte le funzioni considerate nell' Algebra elementare si riducono al logaritmo ed alla sua funzione opposta.

Prima di procedere agli sviluppi in serie infinite di queste particolari funzioni, giova trattare in generale delle derivate delle funzioni e del teorema del Taylor. Supponiamo che nel nostro solito piano verticale il punto $\dot{X}$ prenda una qualunque posizione, ed a ciascuna sua posizione corrisponda una determinata posizione di un punto $\dot{Y}$ situato nello stesso piano verticale, o se si ami meglio in un altro piano, nel quale egualmente sia stabilita l' *origine* e l' *unità* delle lunghezze reali; si dirà che l' immaginario $Y$ (esprimente la posizione del punto $\dot{Y}$) è *funzione* dell' immaginario $X$. Tutto l' insieme dei punti $\dot{Y}$ costituisce una figura che ha una certa dipendenza dalla figura dei punti $\dot{X}$: così per esempio, se sia $Y = \frac{1}{X}$ una figura potrà dirsi l' *inversa* dell' altra, e fra le due figure avranno luogo certe re-

lazioni da me studiate in apposita memoria (Annali delle scienze Vol. VI. 1836). — Ora se il punto $\dot{X}$ si muova un cotal poco, lo stesso avverrà del punto $\dot{Y}$, il rapporto dei due spostamenti sarà esprimibile da un immaginario, e quando gli spostamenti divengano infinitesimi il limite di tal rapporto si dirà la *derivata* di quella *funzione*, che stabilisce la relazione tra $Y$ ed $X$. Ma l' esistenza di questo limite costituente la *derivata* presenta forse qualche non superata difficoltà anche nel calcolo dei reali, e mi pare che molto più sarebbe necessaria una rigorosa dimostrazione nel calcolo degl' immaginarii.

Coloro che hanno in avversione gli scrupoli troverebbero forse inopportuna la difficoltà da me proposta, e giudicherebbero che il passaggio dal reale all' immaginario autorizzi pienamente ad ammettere le derivate anche delle funzioni di immaginarii; e che così sia evidentissimo che, per esempio, la funzione $Y=\frac{1}{X}$ abbia la derivata $=\frac{-1}{X^2}$. Io risponderei che quando l' accrescimento della variabile è reale, esso nel divenire infinitesimo percorre una retta di stabilita direzione; invece quando il punto $\dot{X}$ passa dalla sua posizione primitiva ad una posizione infinitamente poco variata, esso può percorrere od una retta di varia direzione, od una curva qualunque, per esempio una spirale ad infiniti giri: ora chi ci assicura che in tutte queste maniere di movimento il rapporto dei due spostamenti infinitesimi di $\dot{X}$ e di $\dot{Y}$ abbia sempre un medesimo valore? — Che se questo mio dubbio non persuadesse, io avrei in serbo un' altra ragione per combattere l' evidenza del teorema: direi che il teorema è si poco evidente che esso è falso. Supponiamo che la figura piana formata dai punti $\dot{Y}$ sia *affine*, cioè sia una *prospettiva parallela* della figura dei punti $\dot{X}$; sarà ancora vero che a ciascun punto $\dot{X}$ corrisponde con determinata legge un punto $\dot{Y}$, perciò ancora potremo dire che l' immaginario $Y$ è *funzione* dell' immaginario $X$, ma non più esisterà la *derivata* di tal funzione. So bene che in tal caso $Y$ dipende da $X=x+\xi\sqrt{-1}$, e dal suo valore *conjugato* $x-\xi\sqrt{-1}$, ma ciò non toglie che $Y$ sia funzione di $X$. — Così nel calcolo degl' immaginarii bisogna distinguere

le funzioni suscettibili di derivazione, e quelle, alle quali non si saprebbe applicare il calcolo differenziale, almeno nella sua forma ordinaria.

## § I.

### *Preliminari*

1. Il calcolo degl' immaginarii, secondo la mia maniera di vedere, ha per oggetto lo studio delle relazioni di grandezza e d' inclinazione delle rette poste in un piano, aventi un loro estremo in un determinato punto $O$, e riferite ad una determinata retta $\overline{O1}$ (*Fig.* 1.ª). Supponiamo per fissare le idee che il piano sia verticale, ed in esso sia tirata la retta orizzontale $\overline{O1}$, che noi prenderemo per unità delle lunghezze. Qualunque punto $m$ di quella orizzontale, o, a dir meglio, la sua distanza $\overline{Om}$ dal punto di origine $O$, rappresenta evidentemente una quantità che può sempre esprimersi con un numero intero o frazionario: che se il punto $n$ cada a parte sinistra dell' origine $O$, mentre 1 è alla parte destra; il punto $n$, ossia la retta $\overline{On}$, rappresenta una quantità negativa. Questa maniera di rappresentare le quantità è affatto ovvia, ed è opportunissima a render chiaro il significato di quantità negativa. Del resto la quantità è un' idea generale, che può applicarsi a moltissime altre cose, oltre che alle lunghezze; per lo che la precedente rappresentazione delle quantità non è indispensabile, potendosi per altra maniera acquistare l' idea di quantità.

La cosa è ben altrimenti per quelle che gli Analisti dicono *quantità immaginarie*. Quando non si voglia prendere questa frase per un' idea senza alcun oggetto reale, senza origine logica, e soltanto come il segno di un' impossibilità, bisogna cercare un qualche tipo con cui esprimerla: esso si trova solamente (almeno per quanto è finora conosciuto) nella Geometria. Questo tipo essendo unico non è, a propriamente parlare, la rappresentazione delle quantità immaginarie (poichè non si rappresenta se non ciò che già esiste); ma costituisce la loro vera essenza.

Fuori della predetta orizzontale $\overline{O1}$ sia nel nostro piano verticale un punto qualunque $X$; la retta $\overline{OX}$, che lo unisce coll' origine $O$, non è esprimibile con una quantità (poichè le quantità sì positive che negative si prendono sulla orizzontale $\overline{nOm}$) bensì è il tipo di ciò che noi diremo un *immaginario*. L' *immaginario* è dunque un' idea più generale di quantità; come una retta comunque inclinata $\overline{OX}$ è più generale di una retta orizzontale $\overline{Om}$. Se per un caso particolare il punto $X$ cade sulla retta $\overline{O1}$ l' immaginario diventa una quantità, poichè allora le due rette $\overline{O1}$ $\overline{OX}$ hanno la stessa inclinazione, ed il loro rapporto dà appunto l' idea di quantità.

L' immaginario comprende una relazione di grandezza e d' inclinazione fra la retta qualsivoglia $\overline{OX}$ e la $\overline{O1}$ assunta per unità e per orizzontale. Si rammenti sempre che per *immaginario* non intendiamo una idea in qualche maniera opposta a *quantità reale,* bensì un' idea generale, di cui la quantità è un caso particolare. E quando diciamo *quantità* intendiamo sempre *quantità reale,* come la sola idea che veramente sia una quantità.

2. La *somma* di due immaginarii rappresentanti le rette quali si vogliano $\overline{OX}$ $\overline{OY}$ rappresenterà la retta $\overline{OZ}$, essendosi tirata la $\overline{XZ}$ eguale parallela e diretta per lo stesso verso della $\overline{OX}$. Se i due immaginarii divengono due quantità $\overline{Ol}$ $\overline{Om}$ ben si vede che prendendo $\overline{ls}$ eguale parallela e diretta per lo stesso verso della $\overline{Om}$, la $\overline{Os}$ è la somma delle due quantità $\overline{Ol}$ $\overline{Om}$; dunque la data definizione della somma degli immaginarii comprende quella che vale per le quantità. È palese che la somma degli immaginarii $\overline{OX}$ $\overline{OY}$ è identica alla somma degli $\overline{OY}$ $\overline{OX}$, e che la definizione e le conseguenze possono estendersi ad un qualunque numero d' immaginarii.

Colla *sottrazione* si ricerca una differenza che sommata col sottrattore produca la quantità da cui questo deve sottrarsi. Estendendo questa definizione agli immaginarii per sottrarre l' immaginario $\overline{OY}$ dall' immaginario $\overline{OZ}$ basterà tirare la retta $\overline{ZX}$ eguale e parallela alla $\overline{OY}$, ma diretta in senso opposto, e sarà $\overline{OX}$ la differenza cercata.

3. *Moltiplicare l'immaginario* $\overline{OX}$ (*Fig.* 2.ª) pel numero 3 vuol dire sommarlo a sè stesso due volte, perciò si prenderà sulla prolun-

gazione della $\overline{OX}$ le $\overline{XB}$ $\overline{BC}$ eguali e parallele alla $\overline{OX}$, e sarà $\overline{OC}$ il *prodotto* di $\overline{OX}$ per 3. Il prodotto dell'immaginario $\overline{OX}$ per la quantità $\overline{Om}$ si avrà supponendo che l'unità $\overline{O1}$ a cui è riferito $\overline{OX}$ si cangi nella $\overline{Om}$, perciò prenderemo $\overline{OD}$ tanto maggiore di $\overline{OX}$ quanto $\overline{Om}$ lo è di $\overline{O1}$, ossia formeremo il triangolo $OmD$ simile al triangolo $O1X$. Similmente il *prodotto* $\overline{OP}$ dell'immaginario $\overline{OX}$ per l'immaginario $\overline{OY}$ si avrà formando il triangolo $OYP$ simile ad $O1X$. Si noti bene che questi triangoli oltre che simili devono essere talmente disposti che se uno di essi giri intorno ad $O$, finchè la $\overline{O1}$ cada sulla $\overline{OY}$, la $\overline{OX}$ vada a cadere sulla $\overline{OP}$, e la $\overline{1X}$ riesca parallela alla $\overline{YP}$: eguale osservazione dovrà ripetersi in tutti i casi analoghi.

È facilissimo dimostrare che il prodotto di due o più immaginarii è lo stesso con qualunque ordine essi si prendano; e che se l'immaginario $\overline{OZ}$ sia la somma degli immaginarii $\overline{OX}$ $\overline{OY}$, il prodotto di $\overline{OZ}$ per un altro immaginario qual si voglia è uguale alla somma dei prodotti del medesimo immaginario per gli immaginarii $\overline{OX}$ $\overline{OY}$; ecc. Quantunque le dimostrazioni di questi teoremi analoghi a quelli, che valgono per le quantità, sieno necessarissime onde fondare sopra salda base l'Algebra degli immaginarii, pure io non mi fermerò ad annojare con lunghi dettagli il Lettore, che per certo saprà supplire a quanto quì ommetto, e che ho già pubblicato nella Memoria sul metodo delle equipollenze inserita nei Vol. VII. e VIII. 1837 — 38 degli Annali delle scienze del Regno Lomb. Veneto.

4. Perchè non nasca alcuna confusione fra le lettere colle quali vogliamo esprimere una quantità, e quelle, che esprimono un immaginario, il quale soltanto come caso particolare può essere una quantità; adotteremo di adoperare costantemente per le prime le minuscole, per le seconde le majuscole. Ci potranno servire quelle stesse lettere, colle quali abbiamo indicati i secondi estremi delle rette rappresentate dagli immaginarii, ommettendo la lettera $O$, la quale adoperata sola non potrebbe indicare se non che lo zero. Conserveremo tutti i segni dell'Algebra; e quando scriveremo, per esempio, $XY$ intenderemo il prodotto dei due immaginarii $X$ $Y$; non già la retta

che unisce i due punti $\dot{X}$ $\dot{Y}$; rappresentati da quei due immaginarii.

5. Da quanto abbiamo superiormente accennato risulta la verità delle equazioni analoghe alla $U(Y+X)=UY+UX$; e per dimostrare la $U(Y-X)=UY-UX$ basterà notare che se nella *Fig.* 1.ª si prenda la retta $\overline{OA}$ eguale alla $\overline{OX}$ e sulla sua prolungazione nel verso $\overline{XO}$, sarà $Y-X=Y+A$, perciò $U(Y-X)=UY+AU$; ora la retta rappresentata dal prodotto $AU$ differisce da quella, che rappresenta il prodotto $UX$, soltanto per aver opposta direzione, sicchè si ha eziandio $U(Y-X)=UY-UX$. Ci sarà pur facile intendere che $(U-V)(Y-X)=UY-UX-VY+VX$, e si vedrà che la nota regola dei segni $-\times-=+$ dipende dal principio che mutando due volte la direzione di una retta nella sua opposta si cade necessariamente sulla direzione primitiva.

Nel predetto caso che le rette $\overline{OX}$ $\overline{OA}$ sieno uguali e direttamente opposte, l' immaginario $X$ potrà rappresentarsi mediante l' immaginario $A$ scrivendo $0-A$, poichè infatti sottraendo $A$ dallo zero si ottiene $X$; per brevità potrà scriversi $-A$; così s' intende qual sia il significato di un immaginario preceduto dal segno $-$. Sarebbe affatto inutile ed insignificante il segno $+$ preposto ad un immaginario o ad una quantità.

6. La definizione della *divisione* si deduce da quella della moltiplica nello stesso modo che quella della sottra si deduce dalla somma. Le propietà delle figure simili mostrano che $A\times\frac{1}{B}=\frac{A}{B}$, $A:\frac{1}{B}=AB$, ec. In una parola agli immaginarii possono applicarsi tutti quei teoremi relativi alle quattro operazioni aritmetiche che sono usitatissimi nel calcolo delle quantità.

7. Le *potenze* non sono che maniere compendiose di esprimere i prodotti di una quantità o di un immaginario per sè stesso, quindi non ci occorre stabilire alcuna nuova definizione. Se abbiasi $X^2=Y$ (*Fig.* 3.ª) e se sia data la retta $\overline{OX}$, si costruirà la $\overline{OY}$ formando il triangolo $OXY$ simile al triangolo $O1X$. Viceversa se sia data la $\overline{OY}$; si troverà la $\overline{OX}$ dividendo per metà l' angolo $1OY$, e prendendo la

lunghezza della $\overline{OX}$ media proporzionale fra le $\overline{O1}$ $\overline{OY}$; è palese che tanto la $\overline{OX}$ quanto la $\overline{OX_1}$ soddisfanno a queste due condizioni; perciò la radice seconda di un immaginario ammette sempre due valori tali che se uno sia $X$ l'altro sarà $-X$. Nel caso che $Y=1$, vale a dire che la $\overline{OY}$ coincida colla $\overline{O1}$, la $\overline{OX}$ cadrà sulla $\overline{O1}$, e la $\overline{OX_1}$ sulla $\overline{OK}$, perciò $\sqrt{1}=\pm 1$. Nell'altro caso che la $\overline{OY}$ coincida colla $\overline{OK}$ eguale e direttamente opposta alla $\overline{O1}$, le $\overline{OX}$ $\overline{OX_1}$ cadono sulle $\overline{OI}$ $\overline{OI_1}$ perpendicolari ed uguali alla $\overline{O1}$; perciò $\sqrt{-1}=\pm I$; questo immaginario $I$ rappresentante la predetta retta $\overline{OI}$ si potrebbe esprimerlo con $\sqrt{-1}$; ma per maggior brevità di segnatura lo indicheremo col segno $\sqrt{}$; così sarà anche tolto ogni equivoco tra $\overline{OI}$ ed $\overline{OI_1}$, giacchè $\sqrt{-1}$ ha ambedue questi valori, che noi indicheremo rispettivamente con $\sqrt{}$ e con $-\sqrt{}$. Questo segno $\sqrt{}$ può chiamarsi *ramuno*, facendo una sincope di *radice meno uno*.

8. È ugualmente facile intendere che se abbiasi $X^3=Y$ (*Fig.* 4.ª) si troverà la retta $\overline{OY}$ formando i triangoli simili $1OX$ $XOM$ $MOY$; e che viceversa la $\overline{OX}$ si dedurrà dalla $\overline{OY}$ dividendo in tre parti eguali l'angolo, $1OY$, e prendendo per lunghezza delle $\overline{OX}$ la prima delle due medie proporzionali tra $\overline{O1}$ ed $\overline{OY}$. Si vede che $\sqrt[3]{Y}$ ha tre valori $X$ $X_1$ $X_2$, i quali rappresentano tre rette di eguali lunghezze, formanti tra loro angoli di $\frac{2\pi}{3}$; indicando con $\frac{\pi}{2}$ l'angolo retto.

9. Gli immaginarii sono benissimo espressi dalle posizioni dei varii punti di un piano rispetto al punto di origine $O$, ed alla retta $\overline{O1}$; e col mezzo di costruzioni grafiche si potranno anche risolvere alcuni problemi relativi agli immaginarii; ma acciocchè le soluzioni presentino sufficiente approssimazione bisognerà adoperare il calcolo, e perciò esprimere gli immaginarii mediante numeri; il che si suole ottenere in due modi. L'immaginario $M$ (*Fig.* 5.ª) può decomporsi nelle due parti espresse dalle rette $\overline{Op}$ $\overline{OQ}$, essendo $\overline{OQ}$ $\overline{pM}$ perpendicolari, e $\overline{QM}$ parallela alla $\overline{O1}$; infatti (§ 2.) si ha $\overline{OM}=\overline{Op}+\overline{OQ}$. Ora la $\overline{Op}$ è rappresentata da una quantità, ed $\overline{OQ}$ da una quantità moltiplicata per *ramuno* ($\sqrt{}$); perciò, segnando tali quantità con $x$ $y$,

avremo $M = x + y\sqrt{-}$. — L' immaginario $M$ rappresentante la retta $\overline{OM}$ sarà anche noto se si conosca la *grandezza* di questa retta, e la sua *inclinazione;* intendendo per inclinazione l' angolo che essa forma colla orizzontale $\overline{O1}$ contato nel verso $pMQ\ldots$ Questa *grandezza* e questa *inclinazione* sono due quantità, le quali si sogliono chiamare il *modulo* e l' *argomento* dell' immaginario. Prendendo l' angolo retto per unità di misura delle inclinazioni, se $z$ è la grandezza ed $u$ l' inclinazione dell' immaginario $M$, sarà $M = z\sqrt{-}^u$; giacchè elevando a potenza l' immaginario $\sqrt{-}$ (§ 7.) esso conserva la sua grandezza 1, e muta l'inclinazione da un retto ad $u$ retti; dicasi la stessa cosa quando $u$ è un numero frazionario.

È palese che $$z\sqrt{-}^u = \overline{OM} = \overline{Op} + \overline{OQ} = z\cos u + z\,\mathrm{sen}\,u\,.\sqrt{-};$$

perciò $$\sqrt{-}^u = \cos u + \sqrt{-}\,\mathrm{sen}\,u\,.$$

**10.** Accenniamo come si eseguiscano le operazioni sugli immaginarii. Se due immaginarii hanno la medesima inclinazione per sommarli o sottrarli (§. 2.) si sommano o sottrano le loro grandezze; perciò $z\sqrt{-}^u + t\sqrt{-}^u = (z+t)\sqrt{-}^u$, ec. Ne viene che gli immaginarii espressi sotto la prima forma (§. 9.) si sommano o sottrano eseguendo tali operazioni sulle quantità isolate e su quelle moltiplicate per ramuno; cioè $(a + b\sqrt{-}) + (c + d\sqrt{-}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-}$. Le regole già indicate (§§. 3. 5.) sono sufficienti a trovare anche il prodotto degli immaginarii espressi sotto questa forma;

cioè $(a + b\sqrt{-})(c + d\sqrt{-}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-}$, perchè $\sqrt{-}\sqrt{-} = -1$.

Per eseguire la divisione ricorreremo ad un principio di cui avremo spesse volte occasione di servirci: per un qualunque immaginario $M$ ne esiste sempre un altro $N$ (*Fig.* 5.ª), il quale ha la stessa grandezza del primo, ed anche la stessa inclinazione, ma questa presa in verso negativo, cioè nel verso $QMpN$; noi diremo che $N$ $M$ sono due immaginarii *conjugati;* è palese che il prodotto di due immaginarii conjugati è sempre (§. 3.) una quantità positiva. Quindi se per eseguire la divisione $\frac{a + b\sqrt{-}}{c + d\sqrt{-}}$ noi moltiplicheremo e numeratore e denomina-

tore pel conjugato del denominatore che è $c-d\sqrt{}$, avremo il quoziente espresso sotto la forma desiderata $\frac{ac+bd}{cc+dd}+\frac{bc-ad}{cc+dd}\sqrt{}$.

Se gli immaginarii si esprimano nella seconda forma, la loro moltiplica o divisione è facilissima, poichè pei §§ 3. 6. si ha

$$z\sqrt{}^u . t\sqrt{}^v = tz\sqrt{}^{u+v}, \quad z\sqrt{}^u : t\sqrt{}^v = \frac{z}{t}\sqrt{}^{u-v}.$$

11. Mediante la considerazione dei conjugati si determina facilmente la grandezza di un immaginario espresso sotto la forma $a+b\sqrt{}$; infatti due conjugati immaginarii hanno la stessa grandezza, il che noi scriveremo così $\mathrm{gr}(a+b\sqrt{}) = \mathrm{gr}(a-b\sqrt{})$; inoltre pel § 3. la grandezza del prodotto di due immaginarii è uguale al prodotto delle grandezze di questi, cioè

$\mathrm{gr}(a+b\sqrt{})\,\mathrm{gr}(a-b\sqrt{}) = \mathrm{gr}\{(a+b\sqrt{})(a-b\sqrt{})\} = \mathrm{gr}(a^2+b^2) = a^2+b^2$;

dal che si ricava $\mathrm{gr}(a+b\sqrt{}) = \sqrt{a^2+b^2}$. Le grandezze si considereranno sempre come essenzialmente positive.

12. Dai §§. 7. 10. risulta $(z\sqrt{}^u)^n = z^n\sqrt{}^{nu}$, vale a dire per innalzare a potenza un immaginario se ne innalza a potenza la grandezza $z$, e se ne moltiplica l'inclinazione $u$ per l'esponente $n$. Si ha pure $(a+b\sqrt{})^2 = a^2-b^2+2ab\sqrt{}$, $(a+b\sqrt{})^3 = a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)\sqrt{}$, ec. Se l'estrazione della radice $n$.esima di un immaginario volesse eseguirsi graficamente, essa richiederebbe la determinazione della prima delle $n-1$ medie proporzionali tra 1 e la grandezza dell'immaginario, inoltre la divisione dell'inclinazione in $n$ parti uguali. Pel calcolo numerico si hanno delle tavole che lo facilitano; cioè le tavole logaritmiche per l'estrazione di radice della grandezza, e le tavole trigonometriche per la divisione della inclinazione.

13. I cenni precedenti sono sufficientissimi a mostrare che gli immaginarii rappresentanti i punti di un piano hanno precisamente le stesse proprietà e relazioni che gli Analisti attribuiscono alle loro quantità immaginarie; ecco adunque che queste quantità, che come quantità sono assurde, hanno un tipo reale; ecco adunque che tutti i calcoli relativi agli immaginarii hanno un'applicazione geometrica. Gli Analisti possono essi calcolare gli immaginarii senza curarsi degli og-

getti reali che rappresentano, e senza cercare altro oggetto reale, a cui possano riferirsi i loro calcoli? Sì certamente; appunto come nell'Algebra si possono calcolare le lettere senza pensare ch' esse rappresentano delle quantità, e senza menomamente curarsi se esse abbiano o no un significato. Del resto per quanto gli Analisti trascurino l'oggetto reale rappresentato dai loro immaginarii, sarà sempre vero che le risultanze dei loro calcoli, finchè sieno giuste, esprimeranno una proprietà delle posizioni dei punti di un piano riferiti ai due punti $O$ $i$ del medesimo piano; appunto come tutte le conseguenze dell'Algebra senza immaginarii esprimono proprietà delle posizioni dei punti di una retta riferita ai punti $O$ $i$ della medesima; proprietà che possono poi estendersi a tutti quegli altri oggetti, cui si può applicare l'idea di quantità.

14. Nella citata (§. 3.) Memoria sulle equipollenze credo aver mostrato che molti vantaggi geometrici possono ottenersi da un calcolo, che risulta aggiungendo a quanto finora si disse, l' altro principio che due rette uguali parallele e dirette per lo stesso verso sono *equipollenti*, e si possono sostituire nei calcoli le une alle altre; per tal guisa si studiano le relazioni di grandezza e di posizione anche delle rette, che non hanno un loro estremo nel punto $O$. Ora non è mio scopo occuparmi di ciò, bensì modellare l'Algebra degl' immaginarii su quella delle quantità, ed adoperare le considerazioni geometriche soltanto come un oggetto reale, che serva a raddrizzare i raziocinii se mai uscissero di via, e che faccia sentire la necessità di dare precise definizioni, anzichè affidarsi all' analogia sempre pericolosa, specialmente se si tratti di passare da un caso affatto speciale ad uno generale. — In questo Saggio esporrò brevemente le parti più conosciute, e quelle nelle quali il calcolo degl' immaginarii si deduce facilmente da quello delle quantità: mi estenderò di più quando crederò poter dire qualche cosa meno generalmente nota, ed in ispecial modo mi occuperò della maniera più spedita di eseguire i calcoli numerici; sicchè questa Memoria sia sotto tale aspetto una continuazione di quella sulla risoluzione approssimata delle equazioni inserita nel Vol. III. delle Memorie dell' I. R. Istituto Veneto.

## §. II.

### *Delle Equazioni algebraiche.*

15. Conserveremo il nome di equazioni alle espressioni delle uguglianze fra gli immaginarii combinati tra loro mediante somme, moltipliche, ec., o mediante altre funzioni che in seguito studieremo: riserveremo il nome di *equipollenze* alle espressioni di rette uguali parallele e dirette per lo stesso verso non più assoggettate alla condizione di passare pel punto di origine $O$ (§. 14.), le quali equipollenze saranno da noi indicate col segno $\triangleq$ sostituito a $=$.

La $X^4+AX^3+BX^2+CX+D=0$ dicesi una *equazione algebraica* del 4.° grado rispetto all' immaginario incognito $X$. Ponendovi $X=P+X'$ è facilissimo dedurne la trasformata in $X'$, essendo $X'$ un altro immaginario incognito. Ogni valore di $X$ che soddisfà a quell' equazione dicesi una sua *radice;* si dimostra nel modo seguente l' impossibilità che l' equazione sia priva di radici.

Se fosse possibile che il primo membro dell' equazione, che noi rappresenteremo con $Y$, non potesse mai annullarsi, si potrebbe descrivere un circolo col centro $O$ tale che uno o più valori di $X$ porterebbero il punto $Y$ rappresentato dall'immaginario $Y=X^4+AX^3+$ ec. sulla circonferenza di tal circolo; e quel valore di $X$ non avrebbe nè infinita grandezza nè infinita inclinazione; perchè ad $X$ infinito corrisponde $Y$ infinito, e perchè un cangiamento di $2\pi$ nell' inclinazione di $X$ non muta alcuno dei termini dell' equazione; sicchè nel trattare le equazioni algebraiche ci è lecito supporre che l'inclinazione dell'incognito $X$ sia compresa tra $-\pi$ e $+\pi$. Dicasi $P$ quel valore, od uno dei valori, di $X$ che nella fatta supposizione renderebbe minima e non nulla la grandezza di $Y$; posto $X=P+X'$ avremmo una trasformata $Y=X'^4+A'X'^3+B'X'^2+C'X'+D'$, nella quale ad $X'=0$ corrisponderebbe il valor infimo di $Y$: ci resta da dimostrare che ciò è assurdo. Infatti se $C'$ non sia nullo, noi potremo prendere la $\mathrm{gr}\,X'$ (grandezza di $X'$) tanto piccola che riesca $\mathrm{gr}\,(C'X')$ maggiore della

somma delle grandezze di tutti gli altri termini precedenti, ed inoltre $\mathrm{gr}\,(C'X') < \mathrm{gr}\,D'$; ora conservando ad $X'$ tale grandezza e mutandone l'inclinazione potremo fare in guisa che $C'X'$ sia diretto oppostamente a $D'$, vale a dire che $\mathrm{gr}\,(C'X'+D') = \mathrm{gr}\,D' - \mathrm{gr}\,C'X'$; tutti i termini omessi potranno accrescere questa grandezza, ma non mai ridurla uguale a $\mathrm{gr}\,D'$, quindi sarà $\mathrm{gr}\,Y' < \mathrm{gr}\,D'$; perciò è assurdo che $Y$ abbia l'infimo valore $D'$.

Se $C'$ fosse nullo si direbbe del termine precedente $B'X'^2$ quel che si disse del $C'X'$, e basterebbe mutare gradatamente l'inclinazione di $X'$ da 0.° a 180.° perchè l'inclinazione di $B'X'^2$ variando di 360.° prendesse una volta la direzione opposta a quella di $D'$. Se anche $B'$ fosse nullo si applicherebbe il ragionamento al termine $A'X'^3$, ed in mancanza anche di questo, al primo, il quale non può mai svanire.

16. Appena occorre dimostrazione per riconoscere che, se $P$ è una radice dell'equazione proposta, il suo primo membro contiene il fattore $X-P$, vale a dire che può stabilirsi l'equazione identica

$$X^4 + AX^3 \ldots + D = (X-P)(X^3 + A_1 X^2 + B_1 X + C_1):$$

e siccome l'equazione $X^3 + A_1 X^2 + B_1 X + C_1 = 0$ avrà essa pure una radice, così in fine si conoscerà che ogni equazione algebraica ha tante radici quant'è il suo grado, e che nel nostro caso sarà identicamente $X^4 + \ldots + D = (X-P)(X-Q)(X-R)(X-S)$, essendo $P\ Q\ R\ S$ le quattro radici dell'assunta equazione; le quali possono essere anche tra loro uguali.

Pel modo perfettamente simmetrico con cui gli immaginarii $-P$ $-Q$ $-R$ $-S$ sono compresi nel secondo membro della precedente equazione, che è identica rispetto alla lettera $X$, si scorge che $A$ è la somma dei suddetti immaginarii $-P-Q-R-S$, che $B$ è la somma di tutti i prodotti di tali immaginarii presi due a due, che $C$ è la somma dei prodotti che si hanno prendendoli a tre a tre, e che finalmente l'ultimo termine $D$ è uguale al loro prodotto.

17. I teoremi ultimamente accennati non potrebbero darsi nell'Algebra delle quantità se non se per quelle equazioni che hanno tante radici reali quant'è il grado; essi invece sono sempre veri nell'Alge-

bra degl'immaginarii sia che i coefficienti dell'equazione sieno quantità, sia che sieno immaginarii. Non sarà inutile gettare lo sguardo sopra una figura che presenti gl'immaginarii appartenenti ad una data equazione.

Nella *Fig.* 6.ª $\dot{O}$ è al solito l'origine ed $\overline{O\,1}$ la retta rappresentata dalla quantità 1; i punti $\dot{P}\ \dot{Q}\ \dot{R}\ \dot{S}$, o meglio le rette $\overline{O\,P}\ \overline{O\,Q}\ \overline{O\,R}\ \overline{O\,S}$ sono le radici dell'equazione, i cui coefficienti sono espressi dai punti $1\ \dot{A}\ \dot{B}\ \dot{C}\ \dot{D}$. Per un qualunque valore dell'incognito $X$ si costruirà il polinomio $Y = D + CX + BX^2 + AX^3 + X^4$ tirando la $\overline{D\,C_1}$ eguale e parallela alla retta espressa dal prodotto $CX$; similmente le $\overline{C_1 B_1}\ \overline{B_1 A_1}\ \overline{A_1 Y}$ eguali e parallele a quelle espresse dagli altri termini $BX^2\ AX^3\ X^4$. (Il poligono $O\,D\,C_1\,B_1\,A_1\,Y$ della figura corrisponde al caso di $X=1$, sicchè $\overline{D\,C_1} \triangleq \overline{O\,C}$, $\overline{C_1 B} \triangleq \overline{O\,B}$, $\overline{B_1 A_1} \triangleq \overline{O\,A}$, $\overline{A_1 Y} \triangleq \overline{O\,1}$, esprimendo (§. 15.) col segno $\triangleq$ la condizione di due rette di esser eguali parallele e dirette per lo stesso verso). Al variare di $X$ variano anche i punti $\dot{C}_1\ \dot{B}_1\ \dot{A}_1\ \dot{Y}$; e se $X$ sia una radice dell'equazione il punto $\dot{Y}$ cade in $\dot{O}$.

18. Se tutti i punti $\dot{A}\ \dot{B}\ \dot{C}\ \dot{D}$ cadessero sulla retta $\overline{O\,1}$, vale a dire se i coefficienti della proposta equazione fossero tutti quantità, la linea spezzata $D\,C_1\,B_1\,A_1\,Y$ corrispondente ad $X$ quantità positiva sarebbe essa pure tutta compresa in quella retta $\overline{O\,1}$, ed allora un teorema dovuto al Cartesio insegna che il numero delle radici positive non può superare il numero di regressi ossia di cangiamenti di direzione che si osservano in quella linea spezzata. (In un caso non molto discosto da quello della figura 6.ª si avrebbe un regresso in $\dot{D}$, uno in $\dot{C}_1$ ed uno in $\dot{B}_1$). Ritenuto che i coefficienti dell'equazione sieno quantità, se due radici della medesima (per esempio $\dot{R}\ \dot{S}$) sono quantità, vale a dire se i punti $\dot{R}\ \dot{S}$ cadono sulla retta $\overline{O\,1}$, tra mezzo ad essi, deve trovarsi un punto $\dot{N}$ espresso da una delle radici dell'equazione *derivata* $4X^3 + 3AX^2 + 2BX + C = 0$.

Non credo che il teorema del Cartesio possa in alcuna guisa trasportarsi alle equazioni a coefficienti immaginarii, nè so vedere qual teorema debba sostituirsi al precedente del Rolle; cioè quali relazioni di posizione abbiano luogo tra i quattro punti $\dot{P}\ \dot{Q}\ \dot{R}\ \dot{S}$

espressi dalle radici della proposta equazione, i tre $\dot{L}\ \dot{M}\ \dot{N}$ espressi dalle radici della derivata, i due $\dot{F}\ \dot{G}$ appartenenti nello stesso modo alla *derivata seconda* $12X^2+6AX+2B=0$, ed il punto $\dot{E}$ appartenente alla *derivata terza* $24X+6A=0$. Questo è uno dei molti argomenti che rimarranno da studiare sulle equazioni a coefficienti immaginarii, che (come per le altre parti dell' Algebra degli immaginarii) furono considerate dagli Analisti piuttosto per incidenza ed in via di eccezione che di proposito. È facile dimostrare che mutando l'origine $O$ e la linea $\overline{O1}$ assunta per unità delle quantità positive si muteranno i coefficienti dell' equazione, le cui radici rappresentano i punti $\dot{P}\ \dot{Q}\ \dot{R}\ \dot{S}$; ma rimarranno invariati gli altri punti $\dot{L}\ \dot{M}\ \dot{N}$, $\dot{F}\ \dot{G}$, $\dot{E}$ rappresentati dalle radici delle equazioni derivate: inoltre lo stesso punto $\dot{E}$ è il centro di gravità dei due $\dot{F}\ \dot{G}$, dei tre $\dot{L}\ \dot{M}\ \dot{N}$, e dei quattro $\dot{P}\ \dot{Q}\ \dot{R}\ \dot{S}$.

19. Furono date varie regole per trovare dei confini superiore ed inferiore alle grandezze di tutte le radici di un' equazione: mi sembra che la più comoda sia la seguente. Proposta, per esempio, l' equazione $AX^3+BX^2+CX+D=0$, si cerchi un confine superiore alla radice positiva dell' equazione $av^3-bv^2-cv-d=0$, dove $a\ b\ c\ d$ sono le grandezze dei coefficienti $A\ B\ C\ D$, ed esso sarà anche un confine superiore a $\mathrm{gr}\,X$. Infatti quando $\mathrm{gr}\,(AX^3)$ sarà maggiore della somma di tutte le grandezze degli altri termini, sarà impossibile formare un poligono chiuso con rette equipollenti a quelle che sono espresse dai termini dell' equazione proposta. È palese che per la comodità del calcolo si potranno prendere le quantità $a\ b\ c\ d$ alcun poco differenti da $\mathrm{gr}\,A\ \mathrm{gr}\,B$ ec., purchè la $a$ non superi $\mathrm{gr}\,A$, e le $b\ c\ d$ non sieno rispettivamente inferiori alle $\mathrm{gr}\,B$, $\mathrm{gr}\,C$, $\mathrm{gr}\,D$. È poi un confine superiore alla radice positiva della $av^3-bv^2-cv-d=0$ ogni valore che posto in luogo di $v$ rende positivo il primo membro dell' equazione. Per le medesime ragioni sarà un confine inferiore a $\mathrm{gr}\,X$ la radice positiva dell' equazione $au^3+bu^2+cu-d=0$ essendo $a\ b\ c$ rispettivamente uguali o superiori a $\mathrm{gr}\,A\ \mathrm{gr}\,B\ \mathrm{gr}\,C$, e $d$ uguale o inferiore a $\mathrm{gr}\,D$.

Nel calcolo degl' immaginarii diremo *superiore* quello che ha una

maggiore grandezza, il che indicheremo con $\succ$ ; riservando il segno $>$ e il nome di *maggiore* per le quantità positive o negative nel modo a tutti noto: così $5-4\sqrt{\ }\succ 6$, $2\prec -3$, e $2>-3$.

Trovati per gr$X$ i due confini l'uno superiore $v$ l'altro inferiore $u$, se col centro nell'origine $O$, e coi raggi $v$ $u$ si descrivano due circoli noi sapremo che tutti i punti espressi dalle radici della proposta equazione cadono nella zona compresa tra i due circoli concentrici. Se calcoleremo (§. 15.) la trasformata in $(X-P)$ troveremo in simil modo due confini l'uno superiore l'altro inferiore di gr$(X-P)$, e descriveremo due circoli coi nuovi raggi e col centro in $P$. Potremo ripetere la stessa costruzione più volte, e coprendo di tratti tutti gli spazii che rimangono al di fuori dei circoli, che danno i confini superiori, e al di dentro di quelli che danno i confini inferiori, vedremo a colpo d'occhio in quali spazii si possano cercare le radici della proposta equazione.

Per la risoluzione delle equazioni ci gioverà particolarmente conoscere il confine superiore, e perchè questo sia possibilmente ristretto tornerà quasi sempre opportuno di scegliere una trasformata, nella quale il coefficiente del 2.° termine sia o nullo o molto piccolo. Trovato il confine $v$ superiore a gr$X$, se porremo $X=x+\xi\sqrt{\ }$ la quantità $x$ sarà inferiore a $v$; e perciò $x$ sarà maggiore di $-v$, e minore di $v$.

20. A maggior chiarezza prendiamo per esempio l'equazione

$$X^3-3X^2-(1+2\sqrt{\ })X-5+3\sqrt{\ }=0\ ;$$

calcolando approssimatamente le grandezze dei suoi coefficienti avremo

$$v^3-3v^2-2,3v-5,9=0\ ,$$

la cui radice positiva è minore di 4; il che facilmente si vede sostituendo 4 in luogo di $v$ nel modo costantemente adoperato nella mia Memoria sulla risoluzione delle equazioni citata nel §. 14., vale a dire col seguente calcolo

$$\begin{array}{r|l} & 1-3-2,3-5,9 \\ \hline 4 & 1+1+1,7+0,9 \end{array}$$

il quale dà al primo membro dell'equazione il valore positivo 0,9.

D' altronde l' equazione $u^3 + 3u^2 + 2,3u - 5,8 = 0$ ha la radice positiva maggiore di $0,95$; perciò la $\mathrm{gr}\,X$ è inferiore a $4$ e superiore a $0,95$.

Per calcolare l' equazione trasformata in $(X - a)$ ci servirà l'algoritmo già usato nella succitata Memoria, operando separatamente sulle quantità isolate, e su quelle che sono moltiplicate per $\sqrt{}$. Così per esempio se $a = 2$ faremo il seguente calcolo

| | $1\,X^3 - 3\,X^2 - X - 5$ | $(-2X+3)\sqrt{}$ |
|---|---|---|
| 2 | $1 \quad -1 \quad -3 \quad -11$ | $-2 \quad -1$ |
| | $1 \quad +1 \quad -1$ | $-2$ |
| | $1 \quad +3$ | |

ed avremo i coefficienti della trasformata in $X - 2$

$$(X-2)^3 + 3(X-1)^2 - (X-2) - 11 + [-2(X-1) - 1]\sqrt{} = 0$$

I due confini di $\mathrm{gr}\,(X-2)$ saranno dati dalle radici positive delle equazioni

$$v^3 - 3v^2 - 2,3v - 11,05 = 0 \qquad u^3 + 3u^2 + 2,3u - 11 = 0$$

quindi sarà

$$\mathrm{gr}\,(X-2) < 4,2, \quad \text{e} \quad \mathrm{gr}\,(X-2) > 1,3.$$

La trasformata col secondo termine nullo è

$$(X-1)^3 - 4(X-1) - 8 + [-2(X-1) + 1]\sqrt{} = 0$$

che mediante le due equazioni

$$v^3 - 4,5v - 8,1 = 0 \qquad u^3 + 4,5u - 8 = 0$$

mostra che

$$\mathrm{gr}\,(X-1) < 2,8, \quad \text{e} \quad gr(X-1) > 1,29.$$

Ponendo $X = x + \xi\sqrt{}$ fra le tre condizioni $\mathrm{gr}\,X < 4$, $\mathrm{gr}\,(X-2) < 4,2$, $\mathrm{gr}\,(X-1) < 2,8$ l' ultima dà i confini più ristretti

$$-1,8 < x < 3,8, \quad \text{e} \quad -2,8 < \xi < 2,8.$$

21. Perchè si proceda con tutta sicurezza alla ricerca delle radici bisogna poter suddividere lo spazio, in cui esse si trovano, e saper determinare il numero delle radici comprese in ciascuna porzione di quello spazio: a tal fine premetteremo alcuni principii tolti dall' im-

portantissima teoria degli *indici* del celebre Cauchy. Se una retta $\overline{OM}$ (*Fig.* 7.ª), ossia l'immaginario $M$ che la rappresenta, va gradatamente cangiando di direzione, in guisa che la sua inclinazione sia una determinata funzione $f(t)$ della variabile $t$, la quale procede sempre aumentando da 0 fino ad 1, noi chiameremo *indice* dell'immaginario il rapporto $(f(1)-f(0)):\pi$ dell'aumento dell'inclinazione dell'immaginario a $\pi=180°$.

Così per esempio se l'inclinazione dell'immaginario $M$ sia $f(t)=4\pi t$, il suo indice da $t=0$ a $t=1$ sarà 4; che se invece l'inclinazione fosse $f(t)=4\pi t(1-t)$ l'indice sarebbe 0. Se non che noi non conosceremo la formula che esprime l'inclinazione dell'immaginario, e ci converrà determinare l'indice mediante le posizioni della retta $\overline{OM}$ (rappresentata dall'immaginario $M$); ed è essenzialissimo osservare, che le posizioni estreme (corrispondenti a $t=0$ ed a $t=1$) di tal retta non sarebbero sufficienti a determinare l'indice, e che occorre conoscere l'andamento intermedio della retta; così in ambedue i precedenti casi la $\overline{OM}$ coincide colla retta su cui si prendono le quantità positive, tanto per $t=0$ quanto per $t=1$; ma nel caso di $f(t)=4\pi t$ essa retta compie due intere rivoluzioni girando nel senso delle inclinazioni positive; al contrario nel caso di $f(t)=4\pi t(1-t)$ la $\overline{OM}$ gira per mezza rivoluzione nel senso positivo (da $t=0$ fino a $t=\frac{1}{2}$), poi retrocede fino alla posizione primitiva, sicchè il suo complessivo movimento può riguardarsi come nullo. In egual modo se il movimento della retta sia talmente regolato che essa passi successivamente pei varii punti della curva $ABC$ (*Fig.* 7.ª) fino a riprendere la posizione primitiva il suo indice sarà 2; che se invece essa passasse successivamente pei punti della curva $DEF$ l'indice sarebbe zero.

Siccome l'inclinazione del prodotto di due o più immaginarii è uguale alla somma delle inclinazioni di questi, così ne viene che: *Se due o più immaginarii dipendano da una medesima variabile* t, *la quale aumenti da* 0 *ad* 1, *la somma dei loro indici sarà uguale all'indice del prodotto.*

Nei casi che noi dovremo considerare la retta $\overline{OM}$ ritornerà sempre (da $t=0$ a $t=1$), alla posizione primitiva, e si tratterà di deter-

minare quanti giri compiuti essa abbia eseguiti nel senso delle inclinazioni positive; l'indice $(f(1)-f(0)):\pi$ sarà sempre un numero pari. Per determinarlo ci basterà conoscere, per ciascuno dei valori di $t$ che rendono la $\overline{OM}$ parallela ad una retta fissa (per esempio alla $\overline{OI}$), se presso quel valore, al crescere di $t$, l'inclinazione di $\overline{OM}$ cresca oppur diminuisca: con leggera attenzione si riconosce che l'indice è uguale al numero di volte in cui l'inclinazione cresce, meno il numero delle volte in cui essa diminuisce. Così nella figura 7.ª l'inclinazione della $\overline{OM}$ che scorre pei punti della curva $CAB$ cresce tanto nel punto $C$ quanto nel punto $B$, mentre invece se la $\overline{OM}$ scorre pei punti della curva $FDE$, la sua inclinazione cresce quando la $\overline{OM}$ passa per $F$, e diminuisce quando passa per $E$; abbiamo già detto che nel primo caso l'indice è 2 e nel secondo zero. Se si prenda per retta fissa la $\overline{OV}$, la retta $\overline{OM}$ scorrente pei punti della curva $CAB$ coinciderà con essa nei due punti $H$ $K$, ed in ambedue l'inclinazione sarà crescente, quindi l'indice sarà 2; invece la $\overline{OM}$ scorrente per la curva $FDE$ non prenderà mai la direzione $\overline{OV}$, e perciò l'indice sarà zero.

Siccome alcuni trovano qualche difficoltà nel conservare una chiara idea di questi principii, così a meglio spiegarli aggiungeremo la descrizione di un fatto analogo, che, quantunque triviale, potrà dare una giusta idea della cosa. — S'immagini una corsa di cavalli in una lizza circolare, ed un giudice fermo in un punto della circonferenza debba decidere quanti giri interi abbia percorsi un cavallo che ritornò al punto di partenza. Se egli ponesse mente soltanto al numero di volte, in cui il cavallo gli passa dinanzi nel verso positivo; potrebbe avvenire che il cavallo tornasse indietro di qualche porzione di giro per poi ripassare dinanzi al giudice, e fargli così credere d'aver compiuti più giri del giusto. Bisognerà che il giudice tenga conto dei numeri di volte che il cavallo gli passa dinanzi nel verso positivo e nel verso negativo, e sottraendo il secondo numero dal primo egli saprà quanti giri interi il cavallo abbia utilmente compiuti nel verso stabilito. — Se si abbiano due giudici posti in due punti diametralmente opposti della lizza (il che corrisponde col nostro caso) la somma del numero

delle volte, in cui avranno veduto passare il cavallo nel verso positivo, meno le volte in cui sarà passato in verso negativo eguaglierà il doppio del numero dei giri.

22. Definito per tal maniera l'indice di una espressione immaginaria, che rappresenta una retta mobile, la quale ruota con un moto qualsiasi tornando in fine alla posizione primitiva; e stabilito che l'indice di un prodotto di tali espressioni è la somma degli indici parziali; osserviamo che il primo membro dell'equazione, che ha le radici $P\ Q\ldots$ è sempre riducibile alla forma $Y=A(X-P)(X-Q)\ldots$. Ora se si supponga che il punto $\dot{X}$ espresso dall'immaginario $X$ percorra tutto intero il perimetro di un qualunque circuito chiuso $K\,H\,X\,I$ (*Fig.* 8.ª) il binomio $(X-P)$ rappresenterà (§. 2.) una retta eguale alla $\overline{P\dot{X}}$ e della sua stessa inclinazione; perciò l'indice dell'immaginario $X-P$ corrispondente al suddetto movimento di $X$ sarà eguale a 2 se il punto $P$ sia compreso dentro di quel circuito, e sarà eguale a 0 se $P$ cada fuori di quel circuito. Dal che ne viene (§. 21.) che l'indice del prodotto $A(X-P)(X-Q)\ldots$ (sempre corrispondente al suddetto movimento del punto $\dot{X}$) sarà doppio del numero di radici che cadono dentro di quel circuito. — Rimane da vedere come si determini l'indice del prodotto $Y=A(X-P)(X-Q)\ldots$ dato sotto la forma $Y=AX^n+BX^{n-1}+$ ec. e senza conoscere le radici $P, Q\ldots$

Qualunque sia il valore di $X=x+\xi\sqrt{\ }$ corrispondente ad un dato punto del dato circuito, $Y$ potrà ridursi (§. 10. 12.) alla forma $y+\eta\sqrt{\ }$; essendo $y\ \eta$ funzioni date delle $x\ \xi$, le quali sono tra loro legate dalla condizione che il punto $\dot{X}$ si trovi sul dato circuito, vale a dire sono funzioni della $t$, da cui si suppone regolato il movimento del punto $\dot{X}$. Perchè $y+\eta\sqrt{\ }$ rappresenti una retta parallela alla fissa $\overline{O\,1}$ bisognerà che sia $\eta=0$; trovata una radice $t$ di questa equazione ci resterà da vedere se da $t-\omega$ a $t+\omega$, essendo $\omega$ una quantità estremamente piccola, l'inclinazione dell'immaginario $y+\eta\sqrt{\ }$ cresca o diminuisca; facilmente si riconosce che è lo stesso come vedere se da $t-\omega$ a $t+\omega$ si perda o si acquisti una variazione nei segni delle quantità $y\ \eta$: il numero di tali perdite di variazioni meno il numero degli acquisti darà l'indice dell'immaginario $Y=y+\eta\sqrt{\ }$, e perciò sarà

doppio del numero delle radici dell'equazione $Y=0$, che sono comprese dentro il circuito espresso dai valori successivamente attribuiti all'immaginario $X$.

**23.** Se si cercassero le radici dell'equazione $AX^n+BX^{n-1}+\ldots=0$, che sono inferiori alla data $g$, il circuito sarebbe un circolo di raggio $g$, vale a dire sarebbe $X=g\sqrt{}^{4t}$, e sostituito questo valore nel primo membro dell'equazione bisognerebbe svilupparlo nella forma $y+\eta\sqrt{}$, poscia determinare tutti i valori di $t$ compresi tra 0 ed 1, che rendono $\eta=0$, e vedere quante variazioni essi facciano perdere e quante variazioni facciano acquistare nei segni delle quantità $y$, $\eta$; la metà della differenza di tali numeri darebbe il numero delle cercate radici. Ma questi calcoli riescono non poco laboriosi. Intorno alla presente questione ci limiteremo a notare, seguendo il Cauchy, che se si possa determinare la grandezza di $X$ in modo che la grandezza di uno dei termini $AX^n$, $BX^{n-1}$, ec. superi la somma delle grandezze di tutti gli altri, il numero delle radici inferiori a quella grandezza di $X$ sarà eguale all'esponente di $X$ in quel termine che supera tutti gli altri.

**24.** La determinazione dell'indice, e quindi del numero delle radici, è molto più facile se si cerchi quante radici $P=p+\pi\sqrt{}$ dieno $p$ compreso tra $a$ e $b$, e $\pi$ compreso tra $\alpha$ e $\beta$. In tal caso il punto $X$ dovrà percorrere il perimetro di un rettangolo $HIKL$ (*Fig.* 9.ª); perciò si supporrà 1.° che sia $x=b$ e che $\xi$ vada gradatamente crescendo da $\alpha$ fino a $\beta$; 2.° che sia $\xi=\beta$ e che $x$ diminuisca da $b$ fino ad $a$; 3.° che $x=a$ e $\xi$ diminuisca da $\beta$ fino ad $\alpha$; 4.° finalmente che $\xi=\alpha$ e che $x$ cresca da $a$ fino a $b$: fra tutti questi valori cercheremo quelli che fanno svanire $\eta$ ed esamineremo se essi facciano perdere od acquistare una variazione nei segni di $y$ $\eta$.

Prendiamo per esempio l'equazione

$$X^3-3X^2-X-5-(2X-3)\sqrt{}=0$$

e cerchiamo quante radici $p+\pi\sqrt{}$ essa abbia tali che $0<p<1$, e $1<\pi<3$. Si ponga in 1.° luogo $X=1+\xi\sqrt{}$, il primo membro dell'equazione diventerà

$$Y=y+\eta\sqrt{}=2\xi-8-(\xi^3+4\xi-1)\sqrt{}$$

perciò $y=2\xi-8$ , $\eta=-\xi^3-4\xi+1$ , e siccome nessun valore di $\xi$ compreso tra 1 e 3 fa svanire $\eta$, così per questo primo caso non abbiamo altro a cercare. Sia in 2.° luogo $X=x+3V$ troveremo

$$Y=y+\eta V=x^3-3x^2-28x+28+(9x^2-20x-27)V$$

ed anche qui nessun valore di $x$ da 1 a 0 rende $\eta=0$. Sia in 3.° luogo $X=\xi V$ avremo

$$y=3\xi^3+2\xi-5 \quad , \qquad \eta=-\xi^3-\xi+3$$

e siccome $\eta$ svanisce per $\xi=1,21..$ compreso fra 3 ed 1, così osserveremo che $\xi=1,3$ rende $y=2,7$ , $\eta=-0,3$ , e che $\xi=1,2$ rende $y=1,7$, $\eta=0,1$ , perciò nel diminuire di $\xi$ da 3 ad 1 si ha la perdita di una variazione di segno. Sia in 4.° luogo $X=x+V$ avremo

$$y=x^3-3x^2-4x \quad , \qquad \eta=3x^2-8x+1$$

i quali per $x=0,1$ divengono $y=-0,4$ $\eta=0,2$ e per $x=0,2$ divengono $y=-0,9$, $\eta=-0,3$, e così si ha la perdita di un'altra variazione da $x=0$ ad $x=1$. In complesso si sono perdute due variazioni, perciò l'indice è *due* e la proposta equazione ha *una* radice compresa nel predetto intervallo.

25. Allo stesso risultamento si giungerà se, come si notò nel § 21, si prenda per retta fissa la $\overline{OV}$ anzichè la $\overline{O1}$; in tal caso si esamineranno i valori che rendono $y=0$, e le perdite od acquisti di variazione che essi producono nei segni di $y,\eta$. Bisogna peraltro notare che se il punto $X$ continua a percorrere il circuito nel senso $HIKL$, l'indice è uguale al numero di variazioni acquistate meno il numero delle perdute (anzichè a questo meno quello). Nel precedente esempio, calcolate le medesime trasformate, si vedrà che in 1.° luogo nessun valore compreso fra 1 e 3 rende $y=2\xi-8=0$. In 2.° luogo $x=1$ rende $y=-2$, $\eta=-38$ e $x=0,9$ rende $y=1$, sicchè si ha l'acquisto di una variazione. In 3.° luogo $y$ svanisce soltanto pel valor estremo $\xi=1$, e per $\xi=1,01$ si ha $y=0,08$ $\eta=1$; mentre nel principio del 4.° lato $\overline{LH}$ ad $x=0,01$ corrisponde $y=-0,04$, sicchè si ha ancora l'acquisto di una variazione. Questo 4.° lato non

presenta da $x=0$ ad $x=1$ alcun altro valore che renda $y=0$. In tutto si sono acquistate 2 variazioni, perciò l' indice è come sopra $=2$.

26. La questione diviene ancora più semplice se si cerca il numero delle radici $P=p+\pi\sqrt{}$ tali che $a<p<b$, senza assegnare alcun confine al valore di $\pi$: allora in luogo del rettangolo $HIKL$ avremo lo spazio indefinito compreso tra le due parallele $\overline{bI}$ $\overline{aK}$ prolungate da ambedue i lati della $\overline{OA}$, e ci basterà calcolare gl' indici corrispondenti a tali rette. Vale a dire, nella proposta equazione $Y=y+\eta\sqrt{}=0$ si porrà $x=b$, e per ciascun valore di $\xi$ che rende $\eta=0$, si esaminerà se mentre $\xi$ cresce si abbia perdita od acquisto di variazione nei segni di $y$ $\eta$; il numero di tali perdite meno il numero degli acquisti lo potremo dire l' *indice corrispondente* ad $x=b$. Ossia, con altre parole, noi sostituiremo tanto in $y$ quanto in $\eta$ un valore $\xi$ infinitamente poco minore di ciascuna radice della $\eta=0$, e secondo che tali quantità $y$ $\eta$ avranno segni opposti o segni uguali noi conteremo l'indice $+1$, o $-1$; la somma di questi indici corrispondenti a tutte le radici della $\eta=0$ darà il predetto indice corrispondente ad $x=b$. Per l' altro confine $x=a$ si dovrebbe supporre (§. 24.) che $\xi$ andasse diminuendo da $\infty$ a $-\infty$; ma riuscirà più comodo calcolare l'*indice corrispondente* ad $x=a$ nello stesso modo che ora si disse per $x=b$; poscia l' indice per l' intervallo fra $x=a$ ed $x=b$ (vale a dire il doppio del numero delle radici comprese in quell' intervallo) sarà uguale alla differenza fra gli indici corrispondenti ad $x=b$, e ad $x=a$.

Quando il termine contenente la suprema potenza di $X$ avesse un coefficiente della forma $(l+\lambda\sqrt{})$ si potrebbero calcolare gl'indici tanto adoperando le radici della $\eta=0$ (§. 24.), quanto adoperando le radici della $y=0$ (§. 25.); e si continuerebbe a supporre che $\xi$ crescesse da $-\infty$ a $\infty$, ed a contare per $+1$ ogni perdita di variazione, e per $-1$ ogni acquisto; giacchè non vi è tema di errore nel calcolare la differenza degli indici corrispondenti ad $x=b$ e ad $x=a$, ben sapendosi che tal differenza dev' esser positiva, come necessariamente positivo è il numero delle radici. Quando invece il coefficiente di $X^n$

sia o soltanto $l$ o soltanto $\lambda\sqrt{}$, *bisogna avere l'avvertenza di adoperare le radici di quella fra le equazioni* $y=0$ $\eta=0$ *che è del grado* $n$; giacchè altrimenti potrebbe avvenire che una parte del cercato indice dipendesse dai lati posti a distanza infinita, che chiudono un rettangolo colle verticali indefinite $\overline{bI}$ $\overline{aK}$, lati che furono da noi trascurati. Viene da ciò che se l'equazione abbia il primo termine $X^n$ senza coefficiente dovremo adoperare le radici della $y=0$ quando $n$ è pari e le radici della $\eta=0$ quando $n$ è dispari.

Siccome l'indice corrispondente ad $x=a$ non può mai superare il grado $n$, così se esso sia $\mp n$, ne dedurremo che $a$ è uno di quei confini oltre il quale non vi è alcun'altra radice; ossia sapremo che o tutti i valori di $p$ sono maggiori o tutti minori di $a$.

*Se l'equazione* $X^n+MX^{n-1}+$ *ec. è di grado pari, al confine minore corrisponde l'indice* $+n$, *ed al maggiore l'indice* $-n$; *l'opposto se* $n$ *è dispari.*

Nell'esempio del §. **24.** l'indice corrispondente ad $x=0$ dipende dall'acquisto di variazione che l'unica radice $\xi=1,2\ldots$ della $\eta=-\xi^3-\xi+3=0$ produce nei segni di $y=3\xi^2+2\xi-3$ e di $\eta$; esso è perciò $-1$. L'indice corrispondente ad $x=1$ dipende dalla perdita di variazione che l'unica radice $\xi=0,2\ldots$ della $\eta=-\xi^3-4\xi+1=0$ produce nei segni di $y=2\xi-8$, e di $\eta$; esso è perciò $+1$. Per $x=2$ la trasformata in $(X-2)$, già calcolata al §. **20.**, ci dà, ponendovi $X-2=\xi\sqrt{}$, $y=-3\xi^2+2\xi-11$, $\eta=-\xi^3-\xi-1$; l'unica radice $-0,7+\ldots$ della $\eta=0$ dà ancora una perdita di variazione, e l'indice è $+1$. I due indici estremi sono necessariamente $-3$ e $+3$, perciò per le radici $P=p+\pi\sqrt{}$ della proposta equazione un valore di $p$ cade tra **0** e **1**, uno è minore di **0**, ed uno maggiore di **2**.

**27.** La regola precedentemente esposta per determinare il numero delle radici comprese in un dato intervallo è più semplice di quella, che diedi nella citata (§. **14.**) Memoria sulla risoluzione delle equazioni (Vol. III. pag. **173.**) ad oggetto di trovare le radici immaginarie di un'equazione a coefficienti reali; perchè rendendo più complicata la regola ho allora mirato ad abbreviare il calcolo, il che potei fare,

giacchè i due polinomii $y\ \eta$ mancando della metà dei termini erano riducibili ad un grado inferiore della metà.

Nella risoluzione delle equazioni fra immaginarii è importantissimo determinare se e quante radici sieno comprese in un dato intervallo, perchè senza di ciò sarebbe difficile determinarle, trattandosi di trovare nello stesso tempo le due quantità $p\ \pi$: in quanto al calcolo numerico delle radici delle equazioni $\eta = 0$; esso può considerarsi come cosa facile.

L' indice corrispondente ai due polinomii $y\ \eta$, vale a dire la differenza fra i numeri di variazioni di segno dei due polinomii $y\ \eta$ che si perdono o si acquistano per tutti i valori di $\xi$ che rendono $\eta = 0$, potrebbe determinarsi anche senza risolvere la $\eta = 0$, ed invece calcolando i polinomii di gradi decrescenti $y_2 = -\eta + Ky$, $y_3 = -y + K_2 y_2$, e così in seguito, alla maniera stessa che si usa nel teorema dello Sturm; poichè il cercato indice è uguale al numero di variazioni di segno della serie $\eta$, $y$, $y_2 \ldots\ldots y_n$ che si perdono da $\xi = -\infty$ a $\xi = \infty$; ma in pratica questi calcoli riescono molto più laboriosi della risoluzione approssimata della $\eta = 0$.

28. Un oggetto che grandemente occupò gli Analisti si è la risoluzione algebraica delle equazioni, col che vuolsi intendere la riduzione delle equazioni ad altre di forma più semplice o di grado inferiore. Fra le equazioni più semplici si contano le $X^n = A$; e ciò non già perchè si possa dedurne $X = \sqrt[n]{A}$, il che in sostanza non sarebbe che sostituire una segnatura ad un' altra; ma perchè, se $A$ sia una quantità, le tavole logaritmiche presentano un mezzo facile per eseguire l' estrazione di radice, e perchè la corrispondente operazione aritmetica, la quale per $n$ numero primo è poco più facile della risoluzione numerica d' ogni equazione del grado $n$, diventa più spedita se $n$ sia numero composto.

Le riduzioni delle equazioni che possono tornar utili nella pratica si eseguiscono mediante la sostituzione $X = H + Z$, la quale serve specialmente a liberare l'equazione dal suo secondo termine; — mediante la sostituzione $X = KZ$, che serve a ridurre due coefficienti

in dato rapporto; — finalmente mediante la sostituzione $X = Z + \frac{1}{Z}$, e qualche volta la sostituzione inversa $X + \frac{1}{X} = Z$: torna pur vantaggiosa la estrazione di una medesima radice nei due membri dell' equazione.

Per l' equazione del 2.° grado $X^2 + AX + B = 0$ è ben noto che si può adoperare la sostituzione $X = -\frac{A}{2} + Z$; oppure procedere alla estrazione di radice della $4X^2 + 4AX = -4B$, il che mostra la necessità di aggiungere ad ambedue i membri il termine $A^2$, dopo di che si ha $2X + A = \sqrt{A^2 - 4B}$.

Similmente l' equazione del 4.° grado

$$4X^4 + 4AX^3 = -4BX^2 - 4CX - 4D$$

dà la radice

$$2X^2 + AX + U = \sqrt{(A^2 + 4U - 4B)X^2 + (2AU - 4C)X + U^2 - 4D}$$

rimanendo da determinarsi l'immaginario $U$ in guisa che possa estrarsi la radice del polinomio sotto il segno radicale anche senza conoscere $X$; ciò richiede la risoluzione di un' equazione del 3.° grado.

Il precedente metodo che si applica a tutte le equazioni del 4.° grado non può servire a ridurre le equazioni del 6.° grado al 3.° se non se in casi particolari. Supponiamo per brevità che l' equazione sia liberata dal 2.° termine e sia

$$4X^6 + 4BX^4 + 4CX^3 = -4DX^2 - 4EX - 4F$$

avremo

$$(2X^3 + BX + C)^2 = (B^2 - 4D)X^2 + (2BC - 4E)X + C^2 - 4F,$$

e potremo estrarre la radice del secondo membro nel solo caso che

$$B^2F + C^2D + E^2 = BCE + 4DF.$$

29. L' equazione generale del 3.° grado può ridursi alla forma $X^3 - 3X + 2E = 0$, la quale colla sostituzione $X = Z + \frac{1}{Z}$ diventa del 6.° grado, ma posto $Z^3 = Y$ si riduce al 2.° $Y^2 + 2EY + 1 = 0$, sic-

chè $X=\sqrt[3]{-E+\sqrt{(E^2-1)}}+\sqrt[3]{-E-\sqrt{(E^2-1)}}$. Questa formula nell'Algebra degli immaginarii non ammette l'eccezione del caso irreducibile, poichè dee supporsi che si sappia estrarre la radice terza di qualunque immaginario.

Le sole equazioni del 5.° grado che sieno risolubili da una formula analoga alla precedente, sono quelle che possono ridursi a

$$X^5-5X^3+5X+2E=0$$

e si trova

$$X=\sqrt[5]{-E+\sqrt{(E^2-1)}}+\sqrt[5]{-E-\sqrt{(E^2-1)}}.$$

L'equazione

$$X^6-6X^4+CX^3-9X^2-3CX+E=0$$

colle sostituzioni

$$X=Z+\frac{1}{Z}\,,\quad Z^3=Y\,,\quad Y+\frac{1}{Y}=T$$

si riduce alla

$$T^2+CT+E=0\,;$$

il che del resto potrebbe ottenersi anche mediante l'estrazione di radici (§. 28.) In generale la $X^{mn}-mnX^{mn-2}+\frac{mn(mn-3)}{2}X^{mn-4}-\text{ec.}+$

$$+A\{X^{(m-1)n}-(m-1)nX^{(m-1)n-2}+\text{ec.}\}+B\{X^{(m-2)n}-$$

$$-(m-2)nX^{(m-2)n-2}+\text{ec.}\}\ldots.+D\{X^n-nX^{n-2}+\text{ec.}\}+E=0$$

si riduce alla $T^m-mT^{m-2}+\frac{m(m-3)}{2}T^{m-4}-\text{ec.}+A(T^{m-4}-\text{ec.})+$

$+B(T^{m-6}-\text{ec.})\ldots.+DT+E=0$. È da notarsi che se $n$ fosse pari si comincierebbe coll'abbassare il grado della proposta alla metà ponendovi $X=X_1^2$, poscia la sostituzione $X_1=2+X'$ ricondurrebbe l'equazione alla forma primitiva.

30. Veniamo adesso alle formule pel calcolo numerico degli immaginarii; dicemmo che questi si sogliono esprimere sotto due forme differenti, che sono $z\mathcal{V}^u$, $x+\xi\mathcal{V}$; nella prima è palese tanto la *grandezza* $z$ quanto l'*inclinazione* $u$; nella seconda l'immaginario è

decomposto in due parti l'una parallela l'altra perpendicolare alla retta $\overline{O1}$, sulla quale si prendono le quantità. Se debbasi estrarre una radice cioè risolvere la $X^n = A$, e se $A$ sia dato sotto la forma $g\,\mathcal{V}^\gamma$, si ponga $X = z\,\mathcal{V}^u$, e si avrà $z = \sqrt[n]{g}$; si noti che $g\ z$ sono due quantità positive: in quanto all'inclinazione $u$ essa si ottiene mediante la divisione, poichè (§. 7.) $u = \gamma : n$. È noto che mediante le tavole dei logaritmi anche la prima operazione si riduce ad una divisione.

Se l'immaginario $A$ sia espresso da $a + \alpha\,\mathcal{V}$ supporremo che esso sia previamente ridotto alla forma $g(c + s\,\mathcal{V})$, essendo $g = \sqrt{a^2 + \alpha^2}$, e $c\ s$ due quantità positive o negative tali che $c^2 + s^2 = 1$; dopo di che avremo come sopra $z = \sqrt[n]{g}$. In quanto poi al simbolo $\mathcal{V}^u$ ridotto alla forma $x + \xi\,\mathcal{V}$, noi dovremo eseguire una nuova operazione per determinare $x + \xi\,\mathcal{V} = \sqrt[n]{c + s\,\mathcal{V}}$. Da questa equazione se ne deducono due, le quali nel caso di $n = 2$ sono $x^2 - \xi^2 = c$, $2\,x\,\xi = s$; e siccome $c^2 + s^2 = 1$ dà necessariamente (§. 7.) $x^2 + \xi^2 = 1$, così $(2\,x)^2 - 2 = 2\,c$, $(2\,\xi)^2 - 2 + 2\,c = 0$. Dalle quali equazioni ricaveremo i valori di $x$ e di $\xi$, ognuno dei quali può esser preso tanto col segno $+$ quanto col segno $-$, ma si deve combinarli insieme in guisa che $x\,\xi$ abbia lo stesso segno di $s$.

Per progredire alla ricerca delle formule successive ci servirà il calcolo degli immaginarii. Insieme con un'equazione $\mathcal{V}^u = x + \xi\,\mathcal{V}$ sussiste sempre la sua *conjugata* (§. 10.) $\mathcal{V}^{-u} = x - \xi\,\mathcal{V}$, per lo che $2\,x = \mathcal{V}^u + \mathcal{V}^{-u}$, $2\,\xi\,\mathcal{V} = \mathcal{V}^u - \mathcal{V}^{-u}$; e siccome $\mathcal{V}^\varphi\,\mathcal{V}^\psi = \mathcal{V}^{\varphi+\psi}$, ec. così

$$\mathcal{V}^{nu} + \mathcal{V}^{-nu} = (2\,x)(\mathcal{V}^{(n-1)u} + \mathcal{V}^{-(n-1)u}) - (\mathcal{V}^{(n-2)u} + \mathcal{V}^{-(n-2)u}),$$

mediante la quale si perviene successivamente alle formule

$$\mathcal{V}^{2u} + \mathcal{V}^{-2u} = (2\,x)^2 - 2, \quad \mathcal{V}^{3u} + \mathcal{V}^{-3u} = (2\,x)^3 - 3\,(2\,x).$$

$$\mathcal{V}^{4u} + \mathcal{V}^{-4u} = (2\,x)^4 - 4\,(2\,x)^2 + 2$$

ed in generale

$$(1) \qquad \mathcal{V}^{nu} + \mathcal{V}^{-nu} = 2\,c = (2\,x)^n - n\,(2\,x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}\,(2\,x)^{n-4} - \text{ec.}$$

la qual serie finisce se $n$ è pari coi termini

$$\ldots\ldots \pm n^2 \frac{(n^2-4)}{1.2.3.4.8}(2x)^4 \pm \frac{n^2}{1.2.2}(2x)^2 \pm 2$$

e se $n$ è dispari coi termini

$$\ldots\ldots \mp \frac{n(n^2-1)}{1.2.3.4}(2x)^3 \pm n(2x).$$

Similmente si dimostrano le due relazioni

$$V^{nu} + V^{-nu} = (2\xi)V(V^{(n-1)} - V^{-(n-1)u}) + V^{(n-2)} + V^{-(n-2)u}$$

$$V^{nu} - V^{-nu} = 2\xi V(V^{(n-1)u} + V^{-(n-1)u}) + V^{(n-2)u} - V^{-(n-2)u}$$

e perciò

$$V^{2u} + V^{-2u} = -(2\xi)^2 + 2$$

$$\frac{V^{3n} - V^{-3n}}{V} = -(2\xi)^3 + 3(2\xi)$$

$$V^{4u} + V^{4u} = +(2\xi)^4 - 4(2\xi)^2 + 2$$

ed in generale se $n$ è pari

$$(2) \qquad 2(-1)^{\frac{n}{2}} c = (2\xi)^n - n(2\xi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2\xi)^{n-4} \ldots\ldots \mp \frac{n^2}{4}(2\xi)^2 \pm 2$$

e se $n$ è dispari

$$(3) \qquad 2(-1)^{\frac{n}{2}} s = (2\xi)^n - n(2\xi)^{n-2} \ldots\ldots \mp \frac{n(n^2-1)}{24}(2\xi)^3 \pm n(2\xi).$$

Le equazioni (1) (2) (3) serviranno a determinare $x$ $\xi$; si potrebbe determinarne una sola e dedurre l' altra dalla relazione $x^2 + \xi^2 = 1$; ma siccome poscia rimarrebbe da determinare il segno della quantità ultimamente trovata; così credo che nel caso di $n$ dispari potrà esser comodo di calcolare separatamente, mediante la (1) e mediante la (3), tutti i valori di $x$ e di $\xi$, per poscia combinarli insieme in modo che $x^2 + \xi^2 = 1$. Nel caso di $n$ pari dalle predette equazioni (1) (2) si dedurranno i valori di $(2x)^2$ $(2\xi)^2$, per poscia trovare $x$ $\xi$ mediante l' estrazione di radice; e si noti che le due equazioni si riducono in sostanza ad una sola a motivo della relazione $(2\xi)^2 = 4 - (2x)^2$. Per esempio se $n = 3$ si ha, posto $(2x)^2 = t$, oppure $(2\xi)^2 = t$, l' u-

nica equazione $t^4 - 8t^3 + 20t^2 - 16t + 2 = c$ ; della quale basterà determinare due radici, giacchè le altre due sono $4-t$; infatti questa equazione è della forma di quelle del §. 29., e posto $t=2+\sqrt{v}$ la si riduce $v^3 - 4v + 2 = c$ .

31. Tutti vedranno che le formule del § precedente sono quelle che stabiliscono le relazioni tra il seno ed il coseno di un angolo e quelli di un suo multiplo. I coefficienti numerici $n$ , $\frac{n(n-3)}{2}$, ec. sono quelli stessi del §. 29., ed essi s' incontrano frequentemente nell' Analisi; le loro proprietà si dimostrano esprimendoli mediante i coefficienti della formula del binomio del Newton. Se questi ultimi si segnino con

$$\binom{(i)}{m} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,i}$$

si hanno evidentemente le due proprietà

$$\binom{(i)}{m} = \binom{(m-i)}{m} , \quad \binom{(i)}{m} = \frac{m-i+1}{i}\binom{(i-1)}{m}$$

perciò il coefficiente numerico di $(2x)^{n-2r}$ nell' equazione (1) prende le tre forme

$$\frac{n}{r}\binom{(r-1)}{n-r-1} = \frac{n}{r}\binom{(n-2r)}{n-r-1} = \frac{n}{n-2r}\binom{(n-2r-1)}{n-r-1} :$$

l' ultima delle quali mostra che il coefficiente di $(2x)^s$ è

$$\frac{n}{s}\left(\frac{n+s^{(s-1)}}{2}-1\right) = \frac{n}{1.2\ldots.s}\left(\frac{n}{s}+\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+\frac{s}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-\frac{s}{2}+2\right)\ldots :$$

dal che si ricavano, secondo che $n$ è pari o dispari, le altre forme date nel §. 30. a tale coefficiente. Ogni coefficiente è anche uguale alla somma di due coefficienti del binomio Newtoniano; infatti è

$$\frac{n}{r}\binom{(r-1)}{n-r-1} = \frac{n-r}{r}\binom{(r-1)}{n-r-1} + \binom{(r-1)}{n-r-1} = \binom{(r)}{n-r} + \binom{(r-1)}{n-r-1} :$$

così per esempio se

$$n=14\,,\ r=5 \quad \text{è} \quad \frac{14.8.7.6.5}{5.1.2.3.4} = \binom{(5)}{9} + \binom{(4)}{8} = 126 + 70 = 196 .$$

Questa formula giova a calcolare i coefficienti di cui si tratta quando siasi formato il triangolo del Pascal, che dà i coefficienti delle potenze del binomio; essa inoltre serve a dimostrare generalmente le equazioni (1) (2) (3) mediante la nota relazione

$$\binom{(i)}{m}+\binom{(i+1)}{m}=\binom{(i+1)}{m+1}.$$

Se $n$ non è intero, i secondi membri delle (2) (3) sono serie infinite, le quali procedono secondo le potenze ascendenti di $\xi$, e si ha

$$c=1-\frac{n^2}{1.2}\xi^2+\frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}\xi^4-\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}\xi^5+\text{ ec.}$$

$$s=n\xi-\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}\xi^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}\xi^5+\text{ ec.}$$

nelle quali il coefficiente di $\xi^r$ è

$$\frac{n\,2^r}{2s}\left(\frac{n+s^{(r-1)}}{2}-1\right)=2^{r-1}\left[\frac{n-s}{s}+1\right]\left(\frac{n+s^{(r-1)}}{2}-1\right)=2^{r-1}\left[2\left(\frac{n+s^{(r)}}{2}-1\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n+s^{(r-1)}}{2}-1\right)\right]=2^{r-1}\left[\left(\frac{n+s^{(r)}}{2}-1\right)+\left(\frac{\overset{(r)}{n+s}}{2}\right)\right].$$

Ci serva l' esempio dato di sopra di $n=14$, $s=4$ che dà

$$\frac{14.14.16.12}{1.2.3.4}=\frac{2^4.14}{2.4}\binom{(3)}{8}=2^3\left[2\binom{(4)}{8}+\binom{(3)}{8}\right]=8\left[\binom{(4)}{8}+\binom{(4)}{9}\right].$$

32. Come esempio degli esposti metodi di risoluzione prendiamo l'equazione dei §. 20. 24, la cui trasformata in $X-1=X'$ manca del secondo termine, ed è $X'^3-(4+2\sqrt{})X'-8+\sqrt{}=0$; ponendovi

(§. 23.) $$X'=Z+\frac{4+2\sqrt{}}{3Z}$$

avremo $$27Z^6-27(3-\sqrt{})Z^3+16+88\sqrt{}=0,$$

che moltiplicata per 12 ed estratta la radice dà

$18Z^3-(72-9\sqrt{})=\sqrt{4911-2352\sqrt{}}$. Per determinare il secondo

membro $\sqrt{a-\alpha\sqrt{-1}} = t-\tau\sqrt{-1}$ calcoleremo $g^2 = a^2+\alpha^2$, poscia $2t = \sqrt{2g+2a}$, $2\tau = \sqrt{2g-2a}$, e troveremo

$$Z_1^3 = 7,99772 - 1,40795\sqrt{-1}$$
$$Z_2^3 = 0,00228 + 0,40795\sqrt{-1}$$

Per ciascuna di queste equazioni si porrà

$$(z+\zeta\sqrt{-1})^3 = a+\alpha\sqrt{-1}\ , \quad a^2+\alpha^2 = g^2\ ,$$

e si risolveranno le due equazioni

$$(2z)^3 - 3\sqrt[3]{g^2}\,(2z) - 2a = 0\ , \quad (2\zeta)^3 - 3\sqrt[3]{g^2}\,(2\zeta) + 2\alpha = 0\ ;$$

poscia se ne combineranno le radici in guisa che $z^2+\zeta^2 = \sqrt[3]{g^2}$, il che si otterrà combinando il supremo dei valori di $z$ coll' infimo di $\zeta$, ec. In tal maniera si trova per la prima equazione
$Z_1 = 2,0066 - 0,1167\sqrt{-1}$, $-0,9025+1,7961\sqrt{-1}$, $-1,1044-1,6795\sqrt{-1}$
e per la seconda
$Z_2 = 0,6450+0,3697\sqrt{-1}$, $-0,0013-0,7416\sqrt{-1}$, $-0,6416+0,5720\sqrt{-1}$;
e sarà $X' = Z_1+Z_2$, purchè si scelgano i valori in guisa che
$3Z_1Z_2 = 4+2\sqrt{-1}$; perciò
$X' = 2,6496+0,2330\sqrt{-1}$, $-0,9036+1,0345\sqrt{-1}$, $-1,7460-1,3075\sqrt{-1}$

33. Le espressioni della forma $10^l\sqrt{-1}^\lambda$, dove $\lambda$ è l' inclinazione dell' immaginario ed $l$ il logaritmo della sua grandezza, sono comodissime quando si tratta di estrarre le radici degl' immaginarii, elevarli a potenza, moltiplicarli o dividerli; ma divengono poi incomode quando si vuole sommarli o sottrarli. Vediamo come si possa pervenirvi mediante le tavole logaritmiche e trigonometriche, cioè come data la $10^l\sqrt{-1}^\lambda + 10^m\sqrt{-1}^\mu = 10^n\sqrt{-1}^\nu$ si possano determinare $n$ $\nu$ conoscendo $l$ $\lambda$ $m$ $\mu$. Non è difficile riconoscere che il problema si riduce alla risoluzione di un triangolo, di cui sono dati i logaritmi di due lati e l' angolo intercetto $\lambda-\mu$, sicchè serviranno le conosciute formule trigonometriche.

Parmi peraltro che si potrà usare anche il metodo per tentativi da me adoperato nella Nota IV. della citata Memoria (§. 14.) (Mem. dell' Istituto Vol. III. p. 214.), e si avrà il vantaggio che, consistendo

esso nella ripetizione di un facile calcolo, basta esaminare accuratamente l' ultima parte per essere certi dell' esattezza del risultamento. La proposta equazione e la sua conjugata danno

$$10^n = 10^l V^{\lambda-\nu} + 10^m V^{\mu-\nu} = 10^l V^{\nu-\lambda} + 10^m V^{\nu-\mu} ,$$

ossia $$10^l \operatorname{sen}(\lambda-\nu) = 10^m \operatorname{sen}(\nu-\mu) ,$$

da questa troveremo mediante tentativi il valore di $\nu$; poscia avremo $n$ dalla $l - \log.\operatorname{sen}(\nu-\mu) = m - \log.\operatorname{sen}(\lambda-\nu) = n - \log.\operatorname{sen}(\lambda-\mu)$.

Applichiamo i nostri calcoli all'esempio del § precedente. Primieramente si ha $72-9V = 10^{1,860699} V^{-0,079167}$, giacchè l' angolo che ha la tangente $\frac{9}{72}$ espresso in parti di angolo retto è 0,079167: il logaritmo del coseno di tal angolo sottratto da log. 72 dà il logaritmo 1,860699 della grandezza. Similmente $4911-2352V = 10^{3,736010} V^{-0,264344}$, e la radice seconda di tal immaginario è $10^{1,868005} V^{-0,142172}$.

Ora per trovare

$$18 Z^3 = 10^{1,860699} V^{-0,079167} + 10^{1,868005} V^{-0,142172}$$

noi prenderemo per prima ipotesi $\nu = -0,12$, e calcoleremo come segue il valore di $m-l+\log.\operatorname{sen}(\nu-\mu)-\log.\operatorname{sen}(\lambda-\nu)$, tenendo conto nello stesso tempo delle differenze che si avrebbero se $\nu$ crescesse di 0,0001, le quali differenze si trovano nelle tavole. Così si vede che quel valore anzichè nullo è $-0,257693$, il quale diviso per la somma 3021 delle differenze dà $-0,0086$ per l' errore della fatta ipotesi. Nello stesso modo si fa il calcolo colla seconda ipotesi di $\nu = -0,1114$, la quale dà l' errore $-0,000465$, sicchè $\nu = -0,110935$, la cui esattezza si verifica in ugual maniera.

| | | | Differenza | Errore di $\nu$ |
|---|---|---|---|---|
| $m-l$ | $=+0,007306$ | | | |
| $\nu-\mu = 0,0221.72$ | log. sen | $+8,541837$ | $+1960$ | |
| $\lambda-\nu = 0,0408.33$ | log. sen | $-8,806836$ | $+1061$ | |
| | | $-0,257693$ | $: +3021$ | $= -86$ |
| $0,0307.72$ | log. sen | $+8,684102$ | $+1411$ | |
| $0,0322.33$ | log. sen | $-8,704239$ | $+1345$ | |
| | | $-0,012831$ | $: 2756$ | $= -4.65$ |

$$\begin{array}{lll} \nu-\mu=0,0312.37 & \text{log. sen} & 8,690615 \\ \lambda-\nu=0,0317.68 & \text{log. sen} & 8,697925 \\ \hline \lambda-\mu=0,0630.05 & \text{log. sen} & 8,994784 \end{array}$$

$$\nu = -0,110935 \ , \quad n = 2,164865$$

Trovato il log. sen$(\lambda-\mu)$ se ne deduce facilmente il valore di $n$, sicchè $18Z^3=10^{2,164865}V^{-0,110935}$. Sottraendo il log. 18, poscia dividendo per 3 si ha un valore di $Z=10^{0,303197}V^{-0,036978}$. Siccome d'altronde

$\frac{4+2V}{3}=10^{0,175394}V^{0,293167}$ così una delle radici dell'equazione (§. 32.) sarà

$$X'=10^{0,303197}V^{-0,036978}+10^{-0,129803}V^{0,352115} .$$

Col mezzo delle tavole si passa facilmente dalla forma $10^{\prime}V^{\lambda}$ alla $a+\alpha V$, giacchè $V^{\lambda}=\cos\lambda+V\operatorname{sen}\lambda$; così il precedente valore si riduce a

$$\begin{aligned} X' &= 2,00662-0,11669V+0,64297+0,36962V \\ &= 2,64959+0,25293V . \end{aligned}$$

34. Non poco laboriosa è la risoluzione delle equazioni del 4.° grado, poichè vi si richiede (§. 28.) la determinazione di una radice di un'equazione del 3.°; ed oltre il 4.° grado pochissime sono le equazioni che si sappiano ridurre (§. 29.) alla forma $X^n=A$: bisogna adunque trovare un calcolo numerico mediante il quale si ottengano successivamente le varie cifre decimali del valore di ciascuna radice di una equazione.

La teoria degl'indici quale l'abbiamo esposta nel §. 26. ci dà un modo facile e diretto per risolvere una qualunque equazione algebraica $AX^n+BX^{n-1}+\ldots=0$; poichè calcolandone successivamente parecchie trasformate in $(X-a)$ noi possiamo ristringere a piacimento l'intervallo in cui sono comprese le singole radici, ossia noi possiamo determinare dei confini sempre più ristretti, nei quali sieno compresi i valori della quantità $x$ essendo $X=x+\xi V$; e quando $a$ uguagli o sia pochissimo differente da un valore della $x$, avremo due equazioni in $\xi$ che avranno approssimatamente una radice comune, e così sarà determinato il valore di $X$. Le successive trasformate in

$(x-a)$, $(x-a-a')$, ec. si calcoleranno coll' algoritmo esposto nella Memoria più volte citata, operando separatamente sulle due parti dell' equazione, in una delle quali i coefficienti della potenza di $X$ sono semplici quantità, nell' altra sono quantità moltiplicate per $\sqrt{\ }$.

Così per esempio data l' equazione

$$X^3+(l+\lambda\sqrt{\ })X^2+(m+\mu\sqrt{\ })X+n+\nu\sqrt{\ }=0\ ,$$

noi calcoleremo colle cifre $a$, $a'$.... sui coefficienti delle due parti

$$X^3+lX^2+mX+n+(\lambda X^2+\mu X+\nu)\sqrt{\ }=0\ .$$

e formeremo la seguente *tabella*

| | $1+l+m+n$ | $\lambda+\mu+\nu$ |
|---|---|---|
| $a$ | $1+l_1+m_2+n_3$ | $\lambda_1+\mu_2+\nu_3$ |
| | $1+l_2+m_3$ | $\lambda_2+\mu_3$ |
| | $1+l_3$ | $\lambda_3$ |
| | $1$ | |

essendo

$$l_1=a+l\ ,\quad m_2=al_1+m\ ,\quad n_3=am_2+n\ ,\quad \lambda_1=\lambda\ ,\quad \mu_2=a\lambda_1+\mu\ ,$$
$$\nu_3=a\mu_2+\nu\ ,\qquad l_2=a+l_1\ ,\quad m_3=al_2+m_2\ ,\quad \lambda_2=\lambda\ ,\quad \mu_3=a\lambda_2+\mu_2\ .$$
$$l_3=a+l_2\ ,\quad \lambda_3=\lambda\ ,$$

e sarà

$$X'^3+l_3X'^2+m_3X'+n_3+(\lambda_3X'^2+\mu_3X'+\nu_3)\sqrt{\ }=0$$

la trasformata in $X'=X-a$. Le due equazioni che si ottengono ponendo $X'=\xi\sqrt{\ }$ sono

$$-l_3\xi^2-\mu_3\xi+n_3=0\ ,\qquad -\xi^3-\lambda_3\xi^2+m_3\xi+\nu_3=0\ ,$$

e possono considerarsi come le due parti dell' equazione, che si ha ponendo $X'=\Xi\sqrt{\ }$ (dove $\Xi$ è un immaginario) e che è

$$-l_3\Xi^2-\mu_3\Xi+n_3+(-\Xi^3-\lambda_3\Xi^2+m_3\Xi+\nu_3)\sqrt{\ }=0\ .$$

Per trovare le radici delle due equazioni in $\xi$ si opera nel modo solito colle *cifre* $\alpha$, $\alpha'$.... sui coefficienti delle medesime; sicchè per tutte quelle cifre che sono comuni alle radici delle suddette due equazioni, il calcolo è precisamente quello stesso come se operando

sulle due parti dell' equazione in $\Xi$ si formassero le solite *tabelle* colle *cifre* $\alpha$, $\alpha'$.... ; ecco la prima

$$\begin{array}{c|c|c} & -l_3-\mu_3+n_3 & -1-\lambda_3+m_3+\nu_3 \\ \hline \alpha & -l_4-\mu_5+n_6 & -1-\lambda_4+m_5+\nu_6 \\ & -l_5-\mu_6 & -1-\lambda_5+m_6 \\ & -l_6 & -1-\lambda_6 \end{array}$$

essendo

$$-l_4=-l_3\ ,\quad -\mu_5=-\alpha l_4-\mu_3\ ,\quad n_6=-\alpha\mu_5+n_3\ ,\quad -\lambda_4=-\alpha-\lambda_3\ ,$$
$$m_5=-\alpha\lambda_4+m_3\ ,\qquad \nu_6=\alpha m_5+\nu_3\ ,\quad \text{ec.}$$

Sicchè in fine si vengono a trovare i coefficienti della trasformata in $(\Xi-\alpha)$, dai quali sarà facilissimo passare ai coefficienti della trasformata in $X-a-\alpha V=(\Xi-\alpha)V=X'$, la quale sarà

$$X'^3_1+l_6X'^2_1+m_6X'_1+n_6+(\lambda_6X'^2_1+\mu_6X'_1+\nu_6)V=0\ .$$

Per separare le radici si calcolano i coefficienti della trasformata in $(X-a)$ e mediante le due equazioni in $\xi$ si calcola l'indice corrispondente ad $x=a$; lo stesso si fa per la trasformata in $(X-a-a')$ ec.: ma quando si ha già isolata una radice non si tratta più che di calcolare per la trasformata in $(X-a)$ il valore $\alpha+\alpha'+\ldots$. che è quasi radice comune delle due equazioni in $\xi$, e vedere qual correzione $a'$ debba farsi al valore di $a$; poscia si calcola la trasformata in $(X-a-a')$, e le due corrispondenti equazioni in $\xi$, la cui radice quasi comune avrà all' incirca lo stesso valore precedente $\alpha+\alpha'+\ldots$. ; in questa maniera verrebbe a ripetersi per ogni trasformata in $(X-a)$, in $(X-a-a')$ ec. buona parte del calcolo eseguito colle *cifre* $\alpha$, $\alpha'$, .... Onde evitare queste ripetizioni di calcolo trovo più comodo di calcolare mediante la cifra $a$ i coefficienti della trasformata in $(X-a)$, e dedurne, come si vide precedentemente, quelli dell' equazione in $\Xi=-(X-a)V$; da questi calcolare colla *cifra* $\alpha$ i coefficienti della trasformata in $(\Xi-\alpha)$, e dedurne quelli dell' equazione in $X'_1=(\Xi-\alpha)V=X-a-\alpha V$. E continuare nello stesso modo colle cifre $a'$, $\alpha'$, $a''$, $\alpha''$, ec.; venendosi per tal guisa a trovare successivamente tutte le cifre della cercata radice $X=(a+a'+\ldots.)+(\alpha+\alpha'+\ldots.)V$.

Nel passaggio dalla *tabella* calcolata colla *cifra* $a$, alla seguente per $\alpha$, da questa alla successiva per $a'$, ec., alcuni coefficienti mutano segno, altri lo conservano: gioverà tener a mente la seguente regola. Gli ultimi termini $n\ \nu$ conservano sempre e i loro posti e i loro segni; inoltre conserva il segno il penultimo $m$, che dalla *tabella* per $a$ a quella per $\alpha$ passa da sinistra a destra, e che ripassa da destra a sinistra dalla tabella per $\alpha$ a quella per $a'$; al contrario muta segno il penultimo termine $\mu$ che nel primo caso passa da destra a sinistra e nel secondo da sinistra a destra. Ogni altro termine segue riguardo al segno regola opposta a quella che vale pel termine che ne è distante di due posti; così i termini antepenultimi cangiano ogni volta di segno, perchè gli ultimi non ne cangiano mai, ec.

33. La scelta delle successive cifre $a$, $\alpha$, $a'$, .... non è tanto facile quanto nella risoluzione delle equazioni fra sole quantità, sicchè occorrerà qualche volta calcolare più cifre spettanti ad uno stesso rango di decimale, ed alcuna di tali cifre potrà anche esser negativa; ciò allungherà alcun poco il calcolo, ma non porterà alcuna sensibile difficoltà nella determinazione della radice che risulta dall' unione di tutte queste cifre.

Siccome l' operazione va sempre più avvicinandosi ad essere una semplice divisione; così sceglieremo per primo esempio l' equazione del 1.° grado $(13+9\sqrt{\ })X-25-54\sqrt{\ }=0$

La prima *tabella* si calcola colla *cifra* 3, ed ottenuti al solito (come qui si vede sotto la lettera $(A)$) i coefficienti $13+14\ \ 9-27$ della trasformata in $(X-3)$, se ne deducono mediante la data regola quelli $-9+14\ \ 13-27$ dell' equazione in $\frac{(X-3)}{\sqrt{\ }}$, sui quali si opera colla *cifra* $\alpha=2$ (alla quale si è aggiunto il segno $\sqrt{\ }$ pel solo oggetto di non dimenticare che tal *cifra* appartiene al valore di $\xi$, essendo $X=x+\xi\sqrt{\ }$), ed ottenuti i coefficienti $-9-4\ \ 13-1$ se ne dedussero quelli $13-4\ \ 9-1$ della trasformata in $(X-3-2\sqrt{\ })$. Dovendosi ora passare ai decimi si moltiplicarono gli ultimi termini di ciascuna parte per 10, e si ebbero $13-40\ \ 9-10$, sui quali si operò colla cifra 3′; e così in seguito.

(*A*)

| | | |
|---|---|---|
| | 13 — 25 | 9 — 54 |
| 3 | 13 + 14 | 9 — 27 |
| | — 9 + 14 | 13 — 27 |
| 2V | — 9 — 4 | 13 — 1 |
| | 13 — 40 | 9 — 10 |
| 3′ | 13 — 1 | 9 + 17 |
| | — 9 — 1 | 13 + 17 |
| —1′V | — 9 + 8 | 13 + 4 |
| | 13 + 80 | 9 + 40 |
| — 6″ | 13 + 2 | 9 — 14 |
| | — 9 + 2 | 13 — 14 |
| 1″V | — 9 — 7 | 13 — 1 |

(*B*)

| | | |
|---|---|---|
| | 13 — 25 | 9 — 54 |
| 3 | 13 + 14 | 9 — 27 |
| 2V | — 9 — 40 | 13 — 10 |
| 2′ | 13 — 14 | 9 + 8 |
| —1′V | — 9 — 50 | 13 — 50 |
| 4″ | 13 + 2 | 9 — 14 |
| 1″V | — 9 — 70 | 13 — 10 |
| 4‴ | 13 — 18 | 9 + 26 |
| —2‴V | — 9 0 | 13 0 |

Lo scopo da aversi nella scelta della prima *cifra* 3 si è che gli ultimi termini +14 −27 che ne risulteranno sieno per quanto è possibile piccoli ed abbiano all' incirca lo stesso rapporto dei numeri −9, 13 che nella seconda *tabella* diverranno i loro divisori; si vede che la *cifra* 3 soddisfa meglio a questo scopo di quello che la cifra 2 che avrebbe dati gli ultimi termini +1, −36; oppure la *cifra* 4 che avrebbe dato +27, −18. Così pure nella scelta della seconda *cifra* 2 si ebbe in vista che gli ultimi termini −4, −1 risultassero all' incirca proporzionali ai successivi divisori 13 9. In terzo luogo si osservò che il 13 è compreso nel 40 poco più di 3 volte, e che

il 9 è compreso nel 10 una volta, e si scelse la *cifra* 5′, che rende molto piccolo l'ultimo termine $-1$ che deve poi esser diviso pel $-9$: del resto se si avesse usata maggior attenzione si avrebbe conosciuto che la cifra 2′ era un poco più opportuna della 5′, ed essa avrebbe dati i coefficienti $13-14$, $9+3$ come si vede sotto il $(B)$, dove i medesimi calcoli predetti sono scritti più compendiosamente. Continuando il calcolo si trova tanto in $(A)$ quanto in $(B)$ la cifra $-1'\sqrt{}$. Dopo di che volendosi passare ai centesimi si moltiplicano ancora gli ultimi termini per 10, e si trova in $(A)$ la cifra $-6''$, invece in $(B)$ la 4″, le quali però conducono agli stessi termini $13+2$, $9-14$. Si proseguì nello stesso modo il calcolo terminando in $(B)$ colla cifra $-2''\sqrt{}$, perchè si ottennero gli ultimi termini ambedue nulli. Raccogliendo le *cifre* tanto positive che negative trovate in $(B)$ si ha il quoziente

$$X=3,244+2,\bar{1}\,1\,\bar{2}\sqrt{}=3,244+1,908\sqrt{}$$

Il calcolo in $(A)$ avrebbe dato identicamente $X=3,3\bar{6}4+2,\bar{1}\,1\,\bar{2}\sqrt{}$

Abbiasi per secondo esempio

$$(347324+29126\sqrt{})X-868094-76574\sqrt{}=0\,.$$

Rammentando lo scopo da aversi nella scelta delle *cifre* del quoziente ed osservando che nel presente caso uno dei divisori 347... è molto maggiore dell'altro $\pm 29...$ si vedrà opportuno che ciascuna *cifra* sia quasi sempre quella che è data dalla divisione pel maggiore dei predetti divisori, giacchè il residuo diventa poi dividendo pel minore dei divisori. Non volendo spingere l'approssimazione molto innanzi non si aggiungono zeri agli ultimi termini, ed invece si vanno tagliando le ultime cifre dei penultimi.

| | 347324 — 868094 | 29126 — 76574 |
|---|---|---|
| 2 | 347324 — 173446 | 29126 — 18322 |
| 5′ | 34732,4 + 216 | 2912.6 — 3759 |
| $1''\sqrt{}$ | −291.2 — 75 | 3473,2 — 286 |
| $1'''\sqrt{}$ | −29.1 — 104 | 347,3 + 61 |
| 3″ | 34,7 — 0 | 2,9 + 70 |
| $-2''\sqrt{}$ | −2,9 + 6 | 34,7 + 1 |
| −2″ | 3,5 — 1 | 0,3 0 |

Così si trovò

$$X = 2{,}50032 + 0{,}0112\sqrt{} = 2{,}50028 + 0{,}0108\sqrt{} .$$

36. Veniamo adesso a risolvere l'equazione

$$X^3 - 3X^2 - X - 5 + (-2X + 3)\sqrt{} = 0 .$$

Mediante il calcolo degl'indici abbiamo già veduto (§. 26.) che posto $X = x + \xi\sqrt{}$ una delle radici corrisponde ad $x$ tra 0 ed 1, una ad $x$ minore di 0, ed una ad $x$ maggiore di 2. Separate in tal modo le tre radici noi troveremo quella che ha $x$ compreso tra 0 ed 1 cominciando col cercare la prima cifra $\alpha$ del valore di $\xi$. A tal fine i coefficienti $1-3-1-5$, $0-2+3$ della proposta ci daranno colla regola stabilita nel §. 34. i coefficienti $3+2-5$, $-1-0-1+3$ dell'equazione in $\Xi$, i quali c'indicheranno la cifra $\alpha = 1$; poscia continueremo il calcolo come qui si vede.

| | | |
|---|---|---|
| | $3 + 2 - 5$ | $-1 - 0 - 1 + 3$ |
| $1\sqrt{}$ | $3 + 5 + 0$ | $-1 - 1 - 2 + 1$ |
| | $3 + 8$ | $-1 - 2 - 4$ |
| | $3$ | $-1 - 3$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $1 - 30 - 400 + 0$ | $30 - 800 + 1000$ |
| $1'$ | $1 - 29 - 429 - 429$ | $30 - 770 + 230$ |
| | $1 - 28 - 457$ | $30 - 740$ |
| | $1 - 27$ | $30$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $270 + 74000 - 429000$ | $-1 - 300 - 45700 + 230000$ |
| $5''\sqrt{}$ | $270 + 75350 - 52250$ | $-1 - 305 - 47225 - 6125$ |
| | $270 + 76700$ | $-1 - 310 - 48775$ |
| | $270$ | $-1 - 315$ |
| $5'''\sqrt{}$ | $2{,}70 + 7683{,}5 - 13832$ | $-{,}001 - 3{,}16 - 4893{,}3 - 3059'$ |
| | $+ 7697{,}0$ | $- 3{,}16 - 4909{,}1$ |
| | | $- 3{,}17$ |

| | | |
|---|---|---|
| | ,001 — 2,70 — 4909,1 — 13832 | 3,17 — 7697,0 — 30591 |
| $-4'''$ | ,001 — 2,70 — 4898,3 + 5761<br>— 2,71 — 4887,5 | 3,17 — 7709,7 + 247<br>— 7722,4 |
| $4''$ | — 0,03 — 488,9 + 3805<br>— 489,0 | ,03 — 772,1 — 2841<br>— 772,0 |

| | | |
|---|---|---|
| | 0,03 + 772,0 + 3805 | —,03 — 489,0 — 2841 |
| $-5''V$ | 0,03 + 771,8 — 54<br>+ 771,7 | —,03 — 488,8 — 397<br>— 488,7 |
| $-1^{r}V$ | + 77,2 — 131 | — 48,9 — 348 |
| $-4^{r}$ | — 48,9 + 65 | — 77,2 — 39 |
| $-8^{r'}V$ | + 7,7 + 3 | — 4,9 + 0 |

ed otterremo la cercata radice

$$X = 0,10\bar{4}4\bar{4}0 + 1,055\bar{5}\bar{1}\bar{8}V = 0,096360 + 1,054482\,V$$

Dopo il calcolo colla *cifra* $1\,V$ passando a cercare una *cifra* di $x$ si vide che essa non poteva essere che un decimo, perciò si moltiplicarono gli ultimi termini per **1000**, i penultimi per **100**, gli antipenultimi per **10**, ec., e si fece il solito calcolo colla cifra $1'$. Simil cosa si fece passando dai decimi ai centesimi, ec. soltanto non volendosi spingere tropp' oltre il calcolo si adoperò in luogo dei moltiplicatori **1000**, **100**, **10**, **1** gli altri **1**, **0,1**, **0,01**, **0,001**. Dopo della cifra $5''V$ si fece il calcolo anche colla $5'''V$ onde ridurre gli ultimi termini **— 13832 — 30591** all' incirca proporzionali ai termini **— 4909 — 7697** che nella tabella seguente ne divengono i divisori. Egual avvertenza si ebbe nelle tabelle successive. Quando il calcolo si ridusse ad una divisione lo si compendiò nel modo esposto al §. **35**. (*B*)

Passiamo a calcolare la radice, nella quale $x > 2$, e mediante la *cifra* 3 otterremo

| | | |
|---|---|---|
| | 1 — 3 — 1 — 5 | 0 — 2 + 3 |
| 3 | 1 — 0 — 1 — 8 | 0 — 2 — 3 |
| | 1 + 3 + 8 | |
| | 1 + 6 | |

nel solito modo i coefficienti di

$$y = -6\xi^2 + 2\xi - 8 \qquad \eta = -\xi^3 \qquad + 8\xi - 3 ,$$

e siccome la $y = 0$ non ammette radici, così riconosceremo che le radici della $\eta = 0$ non potranno dare indice maggiore del $+1$, che appartiene (§. 26.) a $x = 2$; onde $x$ è maggiore anche di 3. La trasformata in $(X - 4)$ ci dà similmente

$$y = -9\xi^2 + 2\xi + 7 , \qquad \eta = -\xi^3 \qquad + 23\xi - 5 :$$

qui la $y \equiv 0$ ha le radici $-0{,}8$ , 1 , alle quali sono intercalate le tre radici $-5$, 0,2, 4 della $\eta = 0$ , dal che facilmente si conchiude che l'indice è 3, e che perciò $x$ è minore di 4. Continueremo dunque il calcolo col valore intermedio 3, 5

| | | |
|---|---|---|
| | 1 + 60 + 800 — 8000 | 0 — 200 — 3000 |
| 5′ | 1 + 65 + 1125 — 2375 | 0 — 200 — 4000 |
| | 1 + 70 + 1475 | |
| | 1 + 75 | |
| 1′ | 1 + 76 + 1551 — 824 | 0 — 200 — 4200 |
| | 1 + 77 + 1628 | |
| | 1 + 78 | |

vedremo che tanto per $x = 3{,}5$ quanto per $x = 3{,}6$ la $y = 0$ è priva di radici, sicchè l'indice è 1, ed $x$ è maggiore di 3,6; peraltro i termini ultimamente trovati c'indicano abbastanza che per diminuire gli ultimi termini sarà opportuna la cifra $2'V$, e poscia potremo progredire col calcolo.

| | | |
|---|---|---|
| | $-78+200-824$ | $-1-0+1628-4200$ |
| $2'\sqrt{}$ | $-78+44-736$<br>$-78-112$ | $-1-2+1624-952$<br>$-1-4+1616$<br>$-1-6$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $1+780+161600-736000$ | $60+11200-952000$ |
| $5''$ | $1+785+165525+91625$<br>$1+790+169475$<br>$1+795$ | $60+11500-894500$<br>$60+11800$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $-795-11800+91625$ | $-1-60+169475-894500$ |
| $5''\sqrt{}$ | $-795-15775+12750$<br>$-795-19750$ | $-1-65+169150-48750$<br>$-1-70+168800$<br>$-1-75$ |
| $3'''\sqrt{}$ | $-7,95-1998,9+6753$<br>$-7,95-2022,7$ | $-,001-,75+16877,7+1883$<br>$-0,76+16875,5$ |

e si continuerà a trovare le cifre $-4^{IV}$, $-1^{IV}\sqrt{}$, $3^{V}\sqrt{}$, $-1^{V}$, $7^{VI}\sqrt{}$, $2^{VI}$, quali vengono facilmente indicate dalle divisioni per quello dei due penultimi termini, che è molto maggiore dell'altro. Per tal modo si ha

$$X=3,650\bar{4}\bar{1}2+0,253\bar{1}37\sqrt{}=3,649592+0,252937\sqrt{}$$

Finalmente si trova con un calcolo analogo l' ultima radice

$$X=\bar{1},254052+\bar{2},708\bar{6}\bar{2}1\sqrt{}=-0,745952-1,307419\sqrt{}\,.$$

## §. III.

### *Proprietà degli interi.*

37. I Matematici molto si occuparono delle proprietà dei numeri interi, e da Diofanto a Fermat, da Fermat a Gauss, a Legendre, a Jacobi formarono quel vastissimo corpo di scienza, che costituisce una delle parti più difficili della matematica pura. Se in luogo di soli numeri interi si considerino gli immaginarii interi, l'oggetto riesce più generale, e la scienza si estende non poco; ne daremo qui con rapidi cenni qualche idea; si vedrà che spesse volte i teoremi ed i processi di calcolo non sono se non facili estensioni di quelli che riguardano i numeri interi; ma che in molti altri casi la diversità fra i numeri e gli immaginarii è decisa, e che rimangono non poche difficoltà da superare.

D'ora in poi colle lettere indicheremo soltanto gl'interi, i quali saranno numeri se le lettere sieno di carattere minuscolo, ed immaginarii se maiuscole. Se un intero è uguale al prodotto di altri interi, si dice che il primo è divisibile per ciascuno di questi. Ogn'intero (immaginario) che non ha alcun divisore (oltre una delle quattro unità $\pm 1$, $\pm\sqrt{}$, e l'intero stesso moltiplicato per una delle quattro unità) si dirà *semplice;* gli altri interi si diranno *composti*. I numeri non divisibili nè per altro numero, nè per alcun immaginario intero si diranno *semplici;* se non sono divisibili per alcun numero, si dicono *primi;* e si diranno *primi-composti* se sono divisibili soltanto per un immaginario. Così per esempio 7 è un numero *primo* e *semplice;* 5 è numero *primo-composto* perchè è divisibile nei due fattori $2+\sqrt{}$ . $2-\sqrt{}$, ognuno dei quali è un intero *semplice*. Tutti i numeri *primi* che divisi per 4 lasciano il residuo 3 sono *semplici;* gli altri sono *composti* da due fattori semplici $a+\alpha\sqrt{}$, $a-\alpha\sqrt{}$; perciò tali numeri *primi-composti* sono della forma a $a^2+\alpha^2$.

38. Cerchiamo quali calcoli numerici si richieggano per decomporre un intero nei suoi fattori. Sia da prima proposto il numero

14933 da decomporre nei suoi fattori *primi*: notissimi criterii mostrano che esso non è divisibile nè per 2 nè per 3 nè per 5. Per tentare le divisioni cogli altri numeri primi gioverà tagliare le cifre del numero proposto di 2 in 2, di 3 in 3, e di 4 in 4, poscia eseguire (sempre sulle parti del numero proposto) quel solito calcolo che serve a sostituire in una funzione algebraica intera un dato valore di $x$. Operando sulle parti di 3 in 3 cifre (colonna $B$) colla *cifra* $-1$ si ottiene l' ultimo termine 919, il quale è il residuo di 14933 diviso per $1001 = 7.11.13$, e siccome 919 e 1001 non hanno alcun fattore comune, così noi conosciamo che il numero proposto non è divisibile nè per 7, nè per 11, nè per 13. Nella stessa colonna operando sui numeri $14 + 933$ colla *cifra* $-3$ si ottiene l' ultimo termine 891, che confrontato con $1003 = 17.59$ mostra che il proposto non è divisibile nè per 17 nè per 89.

| | (*A*) | | | (*B*) | | | (*C*) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1 + 49 + 33$ | | | $14 + 933$ | | | $1 + 4933$ | |
| 7 | $1 + 56 + 425$ | 31.3 | $-1$ | $14 + 919$ | 7.11.13 | $-5$ | $1 + 4928$ | 29.23.15 |
| 6 | $1 + 55 + 363$ | 47.2 | $-3$ | $14 + 891$ | 17.59 | $-4$ | $+ 4929$ | 41.61.4 |
| 11 | $1 + 60 + 693$ | 89 | $-7$ | $+ 835$ | 19.53 | $-1$ | 4932 | 73.137 |
| 3 | $1 + 52 + 189$ | 97 | 11 | $+ 1087$ | 23.43 | | | |
| $-1$ | $1 + 48 - 15$ | 101 | 1 | $+ 947$ | 37.27 | | | |
| $-3$ | $1 + 46 - 105$ | 103 | $-5$ | 863 | 67.15 | | | |
| $-7$ | $1 + 42 - 261$ | 107 | 6 | 1017 | 71.14 | | | |
| $-9$ | $1 + 40 - 327$ | 109 | 4 | 989 | 83.12 | | | |

Similmente 835 non ha fattore comune con $1007 = 19.53$ nè 1087 con $989 = 23.43$, nè 947 con $999 = 37.27$. Continuando il calcolo nella colonna ($C$) colla *cifra* $-5$ vedremo se il numero proposto abbia alcun fattore comune con $10005 = 23.29.15$; e per la colonna ($A$) *cifra* 7 con $95 = 31.3$; per la colonna ($C$) cifra $-4$ con $10004 = 41.61.4$; ed ($A$) 6 con $94 = 47.2$; e ($B$) $-5$ con $1005 = 67.15$, e ($B$) 6 con $994 = 71.14$, e ($C$) $-1$ con

$10001 = 73.137$, e $(B)$ 4 con $996 = 83.12$. Così si sono saggiati tutti i numeri primi fino all'83, eccettuato soltanto il 79, pel quale si tenterà la divisione. In quanto ai successivi numeri primi 89, 97, 101, 103, 107, 109 la divisione si vede tentata nella colonna $(A)$ mediante le *cifre* 11, 3, $-1$, $-3$, $-7$, $-9$. L'ultima riesce, e ci dà $14933 = 109.137$; come poteva dedursi anche dall'ultimo termine 4932 che ha con 10001 il fattore comune 137. Se avendo spinto l'operazione sino a questo punto non si fosse trovato alcun fattore, si avrebbe continuato tentando la divisione coi successivi numeri primi 113, 127, 131, 139, 149, ec. fino alla radice del numero proposto.

Si voglia ora decomporre in fattori semplici l'intero $630+165\sqrt{}$; cercheremo da prima il massimo comun divisore dei numeri 630 165, ed otterremo il fattore 15 che si decompone nei numeri primi 3, 5, poscia nei fattori semplici $3(2+\sqrt{})(2-\sqrt{})$. Venendo all'altro fattore $42+11\sqrt{}$ (i cui due termini 42 11 non hanno alcun divisore comune) noi decomporremo il valore di $(42+11\sqrt{})(42-11\sqrt{})=1885$ (cioè la seconda potenza della grandezza dell'immaginario $42+11\sqrt{}$) nei suoi fattori primi 5 13 29, i quali saranno tutti composti, e ci daranno i fattori semplici $2\pm\sqrt{}$ $3\pm2\sqrt{}$ $5\pm2\sqrt{}$, ognuno dei quali o col segno superiore o coll'inferiore dovrà dividere $42+11\sqrt{}$. Per fare la scelta del segno sarà più comodo impiegare una moltiplica, anzichè il tentativo di una divisione fra immaginarii: così pei due fattori $5\pm2\sqrt{}$ cercheremo quale di essi moltiplicato per $42+11\sqrt{}$ (o, più speditamente, pel residuo $13+11\sqrt{}$ di $42+11\sqrt{}$ diviso per 29) dia un prodotto divisibile per 29, e riconosciuto che ciò spetta al moltiplicatore $5-2\sqrt{}$, ne dedurremo che l'altro $5+2\sqrt{}$ è il fattore semplice ricercato.

Così abbiamo $630\sqrt{}+165 = 3(2-\sqrt{})(2+\sqrt{})^2(3-2\sqrt{})(5+2\sqrt{})$.

39. Il precedente problema ci conduce a risolvere l'altro: *Trovare tutti gli interi, dei quali si conosce la seconda potenza della grandezza*. L'espressione geometrica del problema è questa: Segnati sopra un piano due sistemi di rette perpendicolari, le quali formino dei quadrati coi lati eguali all'unità di lunghezza, determinare tutti i vertici di tali quadrati, che hanno una determinata distanza dal vertice

0, che si prende per origine. Intendiamo al solito che i numeri reali si contino sulle rette orizzontali, ed i coefficienti di ramuno ($\sqrt{}$) sulle verticali.

Sia $\sqrt{2340}$ la data grandezza dell' intero $x+\xi\sqrt{}$, vale a dire debba risolversi la $x^2+\xi^2=2340$; noi decomporremo il dato numero nei suoi fattori primi $2.^2\ 3.^2\ 5.\ 13$; poscia osserveremo se tra loro vi fosse qualche numero primo-semplice (§. 37.) elevato a potenza di esponente dispari, poichè questo sarebbe certo indizio dell' impossibilità del problema. Decomporremo tutti i fattori primi-composti 2, 5, 13 nei loro fattori semplici $1\pm\sqrt{}$, $2\pm\sqrt{}$, $3\pm2\sqrt{}$, e tutte le soluzioni del problema saranno date da

$$x+\xi\sqrt{}=3(1\pm\sqrt{})(1\pm\sqrt{})(2\pm\sqrt{})(3\pm2\sqrt{})\Omega\ ,$$

dove in ciascun fattore si può prendere ad arbitrio un segno piuttosto che l' altro, ed $\Omega$ disegna una qualunque delle quattro unità $1, -1, \sqrt{}, -\sqrt{}$. Non è difficile riconoscere che le soluzioni essenzialmente differenti della $x^2+\xi^2=2340$ sono espresse da

$$x+\xi\sqrt{}=3.2(2+\sqrt{})(3\pm2\sqrt{}),\quad \text{e sono}\quad x=(24\ ,\ 48),\ \xi=(42,\ 6)$$

Il numero delle soluzioni è in generale

$$\frac{1}{2}(i_1+1)(i_2+1)(i_3+1)\ldots$$

essendo $i_1\ i_2\ldots$. gli esponenti dei fattori primi-composti 5, 13, 17, .... escluso il 2. Se tutti gli $i_1\ i_2\ldots$. sono pari, in questa formula si viene a contare per $\frac{1}{2}$ la soluzione, nella quale uno dei $x\ \xi$ è nullo e l' altro uguaglia la radice del numero proposto.

40. Quando $n$ è molto grande, la sua decomposizione in fattori col metodo del §. 38. riesce laboriosa. Per la risoluzione dell' equazione $x^2+\xi^2=n$ potrà servire il seguente processo: suppongo che $n$ non sia divisibile nè per 2 nè per 5, e che soddisfaccia alla condizione $n=4i+1$ necessaria per la possibilità della $x^2+\xi^2=n$. Cerco da prima se $n$ sia un quadrato perfetto, al qual effetto ricorro all' estrazione della radice soltanto nel caso che $n$ diviso per 99 dia (§. 38.) uno dei residui

0, 1, 4, 9, 16, 22, 25, 27, 31, 34, 36, 37,
45, 49, 55, 58, 64, 67, 70, 81, 82, 88, 91, 97,

giacchè altrimenti sarebbe impossibile che $n$ fosse un quadrato. — Dopo ciò opero analogamente al seguente esempio.

Proposto $n = 63529$, osservo che $n$ diviso per 40 lascia il residuo 9, e perciò gli sottro successivamente i numeri della progressione aritmetica 400, 1200, 2000, ..... (che sommati insieme danno un quadrato pari) ed esamino se qualcuno dei residui sia quadrato; al che molto mi giova il sapere che possono esser quadrati soltanto i numeri che divisi per 99 lasciano uno dei precedenti ventiquattro residui. A tal uopo nell' unito tipo di calcolo sono posti in una terza colonnetta i residui 66, 34, 34, .... rispetto a 99, che si hanno sottraendo successivamente dal primo residuo 70, di $n$ diviso per 99, i residui 4, 12, 20, .... Per tal maniera la sottrazione dei numeri 400, 1200, 2000 si fece complessivamente quando il residuo 34 dava speranza di ottenere un quadrato perfetto. L'estrazione di radice mostrò che nulladimeno tale non fu nè 59929 nè il successivo 49129 ottenuto colla sottrazione complessiva dei termini 2800, 3600, 4400, della nostra progressione. Poscia si trovò $15129 = 123^2$, e $5929 = 77^2$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 63529 | | 70 | 63529 | | 63529 | | |
| 400 | 4 | 66 | 64 | | 144 | | |
| 1200 | 12 | 54 | 720 | | 880 | | |
| 2000 | 20 | 34 | 1520 | | 1680 | | |
| 59929 | non è quadr. | | 61225 | non è q. | 60825 | non è q. | |
| 2800 | 28 | 6 | 2320 | | 2480 | | |
| 3600 | 36 | 69 | 3120 | | 3280 | | |
| 4400 | 44 | 25 | 3920 | | 4080 | | |
| 49129 | non è q. | | 4720 | | 4880 | | |
| 5200 | 52 | 72 | 5520 | | 5680 | | |
| 6000 | 60 | 12 | 41625 | non è q. | 40425 | non è q. | |
| 6800 | 68 | 43 | 39600 | | 40400 | | |
| 7600 | 76 | 66 | 2025 | $= (45)^2$ | 25 | $= 5^2$ | |
| 8400 | 84 | 81 | 59600 | | 60400 | | |
| $15129 = (123)^2$ | | | | | | | |
| 9200 | 92 | 88 | | | | | |
| $5929 = (77)^2$ | | | | | | | |
| 10000 | | | | | | | |

Compiuta questa prima serie di tentativi se ne fa una seconda sottraendo successivamente **64, 720, 1520, 2320,....** che dopo il primo termine formano una progressione aritmetica colla solita differenza **800**. Qui noteremo che i numeri quadrati che hanno per ultima cifra il **5** hanno per penultima il **2**; sicchè nel nostro caso scorgeremo l'inutilità di sottrarre il solo **64** o i due soli **64, 720**; e dopo dal **61225** (che non è quadrato) sottrerremo sempre cinque termini della progressione aritmetica; e siccome i cinque **2320,....5520** hanno la somma **19600**, così i cinque successivi avrebbero la somma **39600**, poscia i cinque successivi la somma **59600**, ecc.

Una operazione affatto analoga si fa in terzo luogo sottraendo successivamente **144, 880, 1680, 2480,....** L'impossibilità che **41625, 60825, 40425** sieno quadrati è fatta palese dalle ultime cifre dei loro prodotti per **4 : 100 1665, 2453, 1617.**

Se il residuo di $n$ diviso per **40** sia differente da quello che abbiamo supposto, differenti deggiono pur essere le serie di numeri da sottrarsi ad $n$. Ecco in *A*) *B*) *C*) *D*) le serie corrispondenti ai residui **9, 29, 1, 21**. Aggiunsi al di sotto di ciascun numero la radice corrispondente alla somma dei termini di quella serie, la qual radice (dopo il primo termine) supera di **10** la quarantesima parte del termine corrispondente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *A*) | 400, 1200, 2000....; | 64, 720, 1520,...; | 144, 880, 1680,... |
| | 20, 40, 60,... | 8, 28, 48,...; | 12, 32, 52,... |
| *B*) | 100, 800, 1600,...; | 4, 480, 1280,...; | 324, 1120, 1920,... |
| | 10. 30, 50,... | 2, 22, 42,...; | 18, 38, 58,... |
| *C*) | 400, 1200, 2000,...; | 16, 560, 1360....; | 256, 1040, 1840,... |
| | | 4, 24, 44....; | 16, 36, 56.... |
| *D*) | 100, 800, 1600,...; | 36, 640, 1440,...; | 196, 960, 1760.... |
| | | 6, 26, 46....; | 14, 34, 54,... |

Quando $n$ diviso per **40** dà uno dei residui **33, 13, 17, 37** deggiono adoperarsi le sole due ultime serie delle tre segnate rispettivamente con *A*) *B*) *C*) *D*).

Avendo trovato coi precedenti calcoli che il proposto numero

$$63529 = 123^2 + 220^2 = 77^2 + 240^2 = 45^2 + 248^2 = 5^2 + 252^2$$

può spartirsi in più maniere in due quadrati, ne dedurremo che esso non è primo; ed avremo facile modo per decomporlo nei suoi fattori primi-composti. In quanto ai fattori primi-semplici, essi si avrebbero cercando il massimo comun divisore di **123** e **220**. — Se $a^2+\alpha^2$ $b^2+\beta^2$ sieno due fattori di $n$, lo spartimento di questo in due quadrati si otterrà sia da

$$(a+\alpha\sqrt{\ })(b+\beta\sqrt{\ })=ab-\alpha\beta+(b\alpha+a\beta)\sqrt{\ },$$

sia da

$$(a+\alpha\sqrt{\ })(b-\beta\sqrt{\ })=ab+\alpha\beta+(b\alpha-a\beta)\sqrt{\ },$$

Perciò dai due spartimenti $n=77^2+240^2=123^2+220^2$ dedurremo

$$ab-\alpha\beta=77\,,\quad ab+\alpha\beta=123\,,\quad b\alpha+a\beta=240\,,\quad b\alpha-a\beta=220\,,$$

da cui

$$ab=100\,,\quad \alpha\beta=23\,,\quad b\alpha=230\,,\quad a\beta=10\,.$$

Queste equazioni, quantunque sieno in sostanza tre sole, pure sono sufficienti a determinare i quattro interi $a=10$, $\alpha=23$, $b=10$, $\beta=1$; sicchè $n$ avrà i fattori $10+23\sqrt{\ }$, $10+\sqrt{\ }$.
Confrontando $n=123^2+220^2$ con ciascuno degli altri due spartimenti $45^2+248^2=3^2+252^2$ si trovano i fattori $14+39\sqrt{\ }$, $6+\sqrt{\ }$; $16+39\sqrt{\ }$, $4+\sqrt{\ }$. Da ciò risultano i tre fattori primi-composti del proposto $n$ **101, 37, 17.**

*Ogni numero che può spartirsi in una sola maniera nella somma di due quadrati è un numero primo, purchè i due quadrati non abbiano qualche divisor comune.* Può servire di esempio il numero **102001**, che mediante le tre serie *C*) si spartisce solamente nei due quadrati $(249)^2+(200)^2$, i quali non hanno alcun divisor comune, sicchè il numero proposto è primo.

**41.** Applicando il precedente metodo ad $n=128633$ si riconosce l'impossibilità di spartirlo in due quadrati, perciò esso non è un numero primo-composto; e non può nemmeno essere un numero primo-semplice, perchè diviso per **4** lascia il residuo **1**; dunque sarà certamente divisibile in fattori. Per eseguirne la decomposizione, se sia troppo lungo il processo del §. **38.**, porremo $x^2=n+z^2$, e som-

mando ad $n$ (che diviso per 40 lascia il residuo 33) i termini delle due ultime serie $C$) ci arresteremo quando giungeremo ad ottenere un quadrato $x^2$. Così nel nostro esempio

| | | |
|---|---|---|
| 128633 | | 32 |
| 16 | 16 | 48 |
| 560 | 65 | 14 |
| 1360 | 73 | 87 |
| 2160 | 81 | 69 |
| 2960 | 89 | 59 |
| 3760 | 97 | 57 |
| 4560 | 6 | 63 |
| 5360 | 14 | 77 |
| 6160 | 22 | 0 |
| 155529 | non è q. | |

| | | |
|---|---|---|
| 128633 | | 32 |
| 256 | 58 | 90 |
| 1040 | 50 | 41 |
| 1840 | 58 | 0 |
| 131769 | $=(363)^2$ | |

si trova $363^2 = n + 56^2$, e perciò $n$ ha i due fattori $x \pm z = 419, 307$. Protraendo i tentativi fino a 155529 che darebbe all'incirca $x = 394$, e $z = 10 + \frac{6160}{40} = 164$, si è certi di aver trovati tutti i divisori tra 250 e 538. Non volendo prolungare di più questi tentativi, bisognerebbe cercare direttamente (§. 38.) i divisori di $n$ minori di 250. — Secondo che $n$ diviso per 40 dà uno dei residui 1, 21, 9, 29 oppure uno dei 17, 37, 33, 13 gli si sommeranno rispettivamente le tre serie $A$), $B$), $C$), $D$) oppure le sole due ultime fra le $A$), $B$), $C$), $D$).

42. Questa maniera di risolvere l' equazione indeterminata $x^2 = z^2 + n$ può servire a trovare i fattori anche dei numeri che divisi per 4 danno il residuo 3. Vogliasi per esempio riconoscere se $2.3.5.7.11.13+1=30031$ sia un numero primo; si ponga $n = 30031$, perlochè il residuo di $n$ diviso per 40 sarà 9, e quindi gli dovremo sommare le tre serie $C$). Siccome i primi termini darebbero somme negative, così cominceremo le tre colonne di calcolo coi quadrati $180^2 = 32400$, $184^2 = 33856$, $176^2 = 30976$, che in ciascuna serie sono immediatamente superiori a 30031.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 30031 | | 65 | — 30031 | | — 30031 | | |
| 32400 | 27 | 92 | 33856 | | 30976 | | |
| 2369 | | | 3825 | non è q. | 945 | non è q. | |
| 7600 | 76 | 69 | 7760 | | 7440 | | |
| 8400 | 84 | 54 | 8560 | | 8240 | | |
| 9200 | 92 | 47 | 9360 | | 16625 | non è q. | |
| 10000 | 1 | 48 | 10160 | | 9040 | | |
| 10800 | 9 | 57 | 10960 | | 9840 | | |
| 11600 | 17 | 74 | 50625 | $=(225)^2$ | 10640 | | |
| 12400 | 25 | 0 | 66800 | | 11440 | | |
| 72369 | non è q. | | 117425 | non è q. | 12240 | | |
| 13200 | 33 | 33 | 86800 | | 69825 | non è q. | |
| 14000 | 41 | 74 | 204225 | non è q. | 73200 | | |
| 14800 | 49 | 24 | | | 143025 | non è q. | |
| 15600 | 57 | 81 | | | | | |
| 129969 | non è q. | | | | | | |

Abbiamo arrestata la prima colonna a **129969** che corrisponde a $z = 400$, ed $x$ circa $= 361$; bisogna adunque assicurarsi direttamente che il proposto numero non abbia alcun divisore minore di $z - x = 39$. L'unica soluzione dell'assunta equazione $x^2 = z^2 - n$ è $x = 225$, $z = 284$, perciò il proposto numero ha i due soli fattori, $z - x = 59$, $z + x = 509$.

43. Due numeri si dicono *primi tra di loro* quando niun numero, eccettuata l'unità, è divisore di entrambe; e due interi si diranno *senza divisor comune* quando niun intero, eccettuate le unità, è divisore d'entrambe. Il supremo comun divisore di due immaginarii si trova facilmente mediante il massimo comun divisore delle seconde potenze delle loro grandezze. Tutti gli interi $D$ che sono senza divisor comune con un dato $Q$ formano alquante serie a doppia entrata, per ognuna delle quali si ha $D = B + QI$, dove $I$ è un intero affatto arbitrario, e $B$ è un intero non superiore a $\frac{1}{\sqrt{2}} Q$. — Il numero di tutte queste serie è

$$\mathrm{gr}^2 Q \left(1 - \frac{1}{\mathrm{gr}^2 Q'}\right) \left(1 - \frac{1}{\mathrm{gr}^2 Q''}\right) \ldots$$

essendo $Q = Q'^{\alpha} Q''^{\beta} \ldots$ decomposto nei suoi differenti fattori semplici $Q'$, $Q'' \ldots$. Quando $Q$ è semplice tal numero è $gr^{3} Q - 1$. Le predette serie possono (eccettuati i casi di $Q=(1+\sqrt{-})\Omega$, $Q=2\Omega$) riunirsi a quattro a quattro in guisa che risultino da una serie moltiplicata per una delle quattro unità.

Il numero degli interi semplici inferiori al numero molto grande $n$, vale a dire il numero dei punti, che esprimono degli interi semplici, e che sono compresi dentro il circolo, che ha il centro nell' origine ed il raggio $= n$, è approssimatamente espresso da

$$\frac{2n}{\mathrm{Log}\, n - 2c} + \frac{2n^{2}}{\mathrm{Log}\, n - c} .$$

con Log indicandosi i logaritmi naturali, ed essendo $2c = 1{,}08366$.

44. Vogliansi determinare gli interi $X$ $Y$ che soddisfanno all' equazione

$$NY + QX = A$$

Posto $Y = IX + X_{1}$ si ha $(IN+Q)X + NX_{1} = A$,

e si potrà scegliere $I$ in guisa che $IN+Q=N_{1}$ sia inferiore non solo ad $N$, ma anche a $N:\sqrt{2}$. Si continuerà mediante simili sostituzioni $I_{1}N_{1}+N=N_{2}$, ec. ad ottenere le trasformate $N_{2}X_{1}+N_{1}X_{2}=A$, ec., finchè si giunga ad una $MX_{i-1}+N_{i-1}X_{i}=A$, nella quale sia $I_{i}M+N_{i-1}=0$. Allora se $M$, che è divisore di $N_{i-1}$ non lo sia anche di $A$, sarà impossibile soddisfare alla proposta equazione: che se invece $M$ sia divisore di $A$ calcoleremo gli interi

$$A:M = X_{i-1}, \quad I_{i-1}X_{i-1} = X_{i-2}, \quad I_{i-2}X_{i-2} + X_{i-1} = X_{i-3}, \ldots .$$
$$I_{1}X_{1} + X_{2} = X, \quad IX + X_{1} = Y,$$

ed avremo così trovati due valori di $X$ e di $Y$ soddisfacenti alla data equazione. Le altre soluzioni si avranno aggiungendo ad $X$ ed $Y$ i prodotti di uno stesso intero qualsivoglia per $N:M$ e per $-Q:M$.

Il calcolo potrà disporsi come si vede nel seguente esempio relativo alla

$$(47 + 15\sqrt{-})Y - (218 + 184\sqrt{-})X = 2 .$$

I quozienti $-I$, $-I_{1} \ldots$ si trovano mediante alcune regole pratiche

(§. 35.) più facili da immaginare che da descrivere. D'altronde se pur qualche volta non si adoperasse il quoziente più opportuno, ciò non farebbe che allungare alcun poco il calcolo.

Colla cifra 5 del quoziente $I$ di $218+184V$ diviso per $47+15V$ si moltiplica $47+15V$, e sommando con $-218-184V$ si ottiene $17-109V$, a cui si somma anche il prodotto di $47+15V$ per l'altra parte $2V$ di $I$. La somma $-13-15V$ diviene il divisore di $47+15V$. Si continua in ugual modo fino ad avere un residuo nullo

| | | |
|---|---|---|
| | $47+15V$ | $-218-184V$ |
| $I=5+2V$ | | $235+75V$ |
| | | $17-109V$ |
| | | $-30+94V$ |
| | $-13-15V$ | $47+15V$ |
| $I_1=2-V$ | | $-26-30V$ |
| | | $21-15V$ |
| | | $-15+13V$ |
| | $6-2V$ | $-13-15V$ |
| $I_2=3V+1$ | | $6+18V$ |
| | | $-7+3V$ |
| | | $6-2V$ |
| | $-1+V$ | $6-2V$ |
| $I_3=4+2V$ | | $-4+4V$ |
| | | $2+2V$ |
| | | $-2-2V$ |
| | $0\quad 0$ | |

(*B*)

| | | |
|---|---|---|
| | $47+15V$ | $-218-184V$ |
| $5+2V$ | $47+15V$ | $17-109V$ |
| $2-V$ | $-13-15V$ | $21-15V$ |
| $3V+1$ | $6-2V$ | $-7+3V$ |
| $4+2V$ | $-1+V$ | $2+2V$ |
| | $0\quad 0$ | |

Facendo a memoria le moltipliche insieme colle somme o colle sottre si può semplificare il precedente dettaglio di calcolo come si vede in (*B*).

L'ultimo divisore $-1+V$ per tal guisa ottenuto divide esattamente il secondo membro 2 della proposta equazione (senza di che

essa sarebbe impossibile) e dà il quoziente $X_2 = -1 - \nu$, il quale mediante i trovati $I_2$ $I_1$ $I$ conduce ai cercati valori delle incognite $X$ $Y$

$$A : M = -1 - \nu = X_2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $I_2 = 1 + 3\nu$ | $-1 - \nu$ | | |
| | $3 - 3\nu$ | | |
| | $-1 - \nu$ | $I_2 X_2$ | $= 2 - 4\nu = X_1$ |
| $I_1 = 2 - \nu$ | $4 - 8\nu$ | | |
| | $-4 - 2\nu$ | | |
| | $2 - 4\nu$ | $X_2 + I_1 X_1$ | $= -1 - 11\nu = X$ |
| $I = 5 + 2\nu$ | $-5 - 55\nu$ | | |
| | $22 - 2\nu$ | $X_1 + IX$ | $= 19 - 61\nu = Y$ |

Prendiamo, per altro esempio, a determinare con quanti salti il cavallo dello scacchiere possa passare da una casa, o scacco, ad un altra che le sia discosta della retta rappresentata dall' immaginario $A$. Ogni salto del cavallo è espresso da $(1 \pm 2\nu)\,\Omega$; perciò avremo da risolvere l' equazione $(1 - 2\nu)\,Y + (1 + 2\nu)\,X = A$, la quale ci dà $X = (1 - \nu)\,A$, $Y = -\nu\,A$; potendosi inoltre aggiungere ad $X$ un qualunque $(-1 + 2\nu)\,L$, purchè ad $Y$ si aggiunga $(1 + 2\nu)\,L$. Così se $A = 8 + 3\nu$ sarà

$$X = 11 - l - 2\lambda + (-5 + 2l - \lambda)\nu = x + \xi\nu$$

$$Y = 3 + l - 2\lambda + (-8 + 2l + \lambda)\nu = y + \eta\nu\,.$$

Il numero dei salti per passare da una casa all' altra è la somma delle grandezze dei $x$ $\xi$ $y$ $\eta$: essa è minima per $X = 2 - 2\nu$, $Y = \nu$, o per $X = 1$, $Y = 1 + 3\nu$; cioè in due modi essenzialmente differenti il cavallo può passare in 5 salti da una casa ad un'altra che ne sia discosta di $8 + 3\nu$.

45. Si dice che due interi sono *congruenti* rispetto ad un dato *modulo* quando la loro differenza divisa pel modulo non lascia alcun residuo. Le *congruenze* saranno da noi segnate scrivendo il modulo al di sotto del segno d' eguaglianza; oppure mediante il segno $\equiv$, allorchè riesca facile intendere qual sia il modulo a cui si riferiscono

le congruenze. Così $12 \underset{7}{=} 5$, e $93 \equiv 2$, vale a dire 12 è congruente a 5 rispetto al modulo 7, e 93 è congruente a 2 rispetto al modulo scritto poco prima.

La congruenza del primo grado $N Y \underset{Q}{=} A$ non è altra cosa che l' equazione già risolta $N Y + Q X = A$ ; nulladimeno per l' analogia che passa tra questa soluzione, ed altra di cui tratteremo in seguito, gioverà mostrare quali semplificazioni si possano portare a tale congruenza, nella supposizione che non si sapesse eseguire sull' intero $A$ alcuna divisione. Decomposti $N$ e $Q$ nei loro fattori semplici, sarà facile vedere qual ne sia il supremo comun divisore $M$, e la proposta congruenza non sarà possibile, se non se in quanto $A$ sia divisibile per $M$, e perciò sia verificata la congruenza

$$\frac{Q}{M} A \underset{Q}{=} 0$$

Inoltre se prenderemo per $L$ il prodotto di tutti i fattori semplici di $M$, che sono anche divisori di $Q : M$, saranno $Q : M$, $N : L$ privi di divisore comune, perciò sarà sempre possibile prendere per $\Pi$ $\Phi$ due interi che soddisfacciano all' equazione

$$\frac{N}{L} \Pi - \frac{Q}{M} \Phi = 1 .$$

Moltiplicando questa equazione per $A$ avremo, a motivo della

$$\frac{Q}{M} A \equiv 0 , \qquad \frac{N}{L} \Pi A \underset{Q}{=} A$$

e sostituendo nella $N Y \equiv A$ ci ridurremo alla congruenza

$$L Y \equiv \Pi A ,$$

che è più semplice della proposta ogni qualvolta sia $L$ inferiore ad $N$, il che sarà sempre tranne nel caso che tutti i fattori semplici di $N$ fossero compresi almeno una volta di più in $Q$ .

Non credo possibile alcuna ulteriore riduzione, finchè si supponga che $A$ abbia il più generale valore che rende possibile la $N Y \equiv A$ :

ma se $A$ sia tale che non solo $\frac{Q}{M} A \equiv 0$, ma anche $\frac{Q}{MM'} A \equiv 0$, dove $M$ contenga alcuno dei fattori di $L$, sicchè esista un intero $L'$ inferiore ad $L$ tale che $Q : MM'$, $L : L'$ non abbiano alcun divisore comune, si potrà soddisfare alla $\frac{L}{L'} \Pi' - \frac{Q}{MM'} \Phi' = 1$, e poscia si avrà

$$L' Y \underset{Q}{=} \Pi' \Pi A \ .$$

Abbiasi per esempio la congruenza

$$360\, Y \underset{624}{=} A$$

sarà $M = 24$, $L = 8$; e la proposta congruenza sarà possibile soltanto quando $26\, A$ sia divisibile per $624$; dopo di che siccome la $43\, \Pi - 26\, \Phi = 1$ dà $\Pi = 11$, così avremo $3\, Y \equiv 11\, A$ .

Generalmente parlando non sarà possibile alcuna ulteriore riduzione di questa congruenza. Ma se il valore di $A$ sia tale che anche $13\, A$ sia divisibile per $624$ sarà $M' = 2$; allora perchè $Q : MM' = 13$, ed $L \cdot L' = 8 : L'$ non abbiamo alcun divisore comune basta prendere $L' = 1$; sicchè soddisfatta la $8\Pi' - 13\Phi' = 1$, che dà $\Pi' = 5$, otterremo senza bisogno di alcuna divisione $Y \equiv 55\, A$. Questo è uno dei valori di $Y$, gli altri si hanno sommandovi un multiplo di $Q : M = 26$. Così se $A = 144$ si trova $Y = 432,\ 16$, ec.

46. Le precedenti considerazioni potranno servire a trovare, senza eseguire sopra $A$ alcuna divisione, una soluzione della

$$M Y \underset{Q}{=} A$$

essendo $M$ divisore di $Q$. Trovata poi una soluzione basta sommarla con tutte le soluzioni della $M Y \underset{Q}{=} 0$ per avere tutte le altre. Queste ultime soluzioni sono quelle della $M T \underset{M}{=} 0$ moltiplicate per $Q : M$; ed i valori di $T$ sono tutti gli interi. Si considerano come formanti una sola soluzione tutti gl' interi congruenti rispetto al modulo $M$.

Sarà opportuno chiamare *soluzioni primitive* i valori di $T$, che non hanno alcun divisore comune con $M$; il numero di tali soluzioni pri-

mitive fu dato nel §. 43. Una soluzione primitiva moltiplicata successivamente per tutte le soluzioni primitive riproduce le medesime soluzioni primitive.

Se $M = 4 + 3\sqrt{} = (2 - \sqrt{})^3 \sqrt{}$ la $MT \underset{M}{=} 0$ ha le venti soluzioni primitive espresse da

$$(1,\ 1+\sqrt{},\ 2,\ 2+\sqrt{},\ 3)\,\Omega$$

disegnandosi con $\Omega$ una qualunque delle quattro unità; le altre cinque soluzioni non primitive sono $0$ , $(2-\sqrt{})\,\Omega$ .

Per altro esempio, se

$$M = 5 + \sqrt{} = (1 + \sqrt{})\,(3 - 2\sqrt{})$$

le dodici soluzioni primitive sono

$$(1\ ,\ 2+\sqrt{}\ ,\ 2-\sqrt{})\,\Omega$$

e le quattordici non primitive sono

$$0\ ,\ (1+\sqrt{},\ 2,\ 2+2\sqrt{})\,\Omega,\ 2+3\sqrt{}\ .$$

Considerando i soli interi reali, la congruenza $10\,t \underset{10}{=} 0$ ha le quattro soluzioni primitive $\pm(1, 3)$, e le sei non primitive $0$, $5$, $\pm(2, 4)$.

47. Se il modulo $M$ è semplice tutte le soluzioni della $MT \underset{M}{=} 0$ sono primitive, eccettuata la sola $T = 0$: il numero delle primitive è perciò $\mathrm{gr}^2 M - 1$ . Pel modulo $M^\alpha$ essendo $M$ semplice si hanno (§. 43.) $\mathrm{gr}^{2\alpha-2} M\,(\mathrm{gr}^2 M - 1)$ soluzioni primitive, le quali sono congruenti rispetto al modulo $M$ con quelle spettanti al modulo $M$. Che se $M = M_1 M_2$ essendo $M_1$ $M_2$ senza divisor comune; e sieno $S_1$ $S_2$ soluzioni primitive delle $M_1 T \underset{M_1}{=} 0$, $M_2 T \underset{M_2}{=} 0$; i prodotti $M_2 S_1$ $M_1 S_2$ saranno soluzioni primitive delle $M_1 T \underset{M}{=} 0$, $M_2 T \underset{M}{=} 0$, ed $S = M_2 S_1 + M_1 S_2$ sarà una soluzione primitiva della $MT \underset{M}{=} 0$.

Queste conclusioni, di cui per brevità ommetto le facili dimostrazioni, servono a trovare gl' interi che non hanno alcun divisore comune con un dato $M$; le ho qui indicate a motivo dell' analogia che hanno colle regole per trovare le radici primitive delle congruenze.

Aggiungiamo un esempio relativo a soli interi reali. Si cercano le soluzioni primitive pel modulo 360. Quelle pei moduli semplici 2, 3, 5 sono tutti i numeri interi 1; 1, 2; 1, 2, 3, 4: e perciò pei moduli 8; 9 sono 1, 3, 5, 7; 1, 2, 4, 5, 7, 8. Finalmente pel modulo 360 sono le 96 soluzioni

$$45\,(1,3,5,7)+40\,(1,2,4,5,7,8)+72\,(1,2,3,4)=157,229,301,13:$$
$$197,269,341,53;\ 277\ldots\ldots;\ 347,59,131,203.$$

Nel primo esempio del §. 46. le soluzioni relative al modulo semplice $2-\sqrt{\ }$ sono tutti gli interi; questi sono congruenti ai quattro $1, \sqrt{\ }, 2\sqrt{\ }, 1+\sqrt{\ }$, oppure ai quattro $1, -1, \sqrt{\ }, -\sqrt{\ }$, che noi rappresentiamo colla lettera $\Omega$. Aggiungendo a ciascuno di essi il modulo $2-\sqrt{\ }$ si hanno le altre soluzioni primitive $3-\sqrt{\ }$, $1-\sqrt{\ }$, 2, $2-2\sqrt{\ }$. Esse sono congruenti rispetto al modulo $4+3\sqrt{\ }$ colle $3\sqrt{\ }$, $1-\sqrt{\ }$, 2, $-1+2\sqrt{\ }$, che deggiono poi moltiplicarsi per ciascuna delle quattro unità.

Nel secondo esempio le soluzioni rispetto al modulo semplice $3-2\sqrt{\ }$ sono $(1, 2, 1+\sqrt{\ })\Omega$, che moltiplicate per $1+\sqrt{\ }$ poscia sommatovi $3-2\sqrt{\ }$ danno le soluzioni primitive pel modulo $5+\sqrt{\ }$ espresse da $(1, 2\pm\sqrt{\ })\Omega$.

48. Se una congruenza

$$X^n + AX^{n-1} + \ldots\ldots \underset{P}{=} 0$$

è soddisfatta da $X = R$ si dice che $R$ ne è una *radice:* tutti gl'interi congruenti ad $R$ soddisfanno egualmente alla proposta congruenza; essi si considerano come formanti una sola radice, vale a dire si pone $X \underset{P}{=} R$. È palese che sono due cose tra loro necessariamente legate, che la congruenza ammetta la radice $R$, e che il primo membro sia divisibile per $X-R$, cioè possa scriversi $(X-R)(X^{n-1}+\text{ec.}) \underset{P}{=} 0$.

Ne viene che quando il modulo $P$ è semplice la congruenza è soddisfatta soltanto da $X=R$, e dalle radici della $X^{n-1}+\text{ec.} \equiv 0$; perciò il numero delle radici non può superare il grado $n$. In opposizione poi di quanto avviene per le equazioni, le congruenze, anche tenendo

conto delle radici immaginarie, ne possono avere un numero minore del grado.

Servano di esempii la congruenza $X^3+2X-1 \underset{7}{=} 0$ che ammette le radici $X \equiv 2, 3$, ed è perciò decomponibile in $(X-2)(X-3) \equiv 0$: la congruenza $X^3+5X+2 \underset{7}{=} 0$ che non ammette radici reali bensì le due immaginarie $X \equiv 1 \pm \sqrt{}$ : e le congruenze

$$X^3+1+2\sqrt{} \underset{7}{=} 0\,, \qquad X^3+X^2+2X+4 \underset{7}{=} 0$$

che sono affatto prive di radici.

Le stesse cose possono dirsi delle congruenze relative ai numeri reali; ma se il modulo sia primo-composto la congruenza potrà avere più radici del suo grado quando si considerano anche gl' immaginarii; così la $x^2-4x-5 \underset{13}{=} 0$ ha le due sole radici $x \equiv 5, 12$, ma la $X^2-4X-5 \underset{13}{=} 0$ ha inoltre le radici immaginarie $X \equiv 2 \pm 2\sqrt{}$ ; ed infatti il primo membro è congruente tanto a $(X-5)(X+1)$ quanto a $(X-2-2\sqrt{})(X-2+2\sqrt{})$ .

49. È facile intendere che sulle congruenze possono farsi quelle riduzioni e quelle trasformazioni che si eseguiscono sulle equazioni, e che giovano alla loro risoluzione; solamente perchè le formule finali possano riuscir utili bisognerà saper eseguire le operazioni aritmetiche, che sono nel calcolo delle congruenze ciò che sono le estrazioni di radice nel calcolo delle equazioni: di ciò parleremo in seguito, e vedremo come tali operazioni si rendano facilissime mediante tavole analoghe a quelle dei logaritmi. È pur palese che nelle congruenze che sono a modulo semplice, e che inoltre hanno tante radici quant' è il loro grado, i coefficienti sono esprimibili mediante le note funzioni simmetriche delle radici.

50. Il modulo può essere o un numero semplice, od un immaginario semplice, il quale moltiplicato pel suo *conjugato* dà un numero primo-composto: in questo secondo caso la congruenza può sempre ridursi a soli numeri reali. Infatti se il modulo semplice sia $P=p+\pi\sqrt{}$, noi potremo determinare i numeri $m$ $\mu$ in guisa che $m\pi+\mu p=1$ ;

dopo di che se la proposta congruenza ammetta la radice $X \underset{p}{=} x + \xi \nu$, questa radice sarà anche

$$X \equiv x + \xi \nu - (m + \mu \nu)(p + \pi \nu)\xi \equiv x - mp\xi + \mu\pi\xi ,$$

cioè sarà riducibile ad un numero reale. Ne viene che se sia data la congruenza a modulo semplice immaginario $X^n + AX^{n-1} + \ldots \underset{p}{=} 0$, essa potrà esprimersi con

$$x^n + Ax^{n-1} + \ldots = (p + \pi\nu) I$$

dove l' incognita $x$ indica un numero reale, ed $I$ è un intero qualunque: moltiplicando per $p - \pi\nu$ si ha

$$(p - \pi\nu)x^n + (p - \pi\nu)Ax^{n-1} + \ldots = (p^2 + \pi^2) I$$

la quale si separerà in due

$$px^n + fx^{n-1} + \ldots = (p^2 + \pi^2) i , \quad \pi x^n + gx^{n-1} + \ldots = (p^2 + \pi^2) l ,$$

che necessariamente dovranno insieme accordarsi, e daranno quindi per determinare $x$ una congruenza fra soli numeri reali della forma

$$x^n + ax^{n-1} + \ldots \underset{p^2+\pi^2}{=} 0 ,$$

dove il modulo $p^2 + \pi^2$ è un numero primo $\underset{4}{=} 1$ .

Vogliasi per esempio risolvere la congruenza

$$X^3 + 2X^2 + (1 + \nu)X + 1 - \nu \underset{2+\nu}{=} 0 .$$

Si supponga che $X$ sia un numero reale; la congruenza moltiplicata per $2 - \nu$ si decompone nelle due

$$2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \underset{5}{=} 0 , \qquad x^3 + 2x^2 - x + 3 \underset{5}{=} 0$$

che necessariamente sono identiche. Ponendovi $x = 1$ si riconosce che questa ne è una radice; divisa la congruenza per $x - 1$ si ha $x^2 + 3x + 2 \underset{5}{=} 0$ ossia $(x - 1)^2 \equiv 4$, che dà $x = 3, 4$. Queste radici 1, 3, 4 appartengono anche alla proposta congruenza: col modulo $2 + \nu$ possono ridursi alle loro congruenti $1$, $\nu$, $1 + \nu$ .

Nel caso che il modulo sia un numero primo-semplice non credo

che possa effettuarsi una simile riduzione dal calcolo degli immaginarii a quello dei soli numeri reali.

51. Prima di trattare della risoluzione delle congruenze, esporremo alcune proprietà delle più semplici

$$X^n \underset{P}{=} 1 \ ;$$

il modulo $P$ è o un numero primo-semplice 3, 7, 11, ec., od un intero semplice $1 \pm 2\sqrt{}$, $3 \pm 2\sqrt{}$, $1 \pm 4\sqrt{}$, ec., la cui grandezza ha la seconda potenza eguale ad un numero primo-composto 5, 13, 17, ec. Supporremo sempre che sia $q = \mathrm{gr}^2 P - 1$, vale a dire nei casi predetti $q = 8, 48, 120 \ldots\ldots 4, 12, 16, \ldots\ldots$

La congruenza $$X^q \underset{P}{=} 1$$

non ha la radice $X \equiv 0$; tutti gli altri interi non congruenti rispetto al modulo $P$ sono appunto (§. 43.) in numero $q$, dico che essi tutti sono radici della congruenza $X^q \equiv 1$, vale a dire che essa ha il massimo possibile numero di radici tutte disuguali. Infatti se $I$ sia un intero qualunque non congruente collo zero (s' intenda sempre rispetto al modulo $P$) ed $A$ sia un altro di questi interi non $\equiv 0$, ve ne sarà (§. 44.) sempre un altro $B$ tale che $AB \equiv I$; perciò tutti i suddetti $q$ interi si distribuiscono in $\frac{q}{2}$ paia che danno il prodotto $\equiv I$, oppure in $\frac{q}{2} - 1$ paia, gli altri due interi corrispondendo a se medesimi; e ciò secondo che la congruenza $A^2 \equiv I$ è priva di radici, o ne ha due $A$, $P - A$ (nel primo caso si dice che $I$ è *non-residuo quadratico*, nel secondo che $I$ è *residuo quadratico*). Il prodotto di tutti i $q$ interi (non escluso $I$) è nel primo caso $\equiv I^{\frac{q}{2}}$, nel secondo

$$\equiv I^{\frac{q}{2}-1} A(P-A) \equiv -I^{\frac{q}{2}} \ ;$$

in ambedue i casi la seconda potenza di tal prodotto è $\equiv I^q$. Ora se per $I$ si prenda una qualunque delle quattro unità si ha $I^q \equiv 1$ (giacchè $q$ è divisibile per 4); dunque la suddetta seconda potenza del pro-

dotto, e perciò anche $I^q$ è costantemente $\equiv 1$; vale a dire: *la* $X^q \equiv 1$ *ha per radici i* $q$ *interi non congruenti al modulo semplice* $P$.

**52.** Dimostrato che la $X^q - 1 \underset{P}{=} 0$ ha $q$ radici, la teoria delle funzioni simmetriche (§. **16. 49.**) mostra che il loro prodotto è sempre $\equiv -1$; la loro somma, e le somme dei prodotti di tali radici prese a **2** a **2**, a **3** a **3** . . . . a $q-1$ a $q-1$, sono tutte $\equiv 0$. Decomponendo la congruenza nelle due

$$X^{\frac{q}{2}} + 1 \equiv 0\,, \qquad X^{\frac{q}{2}} - 1 \equiv 0$$

ognuna di esse ha $q:2$ radici disuguali; quelle della prima sono i non-residui quadratici, quelle della seconda i residui quadratici; il prodotto dei primi è $\equiv 1$, quello dei residui è $\equiv -1$; le loro somme sono separatamente $\equiv 0$, ec.

Quando $P = p$ è numero primo-semplice sono residui quadratici le quattro unità; così per $p = 3$ esse sole sono i quattro residui, ed i quattro non residui sono $(1 + \sqrt{\ })\,\Omega$: (indicando al solito con $\Omega$ una qualunque delle quattro unità); e per $p = 7$ sono residui

$$(1,\ 2,\ 3,\ 1+\sqrt{\ },\ 2+2\sqrt{\ },\ 3+3\sqrt{\ })\,\Omega$$

sono non-residui

$$(2\pm\sqrt{\ },\ 3\pm\sqrt{\ },\ 3\pm 2\sqrt{\ })\,\Omega\,.$$

Quando $P$ è immaginario semplice, $\frac{q}{4}$ è dispari, perciò le due unità $\pm\sqrt{\ }$ sono non-residui; così per $P = 3 + 2\sqrt{\ }$ si hanno i sei residui

$$\pm(1,\ 2\sqrt{\ },\ 1-\sqrt{\ }),\quad \text{ed i sei non-residui}\quad \pm(\sqrt{\ },\ 2,\ 1+\sqrt{\ })\,.$$

**53.** Se $m$ è un divisore di $q$, osservando che

$$X^q - 1 = (X^m - 1)\,(X^{q-m} + X^{q-2m} + \ldots) \underset{P}{=} 0$$

si vede (§. **48.**) che la $X^m - 1 \equiv 0$ ammette $m$ radici, vale a dire tra i $q$ interi ve ne sono $m$ che danno l' unità elevandoli soltanto alla potenza $m.^{\text{esima}}$. Sia $G$ un intero che non renda $G^m \equiv 1$, e sia $m = q:q_i$, essendo $q_i$ uno dei numeri primi divisori di $q$; posto $G^{q:q_i^\alpha} \equiv H_i$,

dove $q_1^\alpha$ è la massima potenza di $q_1$ compresa in $q$, sarà $H_1$ una radice della $X^{q_1^\alpha} \equiv 1$, e niuna potenza di $H_1$ inferiore a $q_1^\alpha$ sarà congruente ad 1; in tal caso si dice che $H_1$ è una *radice primitiva* della congruenza $X^{q_1^\alpha} \equiv 1$. Così pure per lo stesso modulo $P$ avremo le radici primitive $H_2\ H_3 \ldots$. relative agli esponenti $q_2^\beta\ q_3^\gamma \ldots$., essendo $q = q_1^\alpha\, q_2^\beta\, q_3^\gamma \ldots$. Ora il prodotto $H_1\, H_2\, H_3 \ldots$. sarà una radice primitiva relativa al massimo esponente $q$; poichè se qualche potenza di $H_1\, H_2 \ldots$. fosse $\equiv 1$, l'esponente o sarebbe o potrebbe ridursi divisore di $q$; ma se tal esponente sia per esempio $m = q : q_1$, si ha $H_2^m \equiv 1$, $H_3^m \equiv 1$, ..... ed $H_1^m$ non è $\equiv 1$, perchè $q_1^\alpha$ non può esser divisore di $m$.

54. Sia $R$ una radice primitiva della

$$X^q \underset{P}{=} 1$$

la quale si dirà *radice primitiva rispetto al modulo P*; le potenze $R$. $R^2$, $R^3$, .... $R^q \equiv 1$ saranno tutti interi differenti. Perciò ogni intero $X$ è congruente ad una qualche potenza dell'assunta radice primitiva; sicchè posto $X \equiv R^y$ potremo dire che il numero intero $y$ è il *logaritmo* dell'intero $X$, essendo $R$ la base di questa sorta di logaritmi; sempre già s'intende rispetto al modulo $P$. (La parola *modulo* ha qui significato affatto differente da quello che prende nella teoria dei logaritmi).

Questa relazione $X \underset{P}{=} R^y$ mostra la stretta relazione che passa tra le congruenze $X^q \underset{P}{=} 1$, $X^m \underset{P}{=} 1$, ec. e le congruenze tra soli numeri $q\,y \underset{q}{=} 0$, $m\,y \underset{q}{=} 0$, ec. delle quali implicitamente abbiamo trattato nei §. 45. 46. 47. Così vedremo che il numero delle *radici primitive* della $X^m \underset{P}{=} 1$, ossia delle *soluzioni primitive* della $m\,y \underset{q}{=} 0$

è $$m\left(1 - \frac{1}{m_1}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \ldots .$$

essendo $m_1\ m_2 \ldots$. tutti i numeri primi differenti che sono divisori di $m$.

Se $y_1$, $y_2$.... sono soluzioni primitive delle

$$q_1^{\alpha} y \underset{q}{=} 0 \ , \quad q_2^{\beta} y \underset{q}{=} 0 \ , \ldots . \ ; \quad y = y_1 + y_2 + \ldots .$$

è soluzione primitiva della $q y \underset{q}{=} 0$. Prendendo a caso il numero $g$, e ponendo $h_1 \underset{q}{=} \frac{q}{q_1^{\alpha}} g$ avremo la probabilità $1 - \frac{1}{q_1}$ che $h_1$ sia una soluzione primitiva della $q_1^{\alpha} y \underset{q}{=} 0$, il che sarà per certo se nè $h_1$ nè $q_1^{\alpha-1} h_1$ sia $\underset{q}{=} 0$. Operando in simil guisa si otterrà una radice primitiva della $X^q \underset{p}{=} 1$, molto più presto di quello che se si andassero escludendo successivamente tutti gli interi che sono congruenti a qualche potenza 2.ª, 3.ª, ec. Trovata una radice primitiva, tutte le altre si hanno elevandola alle potenze i cui esponenti $y$ sono soluzioni primitive della $q y \underset{q}{=} 0$, cioè sono numeri primi con $q$. Inoltre le radici primitive della $X^q \underset{p}{=} 1$ possono ottenersi tutte dai prodotti di quelle delle $X^{q_1^{\alpha}} \equiv 1$, $X^{q_2^{\beta}} \equiv 1$, ec.

Esempii. Per trovare le radici primitive della

$$X^{48} \underset{7}{=} 1 \ ,$$

cerchiamo da prima quelle delle

$$X_1^{16} \equiv 1 \ , \quad X_2^{3} \equiv 1 \ .$$

Presa ad arbitrio $G = 2$ veggo che $H_1 \equiv G^3 \equiv 1$ non può essere radice primitiva della prima; invece $H_2 \equiv G^{16} \equiv 2$ è radice della seconda, e non ne può essere che primitiva perchè l' esponente 3 è numero primo. (Questa radice primitiva si sarebbe già trovata accidentalmente osservando che $G^3 \equiv 1$). Qualunque altro numero reale $g$ si prendesse per $G$ non si potrebbe mai avere in $H_1 \equiv G^3$ una radice primitiva della $X_1^{16} \equiv 1$, perchè è sempre $g^6 \equiv 1$. — Prendiamo invece $G = 1 + \sqrt{}$, il che dà $H_1 \equiv G^3 \equiv -2 + 2\sqrt{}$, ma siccome $H_1^2 \equiv -\sqrt{}$, $H_1^4 \equiv -1$, $H_1^8 \equiv 1$, così non abbiamo una radice primitiva (vale a dire ci siamo imbattuti in un intero $1 + \sqrt{}$ il cui lo-

garitmo è pari). Essendo opportuno preferire gl' interi semplici prendiamo dunque $G = 2 + \sqrt{}$, che dà

$$H_1 \equiv G^3 \equiv 2 + 4\sqrt{}\,, \quad H_1^2 \equiv 2 + 2\sqrt{}\,, \quad H_1^4 \equiv -\sqrt{}\,, \quad H_1^8 \equiv -1\,,$$

dunque $X_1 = 2 + 4\sqrt{}$ è una radice primitiva della $X_1^{16} \equiv 1$. Basterà elevarla alle potenze 3.ª, 5.ª, 7.ª, 9.ª, 11.ª, 13.ª, 15.ª per avere le altre, le quali si possono tutte esprimere con $(3 \pm 2\sqrt{})\,\Omega$; indicandosi sempre con $\Omega$ una qualunque delle quattro unità. Moltiplicando fra loro le radici primitive delle $X_1^{16} \equiv 1$, $X_2^3 \equiv 1$ (queste ultime sono $X_2 \equiv 2, 4$) avremo quelle della $X^{48} \equiv 1$ espresse da
$(3 + 2\sqrt{}, 3 - 2\sqrt{})\,(2, 4)\,\Omega \equiv (-1 - 3\sqrt{}, -1 + 3\sqrt{}, -2 + \sqrt{}, -2 - \sqrt{})\,\Omega$
oppure da

$$(2 \pm \sqrt{}\,,\ 3 \pm \sqrt{})\,\Omega\,.$$

55. Ci può servire da esempio anche la ricerca delle radici primitive della congruenza fra numeri reali

$$x^{126} \underset{127}{=\!=} 1\,;$$

tanto più che noi mostreremo che se ne possono poi dedurre con tutta facilità quelle della

$$X^{126 \cdot 126} \underset{127}{=\!=} 1\,.$$

Cercheremo da prima le radici primitive delle

$$x_1^2 \underset{127}{=\!=} 1\,, \qquad x_2^9 \equiv 1\,, \qquad x_3^7 \equiv 1\,.$$

Alla prima spetta la radice primitiva $x_1 \equiv -1$. Per le altre due si prenda ad arbitrio $g = 2$, e siccome $h_2 \equiv 2^{14} \equiv 1$, così nulla abbiamo trovato per la seconda congruenza; invece per la terza si ha $h_3 \equiv 2^{15} \equiv 16$, e questa ne è una radice, che non può essere se non se primitiva, perchè l' esponente 7 è numero primo. Facciasi un secondo tentativo di $g = 3$, ed essendo $h_2 \equiv 3^{14} \equiv 22$, e $h_2^5 \equiv -20$ (cioè non $\equiv 1$) sarà 22 una radice primitiva della seconda congruenza; le altre cinque si avranno elevando 22 alle potenze di esponente

primo con 9. Le radici primitive della proposta risulteranno dai prodotti

$$(-1)(22, -24, -59, -28, 37, 52)(16, 2, 32, 4, 64, 8),$$

che possono calcolarsi moltiplicando i sei primi numeri successivamente per 2, 4, 8....

$$-44, 48, -9, 56, 53, 23; \quad 39, -31, -18, -15, -21, 46$$

$$-49, -62, -36, -30, -42, -35; \quad 29, 3, 55, -60, 43, 57$$

$$58, 6, -17, 7, -41, -13; \quad -11, 12, -34, 14, 45, -26.$$

**56.** Quando il modulo è immaginario, come nella congruenza $X^{40} \underset{5+4\sqrt{\ }}{=} 1$ abbiamo già detto (§. **50.**) che essa può cangiarsi in una congruenza relativa a soli numeri reali, cioè nella $x^{40} \underset{41}{=} 1$, le cui radici primitive saranno i prodotti di quelle delle $x_1^8 \equiv 1$, $x_2^5 \equiv 1$. Prendendo $g = 2$ si ha $h_1 \equiv 2^5 \equiv -9$, che non è radice primitiva della prima, perchè $h_1^2 \equiv -1$, $h_1^4 \equiv 1$; bensì $h_2 \equiv 2^8 \equiv 10$ è necessariamente radice primitiva della $x_2^5 \equiv 1$. Un secondo tentativo $g = 3$ ci darà $h_1 \equiv 3^5 \equiv -3$ radice primitiva della $x_1^8 \equiv 1$. Viene da ciò che le radici primitive della proposta congruenza sono

$$(-3, 14, 3, -14)(10, 18, 16, -4) = \pm(11, -13, -7, 12; 17, 6, 19, -15)$$

Se non che col modulo $5+4\sqrt{\ }$ queste radici primitive possono ridursi ad interi inferiori ai precedenti cioè a

$$(2 \pm \sqrt{\ }, \quad 3 \pm \sqrt{\ })\Omega$$

che sono (§. **54.**) quelle stesse spettanti al modulo 7.

Se $q$ non è divisibile per 8 le radici primitive non sono più a quattro a quattro di ugual grandezza. Così la $X^{28} \underset{5+2\sqrt{\ }}{=} 1$ ha le radici primitive

$$\pm(1 - \sqrt{\ }, \quad 2, 2 \pm \sqrt{\ }, \quad 2 + 2\sqrt{\ }, \quad 1 + 3\sqrt{\ }).$$

Esse si trovano considerando preventivamente le $X_1^4 \equiv 1$, $X_2^7 \equiv 1$; scelto a caso $G = 2$ si ha $H_1 = G^7 \underset{29}{=} 12$, che è radice primitiva

della prima; mentre $H_2 = G^1 = 16$ lo è della seconda. Il loro prodotto $192 \underset{29}{=} 13 \underset{5+2\sqrt{\ }}{=\!=} 1 - \sqrt{\ }$ è una radice primitiva della proposta; elevandola alle potenze 3.ª, 5.ª, 9.ª, 11.ª, 13.ª, 15.ª, 17.ª, 19.ª, 23.ª, 25.ª, 27.ª si hanno le altre radici primitive

$$-2-2\sqrt{\ }, \quad -4+4\sqrt{\ } \equiv -2-\sqrt{\ }, \quad 8+4\sqrt{\ } \equiv -2, \quad 4\sqrt{\ } \equiv 2-\sqrt{\ },$$

$$-2-4\sqrt{\ } \equiv 1+3\sqrt{\ }, \quad \text{ec.}$$

57. Giacchè le congruenze a modulo semplice immaginario si riducono a congruenze fra interi tutti reali, occupiamoci piuttosto delle congruenze il cui modulo $s$ sia un numero primo-semplice (dicemmo al §. 37. che $s \underset{4}{=} 3 \equiv -1$), in tal caso sarà (§. 51.) $q = ss - 1$ (perciò $q \underset{8}{=} 0$).

Abbiamo già dimostrato che la congruenza

$$X^{ss-1} \underset{s}{=} 1$$

ammette per radici tutti gli $ss - 1$ interi tra loro differenti e non congruenti ad $s$, e che il prodotto di tutti questi interi è $\equiv -1$. Egualmente si dimostra che la congruenza a numeri reali

$$y^{s-1} \underset{s}{=} 1$$

ammette per radici gli $s - 1$ numeri inferiori ad $s$ (teorema del Fermat), e che il prodotto di questi è $\equiv -1$ (teorema del Wilson).

Essendo $ss - 1 = (s-1)(s+1)$, e la $Y^{s-1} \equiv 1$ non potendo avere (§. 48.) altre radici oltre gli $s - 1$ numeri reali, ne viene che qualunque sia l' intero $X$ sarà $X^{s+1} \equiv y$, dove il secondo membro indica un numero reale; cerchiamone la grandezza. Si ha

$$\mathrm{gr}(X^{s+1}) = (\mathrm{gr}X)^{s+1} = (\mathrm{gr}^2 X)^{\frac{s+1}{2}} ;$$

d' altronde è noto (§. 51.) che qualunque sia il numero reale $\mathrm{gr}^2 X$ si ha

$$(\mathrm{gr}^2 X)^{\frac{s-1}{2}} \underset{s}{=} \pm 1 ,$$

secondo che $\mathrm{gr}^2 X$ è residuo o non residuo quadratico ;

perciò $\mathrm{gr}(X^{s+1}) \equiv \pm \mathrm{gr}^s X$, e quindi avremo $y \equiv \pm \mathrm{gr}^s X$, qui rimane indeterminato qual segno debba prendersi, ma io trovo che vale sempre il superiore. Notando che $\mathrm{gr}^s X = X.\,\mathrm{cj}\,X$, dove $\mathrm{cj}\,X$ indica il conjugato di $X$, si ha dunque

$$X^{r+1} \underset{s}{=} \mathrm{gr}^r X = X\,\mathrm{cj}\,X\,, \qquad \text{e} \qquad X^r \equiv \mathrm{cj}\,X\,;$$

vale a dire

$$(x+\xi\sqrt{})^{r+1} \equiv x^r + \xi^r\,, \qquad (x+\xi\sqrt{})^r \equiv x - \xi\sqrt{}\,.$$

Da ciò si vede esser facilissima la risoluzione della particolare congruenza

$$X^s \underset{s}{=} A$$

poichè $X \equiv \mathrm{cj}\,A$ ne è la radice, la quale è compresa $s$ volte nell' equazione, essendo evidente che $X^s - A \equiv (X - \mathrm{cj}\,A)^s$, poichè nello sviluppo del secondo membro tutti i termini sono $\underset{s}{=} 0$, eccettuati i due estremi $X^s$, e $(\mathrm{cj}\,A)^s \equiv A$. Così per esempio la $X^7 \underset{7}{=} 3 + \sqrt{}$ ha tutte le sette radici tra loro uguali e $\equiv 3 - \sqrt{}$.

Mediante tentativi potremo anche trovare le $s+1$ radici della

$$X^{s+1} \underset{s}{=} b\,;$$

Infatti essendo $X^s \equiv \mathrm{cj}\,X$, sarà $X^{s+1} \equiv X.\,\mathrm{cj}\,X$, e perciò o col metodo del §. 39. risolveremo le $x^2 + \xi^2 = (b,\ b+s,\ b+2s,\ \ldots\ b+\frac{1}{2}s^2)$, oppure ponendo $\xi = (0,\ 1,\ \ldots\ \frac{s-1}{2})$ sceglieremo quei valori che rendono $b - \xi^2$ residuo quadratico, il che facilmente si riconosce usando la nota legge di reciprocità.

Debbasi per esempio risolvere la

$$X^8 \underset{23}{=} -6 - 4\sqrt{}\,;$$

io comincio ad elevarla alla terza potenza ed ho

$$X^{24} \underset{23}{=} 3\,.$$

Se il secondo membro risultasse immaginario ambedue le congruenze

sarebbero prive di radici. Ora 3 non è separabile in due quadrati, e nemmeno lo sono (§. 39.)

$$3+92=5.19\ ,\ 3+115=2.59\ ,\ 3+138=3.47\ ,\ 3+207=3.7.10\ :$$

al contrario si ha

$$3+23=25+1\ ,\ 3+46=49+0\ ,\ 3+69=36+36\ .$$

$$3+161=100+64\ ,\ 3+230=169+64\ ,\ 3+253=256+0\ ;$$

così le 24 radici della seconda congruenza sono

$$X\equiv(5\pm V\ ,\ 7\ ,\ 6+6V\ ,\ 10\pm 8V)\,\Omega\ ;$$

e tra queste sceglieremo le otto

$$X\equiv(5+V\ ,\ 10-8V)\,\Omega\ .$$

che appartengono alla proposta congruenza.

La congruenza $X^{s-1}\underset{s}{=}C$ non è possibile se non se quando gr $C\equiv 1$, cioè $C\equiv\Omega$.

53. La risoluzione delle congruenze binomie sarebbe facilissima se per ciascun modulo si fosse costruita la tavola dei *logaritmi* (§. 54.). Pel modulo 7 prendendo per base dei logaritmi la radice primitiva $R=1-2V$ si ha

$$2=\log(1-2V)^2=\log(-3-4V)=\log(-3+3V)\ .$$

$$3=\log(1-2V)(-3+3V)=\log(3+2V)\ ,\ 4=\log(1-2V)(3+2V)=$$

$$=\log(3V)\ ,\ 5=\log(-1+3V)\ ,\ \ldots\ ,\ 48=\log(1)\ .$$

Questi logaritmi si veggono distribuiti nell' unita figura, dove 0 è l' origine degli interi, ed i numeri 2, 15, ec. sono posti nel luogo dei punti $R_2$, $R_{15}$ . . . . . rappresentati dagli immaginarii $R^2\equiv-3+5V$, $R^{15}=-2+3V$, ec.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 15 | 5 * | 4 | 11 * | 33 | 38 |
| 45 | 42 | 25 * | 44 | 7 * | 30 | 3 |
| 23 * | 19 * | 10 | 12 | 46 | 13 * | 41 * |
| 16 | 8 | 24 | 0 | 48 | 32 | 40 |
| 17 * | 37 * | 22 | 36 | 34 | 43 * | 47 * |
| 27 | 6 | 31 * | 20 | 1 * | 18 | 21 |
| 14 | 9 | 35 * | 28 | 29 * | 39 | 26 |

Questa figura mostra ex. gr. che $\log 2 = 32$, $\log.(1+\sqrt{\ }) = 46$ $\log(1+2\sqrt{\ }) = 7$, $\log(-3-3\sqrt{\ }) = 14$, ec. Invece di calcolare le varie potenze di $R = 1-2\sqrt{\ }$ si possono costruire i punti che esse rappresentano, osservando che per esempio (segnando i punti col mezzo dei numeri) si ha

$$\overline{048} : \overline{041} \mathrel{\Omega} \overline{042} : \overline{043} \mathrel{\Omega} \overline{040} : \overline{044}, \quad \text{ec.}$$

sicchè i triangoli $O.48.1$, $O.12.13$, ec. sono simili-dritti: quando alcuno dei punti che si ottengono con questa costruzione cadono fuori del quadrato della figura, essi vi si riconducono mediante il modulo 7 moltiplicato per un qualunque intero; così

$$\overline{048} : \overline{01} \mathrel{\Omega} \overline{01} : \overline{02}$$

darebbe $R^2 = -3-4\sqrt{\ }$ e sommandovi $7\sqrt{\ }$ si ha $R^2 \equiv -3+3\sqrt{\ }$. Gli asterischi indicano i logaritmi che non hanno alcun divisore comune con 48, e che perciò appartengono alle radici primitive.

59. Se il modulo sia $s=23$, la tavola compiuta comprenderebbe 528 logaritmi, ma vi si potrà abbastanza supplire con una tavola molto più piccola. La $x^{22} \underset{23}{\equiv} 1$ ha la radice primitiva 5; e la $X^{24} \equiv 5$ ha (§. 57.) la radice $X = 1+2\sqrt{\ }$. Per assicurarsi se questa sia una radice primitiva rispetto al modulo 23, basterà riconoscere che

$$(1+2\sqrt{\ })^{176} \equiv 5^7 (1+2\sqrt{\ })^8 \equiv -6(2-9\sqrt{\ }) \equiv 11+8\sqrt{\ } \text{ non è } \equiv 1;$$

giacchè si è certi che non può essere nè $(1+2\sqrt{\ })^{264} \equiv 1$, nè $(1+2\sqrt{\ })^{46} \equiv 1$, non potendo essere nè $5^{11} \equiv 1$, nè $5^2 \equiv 1$.

Presa questa radice primitiva $R = 1+2\sqrt{\ }$ per base dei logaritmi avremo $\log 5 = 24$, e facendo le potenze del 5 formeremo una prima tavola dei numeri, i cui logaritmi sono $= 24m$. Inoltre dividendo $(1+2\sqrt{\ })^{23} \underset{23}{\equiv} 1-2\sqrt{\ }$ (§. 57.) per $1+2\sqrt{\ }$ avremo

$$(1+2\sqrt{\ })^{22} \equiv \frac{1-2\sqrt{\ }}{1+2\sqrt{\ }} \equiv \frac{-3-4\sqrt{\ }}{5} \equiv 4-10\sqrt{\ },$$

e formeremo una seconda tavola degli interi i cui logaritmi sono $= 22n$.

Ne aggiungeremo una terza i cui logaritmi sieno $22n+1$ ; se questa mancasse basterebbe moltiplicare gli interi della seconda per la base $1+2\sqrt{\ }$ . Gli interi della prima tavola hanno l'inclinazione nulla, e quelli della seconda hanno il quadrato della grandezza $\equiv 1$ .

| $m$ | Numeri | Logar. | $n$ | Interi | Logar. | Interi | Logar. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 24 | 1 | $4-10\sqrt{\ }$ | 22 | $1-2\sqrt{\ }$ | 23 |
| 2 | 2 | 48 | 2 | $8-11\sqrt{\ }$ | 44 | $7+5\sqrt{\ }$ | 45 |
| 3 | 10 | 72 | 3 | $-9-9\sqrt{\ }$ | 66 | $9-4\sqrt{\ }$ | 67 |
| 4 | 4 | 96 | 4 | $-11+8\sqrt{\ }$ | 88 | $-4+9\sqrt{\ }$ | 89 |
| 5 | $-3$ | 120 | 5 | $-10+4\sqrt{\ }$ | 110 | $5+7\sqrt{\ }$ | 111 |
| 6 | 8 | 144 | 6 | $\sqrt{\ }$ | 132 | $-2+\sqrt{\ }$ | 133 |
| 7 | $-6$ | 168 | 7 | $10+4\sqrt{\ }$ | 154 | $2+\sqrt{\ }$ | 155 |
| 8 | $-7$ | 192 | 8 | $11+8\sqrt{\ }$ | 176 | $-5+7\sqrt{\ }$ | 177 |
| 9 | 11 | 216 | 9 | $9-9\sqrt{\ }$ | 198 | $4+9\sqrt{\ }$ | 199 |
| 10 | 9 | 240 | 10 | $-8-11\sqrt{\ }$ | 220 | $-9-4\sqrt{\ }$ | 221 |
| 11 | $-1$ | 264 | 11 | $-4-10\sqrt{\ }$ | 242 | $-7+5\sqrt{\ }$ | 243 |
| | | | 12 | $-1$ | 264 | $-1-2\sqrt{\ }$ | 265 |

Formate queste tavole se si voglia l'intero $X$ che corrisponde al dato logaritmo $l$, si troveranno facilmente i logaritmi della tavola che danno la somma $l$, ed $X$ sarà il prodotto dei corrispondenti interi: a tale scopo sia $i$ la metà, o l'intero immediatamente inferiore alla metà di $l$, e sia $m \underset{22}{=} i$ , $n \underset{24}{=} -i$ sarà $l = 24m + 22n$ coll'aggiunta di 1 pel caso che $l$ sia dispari. Per esempio se $l = 201$ sarà

$$100 \underset{22}{=} 12 = m\ , \quad -100 \underset{24}{=} 20 = n\ , \quad l \underset{528}{=} 24.12 + 22.20 + 1\ .$$

e l'intero corrispondente si otterrà moltiplicando i numeri della prima e della terza tavola corrispondenti ad $m = 12$ ed a $n = 20$ . e perciò sarà

$$X \underset{23}{=} -3(5 - 7\sqrt{\ }) \equiv -2 - 11\sqrt{\ }\ .$$

Viceversa se si voglia il logaritmo di un dato intero $X$ cercheremo nella prima tavola il valore di $m$ corrispondente a $\mathrm{gr}^2 X$ , e divide-

remo $X$ pel numero corrispondente ad $m:2$, od a $(m-1):2$; il quoziente sarà compreso, se $m$ è pari, nella seconda tavola, e, se $m$ è dispari, nella terza: il logaritmo di $X$ risulterà poi dalla somma dei suoi fattori. Così se $X=2+11\sqrt{\ }$, a $\underset{23}{\mathrm{gr}^2 X=10}$ corrisponde $m=3$, ed $X$ diviso pel numero 5 corrispondente ad $m=(3-1):2=1$ dà $X=5(5-7\sqrt{\ })$; dunque $\log X=24+177+264=465$.

60. Occupiamoci adesso della risoluzione delle congruenze binomie, e rammentando la stretta relazione che i *logaritmi* (§. 54.) stabiliscono fra tali congruenze e quelle del 1.° grado, applichiamo a quella risoluzione il metodo esposto nei §. 45 e 46.

Tutte le congruenze del 2.° grado si riducono facilmente (§. 28. 49.) alla forma binomia

$$X^2 \underset{P}{\equiv} A$$

e siccome (il modulo $P$ essendo al solito semplice), posto $q=\mathrm{gr}^2 P-1$, qualunque sia $X$ è sempre (§. 51.) $X^q \equiv 1$, così la proposta congruenza avrà radici soltanto se sia soddisfatta la condizione

$$A^{q:2} \equiv 1 \ ;$$

in tal caso si dice che $A$ è residuo quadratico; la legge di reciprocità ci darà in seguito (§. 68.) un mezzo facile per conoscere se tal condizione sia soddisfatta.

Ora se $m$ sia una potenza del 2 tale che $q:2m=\nu$ sia dispari; si potrà soddisfare alla $2\pi-\nu\varphi=1$ ponendo $\pi=(\nu+1):2$, $\varphi=1$, e sarà $A \equiv A^{2\pi-\nu}$

quindi $X^2 \equiv B A^{2\pi}$

avendo supposto $A^{-\nu} \equiv B$, il che dà $B^m \equiv 1$:

e se si possa determinare $H$ in guisa che

$$H^2 \equiv B \qquad \text{sarà finalmente} \qquad X \equiv \pm H A^{\pi} \ .$$

Per determinare $H$ abbiamo $H^{2m} \equiv 1$, che ha tutte le radici espresse da $H \equiv G^{\nu}$; se prendendo a caso il valore di $G$ risulti $G^{2^{\nu}} \equiv B$, op-

pure invece $G^{4\nu} \equiv B$, o $G^{6\nu} \equiv B$, ec., se ne dedurrà tosto il valore di $H$; altrimenti ripetendo i tentativi si troverà (§. 54.) una radice primitiva della $H^{2m} \equiv 1$, ed una delle sue potenze 2.ª, 4.ª, 6.ª, ec. sarà $\equiv B$.

Se per esempio, il modulo sia $P = 11$ sarà $q = 120$, $2m = 8$, $\nu = 15$, $\pi = 8$, e posto $A^{-15} \equiv B$, la congruenza $X^2 \underset{11}{=} A$ ammetterà radici solamente quando $B^4 \equiv 1$, perciò $B$ dovrà avere uno dei quattro valori $1$, $-1$, $\sqrt{\ }$, $-\sqrt{\ }$; pei due primi si vede subito che $H \equiv 1, \sqrt{\ }$; in quanto ai due ultimi noi dovremo calcolare $H \equiv G^{15}$; ora preso ad arbitrio $G = 1 + \sqrt{\ }$ si ha $H \equiv -4 + 4\sqrt{\ }$, $H^2 = \sqrt{\ }$, onde $-4 + 4\sqrt{\ }$ è una radice primitiva della $H^8 \equiv 1$.
Pertanto secondo che sarà

$$A^{-15} \equiv (1, -1, \sqrt{\ }, -\sqrt{\ }) \quad \text{sarà} \quad X \equiv \pm(1, \sqrt{\ }, 4 - 4\sqrt{\ }, 4 + 4\sqrt{\ })\, A^8 .$$

Per esempio se

$$X^2 \underset{11}{=} 5 + \sqrt{\ }$$

si ha

$$A^5 \equiv -3 + 5\sqrt{\ }, \quad A^{10} \equiv -5 + 3\sqrt{\ }, \quad A^{15} \equiv -\sqrt{\ },$$

onde

$$X \equiv \pm(4 - 4\sqrt{\ })\,(4 - 2\sqrt{\ }) \equiv \mp(3 + 2\sqrt{\ }) .$$

Serva di secondo esempio la risoluzione della $Y^3 \underset{11}{=} 1$, la quale liberata dal fattore $Y - 1$, e postovi $Y = (X - 1) : 2$ diventa

$$X^2 \equiv -3, \quad \text{perciò} \quad B \equiv (-3)^{15} \equiv -1,$$

onde $X \equiv \pm\sqrt{\ }\,(-3)^8 \equiv \pm 5\sqrt{\ }$ e finalmente $Y \equiv 5 \mp 3\sqrt{\ }$.

Se il modulo sia $P = 5 + 2\sqrt{\ }$, sarà $q = 28$, $2m = 4$, $\nu = 7$, $\pi = 4$, e posto $A^{-7} \underset{5+2\sqrt{\ }}{=} B$, la congruenza

$$X^2 \underset{5+2\sqrt{\ }}{=} A$$

ammetterà radici solamente quando sia $B^2 \equiv 1$, e senza bisogno di alcun tentativo avremo sempre risolta la congruenza, poichè se-

condo che $A^{-7} \equiv (1, -1)$, sarà $X \equiv \pm (1, \nu) A^4$.
Per esempio se

$$A = -1 + 2\nu \quad \text{si ha} \quad A^7 \equiv 1, \quad \text{ed} \quad X \equiv \pm A^4 \equiv \pm (3 - \nu).$$

Se il modulo sia $P = 9 + 4\nu$, sarà $q = 96$, $2m = 32$, $\nu = 3$, $\pi = 2$, e posto $A^{-3} \underset{9+4\nu}{=\!=} B$, la congruenza $X^3 \equiv A$ ammetterà radici solamente quando sia $B^{16} \equiv 1$. Ora una radice primitiva della $H^{32} \equiv 1$ è la $(1 + \nu)^3 \equiv -2 + 2\nu$, e col suo mezzo si ottiene la seguente corrispondenza tra i valori di $B$ e quelli di $H$ (si aggiungono per maggior comodo anche i valori di $1 : B \equiv A^3$).

$H \equiv -2+2\nu, -4+\nu, 2-\nu, 2-3\nu, -3-3\nu, \quad 3-4\nu, -3+\nu, \quad \nu$, ec.
$B \equiv -4+\nu, \quad 2-3\nu, 3-4\nu, \quad \nu, -1-4\nu, \quad 3+2\nu, \quad 4+3\nu, -1$, ec.
$A^3 \equiv -4-3\nu, -3-2\nu, 1+4\nu, \quad -\nu, -3+4\nu, -2+3\nu, \quad 4-\nu, -1$, ec.

poscia avremo $X \equiv \pm H A^3$.

Così la $X^2 \equiv 4 + \nu$ non ammette radici, perchè $(4+\nu)^3 \equiv -3+\nu$ non è compreso tra i precedenti valori di $A^3$. Invece la $X^2 \equiv 3+\nu$, essendo $(3+\nu)^3 \equiv -1 - 4\nu$, dà $X \equiv \pm (1+2\nu)(3+\nu)^2 \equiv \mp 5$.

61. Talvolta il calcolo degli immaginarii potrà giovare a risolvere le congruenze relative a soli numeri interi, il cui modulo è primo-composto. Così per esempio proposta la $x^3 \underset{97}{=\!=} 62$, noi vi sostituiremo la $X^3 \underset{9+4\nu}{=\!=} 62$; ora $62^3 \equiv -1$, quindi $B \equiv -1$, $H \equiv \nu$, e

$$X \equiv \pm \nu\,(62)^2 \equiv \pm 61\,\nu \equiv \mp (5 + 5\nu);$$

mediante il modulo $9 + 4\nu$ questo valore di $X$ si riduce reale giacchè $5 + 5\nu \underset{9+4\nu}{=\!=} 16$, perciò finalmente abbiamo trovato

$$x \underset{97}{=\!=} \pm 16.$$

Questo metodo di soluzione diretta non mancherà mai di condurre allo scopo quando il modulo diminuito dell'unità non sia divisibile per 8, e quindi valerà senza eccezione pei moduli primi-composti 5, 13, 29, 37, 53, 61, 101, ec.

Viceversa le congruenze a modulo semplice immaginario si possono cangiare (§. 50.) in altre fra numeri reali; così la

$$X^2 \underset{9+4\sqrt{\ }}{=\!=} -4+3\sqrt{\ } \quad \text{moltiplicata per } 9-4\sqrt{\ } \quad \text{dà}$$

$$(9-4\sqrt{\ })\,x^2 \underset{97}{=\!=} -24+43\sqrt{\ }\,, \quad \text{ossia} \quad x^2 \underset{97}{=\!=} 62\,.$$

Per risolvere la $x^2 \underset{p}{=\!=} a$ si può operare analogamente al §. 60. chiamando $2m$ la massima potenza del 2 per la quale è $q=p-1=2m\nu$, ponendo $a^{-\nu} \equiv b$, e risolvendo $h^2 \equiv b$ mediante una radice primitiva della $h^{2m} \equiv 1$; dopo di che sarà $x \equiv \pm h\,a^{\pi}$, essendo

$$\pi = (\nu+1):2\,.$$

Si vede per conseguenza che quando il modulo è primo-semplice la congruenza è sempre risolubile direttamente senza alcun tentativo; poichè allora è (§. 37.) $m=1$, $\pi=(p+1):4$, ed $x \equiv \pm a^{\pi}$. Nel caso che il modulo sia $p=97$ sarà $2m=32$. Le radici della $h^{32} \underset{97}{=\!=} 1$ si avranno ponendo $h \equiv g^3$; se $g=2$, o $g=3$ non si ha radice primitiva, bensì la si ha ponendo $g=5$, $h \equiv 5^3 \equiv 28$, e così si forma la seguente tavoletta di corrispondenza fra $h$, $b \equiv h^2$, ed $a^3 \equiv 1:b$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h \equiv$ | 28, | 8, | 30, | −33, | −51, | 27, | −20, | 22, | 34, | −18, | −19, | 50 |
| $b \equiv$ | 8, | −33, | 27, | 22, | −18, | 50, | 12, | −1, | −8, | 33, | −27, | −22 |
| $a^3 \equiv$ | −12, | −50, | 18, | −22, | −27, | 33, | −8, | −1, | 12, | 50, | −18, | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $h \equiv$ | 42, | 12, | 45, | −1, |
| $b \equiv$ | 18, | −50, | −12, | 1, |
| $a^3 \equiv$ | 27, | −33, | 8, | 1, |

poscia sarà $x \equiv \pm h\,a^3$. Per esempio se $a=62$, si ha

$$a^3 \equiv -1\,, \quad h \equiv 22\,, \quad x \equiv \pm 22\,.\,61 \equiv \mp 16\,.$$

62. Le congruenze del 2.° grado fra numeri reali possono risolversi più speditamente scrivendole sotto l' aspetto di equazioni a due

incognite; così la precedente $x^2 \underset{97}{=} 62$ si scriverà $x^2 - 62 = 97y$; per $y$ si dovrebbero tentare tutti i numeri inferiori a $97:4$, ma i tentativi possono ridursi a pochissimi osservando che per $x \underset{16}{=} 0, 1, 2, \ldots\ldots 15$ si ha $x^2 - 62 \underset{16}{=} 2, 3, 6, 11$, dal che risulta $y \underset{16}{=} 2, 3, 6, 11$, cioè $y = 2, 3, 6, 11, 13, 19, 22$. Inoltre osservando che $x^2 - 62 \underset{10}{=} 8, 9, 2, 7, 4, 3$ escluderemo dai predetti valori di $y$ quelli che non soddisfanno alla condizione $y \underset{10}{=} 4, 7, 6, 1, 2, 9$. Similmente abbiamo la condizione $y \underset{9}{=} 4, 8, 2, 5$ (e se occorresse anche le $y \underset{11}{=} 3, 7, 10, 1, 2$, $y \underset{7}{=} 6, 5, 2, 4$). Così ci riduciamo ai tre soli tentativi $y \underset{7}{=} 2, 11, 22$, il primo dei quali dà $x \underset{97}{=} \pm 16$.

65. Per le congruenze binomie di grado superiore (sempre a modulo semplice) continueremo ad imitare la soluzione delle congruenze del 1.° grado date nei §. 45. 46, e come allora abbiamo insegnato a risolvere la $ny \underset{q}{=} a$ senza eseguire sopra $a$ alcuna divisione, così ora cercheremo di risolvere la

$$X^n \underset{P}{=} A$$

senza eseguire sopra $A$ alcuna estrazione di radice, ma soltanto delle elevazioni a potenza. Se $m$ è il massimo comun divisore di $n$ e di $q = \mathrm{gr}^3 P - 1$, è condizione necessaria per la possibilità della proposta equazione che $A^{q:m} \equiv 1$. Ora sia $l$ il prodotto di tutti i fattori semplici di $m$, che sono divisori anche di $q:m$, saranno $q:m$, $n:l$ due numeri tra loro primi, e si potranno determinare i numeri $\pi$ $\varphi$ in guisa che

$$\frac{n}{l}\pi - \frac{q}{m}\varphi = 1, \quad \text{sicchè sarà} \quad A \equiv A^{\frac{n}{l}\pi - \frac{q}{m}\varphi} \equiv A^{\frac{n}{l}\pi}$$

e sostituendo nella proposta congruenza essa si ridurrà alla forma più semplice

$$X^l \underset{P}{=} A^\pi.$$

Questa riduzione della $X^n \equiv A$ vale qualunque sia $A$, purchè soddisfaccia alla condizione $A^{q:m} \equiv 1$, senza la quale la proposta congruenza è impossibile; che se il valore di $A$ sia tale da rendere $A^{q:mm'} \equiv 1$, essendo $m'$ un numero che contenga alcuno dei fattori di $l$, noi potremo procedere ad una ulteriore riduzione, poichè se $l'$ è il più piccolo numero che rende $l:l'$ primo con $q:mm'$, potremo risolvere la $\frac{l}{l'}\pi' - \frac{q}{mm'}\varphi' = 1$, e come sopra la congruenza si abbasserà alla $X' \equiv A^{\pi'}$. Trovato un valore di $X$, tutti gli altri si avranno moltiplicandolo per le radici della $T^m \equiv 1$, di cui abbiamo anteriormente trattato.

64. Proposta la $X^l \underset{p}{=} A^\pi$, la quale non possa ulteriormente ridursi, finchè $A$ rimane arbitrario; e supposto che sia soddisfatta la condizione $A^{q:m} \equiv 1$, essendo $m$ un divisore di $q$ e multiplo di $l$; noi prenderemo per $m'$ il minimo numero che rende $q:mm' = \nu'$ primo con $l$, e risolta la $l\pi' - \nu'\varphi' = 1$ avremo $X^l \equiv A^{l\pi\pi'}B$, essendo $B = A^{-\pi\nu'\varphi'}$, e posto $H^l \equiv B$ sarà $X \equiv HA^{\pi\pi'}$; perciò la questione è ridotta alla risoluzione della $H^l \equiv B$. Siccome $B^{m'} \equiv 1$, così se avremo una radice primitiva della $H^{lm'} \equiv 1$ potremo formare una tavola di relazione tra $H$ e $B$, mediante la quale avremo la compiuta risoluzione della proposta $X^n \equiv A$.

Per applicare queste formule sia

$$X^{36} \underset{21+10\sqrt{\ }}{=\!=} A$$

avremo $q = 340$, $m = 36$, $l = 9$, $\pi = 4$, e, purchè sia soddisfatta la necessaria condizione $A^{15} \equiv 1$, la proposta si ridurrà (§. 63.) alla più semplice $X^9 \equiv A^4$. Questa presa per sè sola esigerebbe soltanto che fosse $A^{340} \equiv 1$, ma avendo già supposto che sia $A^{15} \equiv 1$ prenderemo. come nel presente §, $m' = 5$, $\nu' = 5$, $\pi' = 4$, $\varepsilon' = 7$, e risulterà

$$X \equiv HA^{16} \equiv HA, \qquad \text{essendo} \qquad H^9 \equiv B \equiv A^{10} \equiv A^{-5},$$

e $B^3 \equiv 1$. Occorrerà cercare una radice primitiva della $H^{27} \equiv 1$; essa è data da $H \equiv 2^{30} \equiv 118$, giacchè si trova $H^3 \equiv 13$, $H^9 \equiv 129$.

Quindi per la risoluzione della proposta basterà avere sott' occhio la relazione

$$\begin{aligned} H &\equiv \quad 118\ ,\ -142\ ,\ 15 \\ B \equiv A^{10} &\equiv \quad 129\ ,\ -130\ ,\ 1 \\ A^5 &\equiv -130\ ,\ \quad 129\ ,\ 1 \end{aligned}$$

Se per esempio sia $X^{36} \underset{21+10\sqrt{\ }}{\equiv} -5+6\sqrt{\ } \equiv -234$, troveremo $(-234)^5 \underset{541}{\equiv} -130$; questo valore è uno dei tre precedenti, perciò noi siamo sicuri che la proposta è possibile, e che una sua radice è data da $X \equiv HA \equiv -118 \,.\, 234 \equiv -21$. Tutte le altre radici si otterranno moltiplicando per questa $-21$ le radici della $T^{36} \equiv 1$. Siccome abbiamo trovato che $H \equiv 118$ è una radice primitiva della $H^{37} \equiv 1$, così $118^3 \equiv 15$ lo sarà della $T_3^9 \equiv 1$, e tutte le radici di questa saranno $15, 15^2, \ldots . 15^8, 1$; in quanto alla $T_1^4 \equiv 1$ essa ha le radici $\pm 1, \pm\sqrt{\ }$, le quali ultime mediante il modulo $21+10\sqrt{\ }$ possono ridursi a $\pm 52$. Così tutte le 36 radici della proposta congruenza sono (§. 54.) espresse dai prodotti

$$X \equiv \pm 21\,(1, 15, 225, 129, 229, 189, 130, 214, 36)\,(1, 52)$$

od anche da

$$X = (10, 6-3\sqrt{\ }, 12-3\sqrt{\ }, 4, 8+\sqrt{\ }, 7+5\sqrt{\ }, 10+4\sqrt{\ }, 10+3\sqrt{\ }, 7+4\sqrt{\ })\,\Omega .$$

65. Le congruenze più complicate si potranno ridurre a congruenze binomie negli stessi casi e cogli stessi metodi, coi quali la risoluzione delle equazioni si riduce a sole estrazioni di radici.

Sia proposta la congruenza a modulo immaginario

$$X^3 + (2+\sqrt{\ })X^2 + (5+4\sqrt{\ })X + 3 - \sqrt{\ } \underset{8+7\sqrt{\ }}{\equiv} 0$$

moltiplicandola per $8-7\sqrt{\ }$ essa si riduce ad una congruenza relativa a soli numeri reali

$$x^3 + 17x^2 - 48x - 12 \underset{113}{\equiv} 0 .$$

Questa $x^3 - 96x^2 - 48x - 12 \equiv 0$ postovi $x = 32 + y$ si libera dal secondo termine e diviene $y^3 - 69y + 38 \equiv 0$, e posto

$$y = z + \frac{23}{z} \qquad \text{dà} \qquad z^3 + 38 + \frac{76}{z^3} \equiv 0 \ ;$$

poscia se $z^3 = u - 19$ si ha $u^2 + 54 \equiv 0$ ,

equazione priva di radici. Perciò nel presente caso le formule Cardaniche riescono affatto inutili, appunto come avviene nel noto caso irreducibile.

Non credo che rimanga altro spediente per risolvere la $x^5 + 17\,x^3 -$ ec. se non se quello di tentare per $x$ tutti i numeri da 1 a 113; ignoro se per le congruenze vi sieno criterii o teoremi, i quali servano a diminuire il numero dei tentativi. Le sostituzioni da 1 a 9 si eseguiscono comodamente coll'algoritmo usato nella mia memoria più volte citata

| | $1 + 17 - 48 - 1142$ |
|---|---|
| 1 | $1 + 18 - 30 - 1172$ |
| 2 | $1 + 19 - 10 - 1162$ |
| 3 | $1 + 20 + 12 - 1106$ |
| : | : : : : |
| 9 | $1 + 26 + 186 + 532$ |

Si vede a colpo d'occhio che questi tentativi riuscirono inutili, perchè gli ultimi termini 1172, 1162, 1106, ec. non sono divisibili per 113 giacchè le ultime cifre darebbero i quozienti 4, 4, 3, ec. Poscia calcoleremo la trasformata in $(x - 10)$ ed anche in essa faremo inutilmente le sostituzioni 1, 2, . . . . 9

| | $1 + 17 - 48 - 12$ |
|---|---|
| 10 | $1 + 27 + 222 + 2208$ |
| | $1 + 37 + 592$ |
| | $1 + 47$ |

| | $1 + 47 - 86 - 1182$ |
|---|---|
| 1 | $1 + 48 - 38 - 1220$ |
| 2 | $1 + 49 + 12 - 1158$ |
| : | : : : : |

Continuando pazientemente si trova $x \equiv 58, 69, 82$. Da cui risulta

$$X \underline{\underline{\quad}}_{8 + 7\sqrt{}} - 2 + 4\sqrt{} \ , \quad 1 - 3\sqrt{} \ , \quad -1 - 2\sqrt{} \ .$$

Questi calcoli per tentativi riescono molto più laboriosi quando si tratta di congruenze ad immaginarii col modulo reale.

Così la $$X^3+(2+3\sqrt{\ })X^2+(4-\sqrt{\ })X+4\underset{7}{=}0$$ mi dà la radice $X\equiv 2+3\sqrt{\ }$, ed una congruenza del 2.° grado priva di radici. Essendovi una sola radice l'analogia farebbe supporre che in questo esempio la formula Cardanica non cadesse nel caso irreducibile; ma ponendo

$$X\equiv Y-3-\sqrt{\ }\,,\quad Y^3+(1+2\sqrt{\ })Y+(-1+2\sqrt{\ })\equiv 0\,,\quad Y=Z+\frac{2+4\sqrt{\ }}{Z}$$

$$Z^6+(-1+2\sqrt{\ })Z^3+(3-2\sqrt{\ })\equiv 0\,,\qquad Z^3=U-3-\sqrt{\ }$$

si giunge alla $U^2+2-\sqrt{\ }\equiv 0$, la quale è impossibile (§. 58.), cioè non ammette alcuna radice.

Le congruenze a coefficienti reali, che hanno tre radici reali, cadono nel caso irreducibile se il modulo è $\underset{3}{=}-1$; invece, quando il modulo $\underset{3}{=}1$, esse sono risolubili mediante la formula Cardanica.

66. Terminerò questi cenni sulla risoluzione delle congruenze, indicando una trasformazione che in qualche raro caso potrà facilitare il calcolo. Proposta la congruenza

$$x^{15}+7x^3+6\underset{29}{=}0$$

se si osserva che $x^{28}\equiv 1$ essa può scriversi così

$$7x^{30}+x^{15}+6\equiv 0\,,$$

la quale si risolve alla maniera delle congruenze del 2.° grado; cioè posto $x^{15}\equiv 2+y$ si ha $y^2+1\equiv 0$: ora la $Y^2+1\underset{5+2\sqrt{\ }}{=}0$ dà $Y\equiv\pm\sqrt{\ }\equiv\pm 12$, dunque $y\underset{29}{=}\pm 12$, $x^{15}\equiv(14,19)$, da cui si deduce (§. 63.) $x\equiv(14^{13},19^{13})\equiv(15,10)$.

Similmente la

$$X^{25}+AX^3+B\underset{7}{=}0$$

si trasforma nella

$$AX^{50}+X^{25}+B\equiv 0\,.$$

67. Accenniamo una facilitazione anche per alcune congruenze contenenti non solo $X$, ma eziandio il suo conjugato o la sua grandezza. Proposta la congruenza

$$\operatorname{gr} X + A X + B \operatorname{cj} X + C \frac{\operatorname{cj} X^2}{X} + \text{ec.} \underset{s}{=} M$$

dovendo essere $\operatorname{gr} X$ razionale porremo $X \equiv Y^2$, quindi (essendo $\operatorname{gr}^2 Y = Y \operatorname{cj} Y$) avremo

$$Y \operatorname{cj} Y + A Y^2 + B \operatorname{cj} Y^2 + \text{ec.} \underset{s}{=} M \ .$$

Potrebbe credersi che si dovessero tentare per $Y$ tutti i $ss-1$ valori differenti, ma osservando che (§. 57.) $\operatorname{cj} Y \equiv Y^s$ si ha

$$Y^2 (Y^{s-1} + A + B Y^{2s-2} + C Y^{4s-4} + \text{ec.}) \equiv M \ ;$$

ora $Y^{s-1}$ ammette (§. 57.) soltanto $s+1$ valori differenti, e basterà sostituirli successivamente nella predetta congruenza, dedurne il valore di $Y^2$, e vedere se la sua potenza $(s-1):2$ sia congruente all'assunto valore di $Y^{s-1}$.

Se abbiasi, per esempio,

$$\operatorname{gr} X + (2 - \sqrt{\ }) X + 2 \operatorname{cj} X \underset{7}{=} 3 + 3\sqrt{\ } \ ,$$

sostituendo nella

$$Y^2 (Y^6 + 2 - \sqrt{\ } + 2 Y^{12}) \equiv 3 + 3\sqrt{\ }$$

gli otto valori di

$$Y^6 \equiv (1, 2 + 2\sqrt{\ }) \Omega \ ,$$

si trova (nel che l'uso dei logaritmi (§. 53.) riesce assai giovevole) che $Y^6 \equiv -2 - 2\sqrt{\ }$ dà $Y^2 \equiv 4 + 3\sqrt{\ }$.
che è l'unica soluzione della congruenza proposta.

68. Noi sappiamo (§. 57.) che rispetto ad un modulo primo $p$ il residuo della potenza $(p-1):2$ di qualsiasi numero reale $a$ è l'unità positiva o negativa: le molte considerazioni che si fanno intorno a tal residuo diedero occasione al Legendre d'indicarlo col simbolo $\left(\frac{a}{p}\right)$, a cui potremo sostituire $(a\ ;\ p)$, acciocchè la vista del ; in luogo del segno di divisione mostri che si tratta di un particolar simbolo e non

di una ordinaria frazione. Così abbiamo

$$a^{(p-1):2} \underset{p}{=} (a\ ;\ p) = \pm 1\ .$$

Se $a$ è numero non primo, $(a\ ;\ p)$ è evidentemente il prodotto dei residui corrispondenti ai singoli fattori di $a$. Di più il Jacobi estese l' uso di tal simbolo al caso che $p$ sia composto di fattori, indicando con $(a\,;b)$ il prodotto di tutti i singoli residui quando in luogo di $b$ si pone ciaschedun suo fattore componente.

La legge di reciprocità è espressa dalla equazione

$$(1) \qquad (a\ ;\ b) = (b\ ;\ a)\,(-1)^{(a-1)(b-1):4}$$

essendo $a$ $b$ due numeri dispari positivi senza alcun fattore comune. Nel calcolare l' esponente $(a-1)(b-1):4$ si possono togliere ad $a$ ed a $b$ tutti i multipli di 4.

Se per esempio voglia determinarsi il valore di (47; 101), si osserverà che per la precedente legge esso è $=(101; 47)$, poichè l' esponente di $(-1)$ è multiplo di 4. Considerando che $(101\ ;\ 47)$ indica un residuo rispetto al modulo 47 si fa palese che esso è identico con $(7\,;47)$ (avendo sostituito a 101 il suo congruente 7), il quale per la legge di reciprocità è $=(47\ ;\ 7)\,(-1)^{3\cdot 2:4} = -(47\,;\,7) = -(5\ ;\ 7)$. E per la stessa legge si ha $(5\ ;\ 7) = (7\ ;\ 5)(-1)^{0\cdot 2:4} = (7\ ;\ 5) = (2\ ;\ 5)$. Ora $(2\ ;\ 5)$ esprime il residuo $2^2 \underset{5}{=} -1$. Questi calcoli danno per conseguenza immediata $(47\ ;\ 101) = 1$. Il che (essendo 101 numero primo) è il criterio da cui si conosce che 47 è residuo quadratico rispetto al modulo 101. Infatti si ha $42^2 \underset{101}{=} 47$.

La legge di reciprocità riguarda soltanto i numeri dispari, occorre perciò conoscere la formula relativa al 2, essa è

$$(2) \qquad (2\ ;\ b) = (-1)^{(b^2-1):8}$$

Nel calcolare l' esponente del secondo membro si può togliere a $b$ ogni multiplo di 8. Così per esempio

$$(2\ ;\ 21) = (2\ ;\ 5) = (-1)^{(25-1):8} = -1\ .$$

In quanto al valore di $(-1\ ;\ b)$ esso è $=(-1)^{(b-1):2}$, purchè $b$

sia un numero dispari e positivo. Se $b$ è numero primo questa ultima formula non è altro che la definizione stessa del simbolo $(-1\ ;\ b)$: altrimenti la si dimostra con molta facilità.

Vogliasi sapere se $-95$ sia residuo quadratico rispetto al modulo 101. Le tre formule predette danno

$$(-95\ ;\ 101) = (95\ ;\ 101) = (101\ ;\ 95)(-1)^{0}\ ,$$

$$(101\ ;\ 95) = (6\ ;\ 95) = (2\ ;\ 95)(3\ ;\ 95)\ ,$$

$$(2\ ;\ 95) = (-1)^{(49-1):8} = 1\ .$$

$$(3\ ;\ 95) = (95\ ;\ 3)(-1)^{2\cdot 2:4} = -(2\ ;\ 3) = -(-1)^{(9-1):8} = 1$$

Dunque

$$(-95\ ;\ 101) = 1\ , \qquad \text{e} \qquad -95 \underset{101}{\equiv} 6$$

è residuo quadratico. Infatti

$$39^{2} \underset{101}{\equiv} 6\ .$$

69. Nel calcolo degli immaginarii si hanno una legge di reciprocità e due formule analoghe alle precedenti: io le trovai per induzione, poscia vidi che erano già conosciute. Qualunque sia il modulo semplice $P$, posto $q = \mathrm{gr}^{2} P - 1$ si ha

$$A^{q} \underset{P}{\equiv} 1 \qquad , \qquad A^{q:4} \underset{P}{\equiv} \Omega$$

questo residuo $\Omega$ che è una delle quattro unità; lo indicheremo, analogamente alla segnatura usata pei numeri, con $\{A\ ;\ P\}$. Se $\{A\ ;\ P\} = 1$, $A$ è residuo biquadratico rispetto al modulo semplice $P$, cioè si può soddisfare alla congruenza $X^{4} \equiv A$. Se $\{A\ ;\ P\} = -1$, $A$ è soltanto residuo quadratico.

Analogamente all' estensione data dal Jacobi alla segnatura del Legendre, indicheremo con $\{A\ ;\ B\}$ il prodotto delle unità corrispondenti ai singoli fattori semplici di $B$. La legge di reciprocità io la esprimo con

$$(1) \qquad \{a + \alpha\sqrt{\ }\ ;\ b + \beta\sqrt{\ }\} = \{b + \beta\sqrt{\ }\ ;\ a + \alpha\sqrt{\ }\}\,(-1)^{\nu}$$

essendo

$$\nu = \frac{(b-1)\alpha + (a-1)\beta + \alpha\beta}{4}\ ;$$

nel calcolo del qual esponente possono togliersi ai numeri $a\ b\ \alpha\ \beta$ i multipli di 4 che essi comprendono. Questa e le seguenti formule sono sottoposte alla sola condizione che gli $a\ b$ sieno numeri dispari, ed i coefficienti $\alpha\ \beta$ del ramuno sieno numeri pari: tale è la forma, a cui giova ridurre ogni immaginario non divisibile per $1+\sqrt{\ }$.

Riguardo a $1+\sqrt{\ }$ trovai che

$$\{1+\sqrt{\ };\ b+\beta\sqrt{\ }\}=\sqrt{\ }^{(1-bb+2b\beta-3\beta\beta):8} \tag{2}$$

Nel calcolare l'esponente $(1-(b-\beta)^2-2\beta^2):8$ si possono togliere a $b$ ed a $\beta$ i multipli di 16.

Per l'unità $\sqrt{\ }$ risulta dalla definizione che

$$\{\sqrt{\ };\ b+\beta\sqrt{\ }\}=\sqrt{\ }^{(bb+\beta\beta-1):4} \tag{3}$$

Nel calcolo dell'esponente possono tralasciarsi da $b$ e da $\beta$ i multipli di 8.

Il quadrato della (3) si esprime più semplicemente con

$$\{\sqrt{\ };\ b+\beta\sqrt{\ }\}^2=\{-1\ ;\ b+\beta\sqrt{\ }\}=(-1)^{\beta:2}$$

giacchè, nella solita ipotesi di $b\underset{2}{=}1$ , $\beta\underset{2}{=}0$, è $\frac{bb+\beta\beta-1}{4}\underset{2}{=}\frac{\beta}{2}$.

Se occorra determinare $\{2:B\}$, osserveremo che $(1+\sqrt{\ })^3=2\sqrt{\ }$; perciò il quadrato della (2) divisa per la (3) darà con facile riduzione

$$\{2\ ;\ b+\beta\sqrt{\ }\}=\sqrt{\ }^{b\beta:2} \tag{4}$$

Dalla stessa (2) si deduce pure

$$\{1-\sqrt{\ };\ b+\beta\sqrt{\ }\}=\sqrt{\ }^{(-1+bb+2b\beta+3\beta\beta):8}$$

Un esempio renderà più chiaro l'uso di queste formule. Si cerchi se $68+14\sqrt{\ }$ sia residuo biquadratico rispetto al modulo semplice 103. Decomponendo il dato intero in una potenza di $1+\sqrt{\ }$ ed in un intero, che abbia il coefficiente di ramuno pari si ha

$$\{68+14\sqrt{\ }\ ;\ 103\}=\{2\sqrt{\ }\ ;\ 103\}\{7-34\sqrt{\ }\ ;\ 103\}\ .$$

Le formule (3) (4) danno

$$\{2\sqrt{\ }\ ;\ 103\}=1\ .$$

Poscia per la (1) si ha

$$\{7-34\sqrt{\ };\ 103\}=-\{103\ ;\ 7-34\sqrt{\ }\}=-\{-6+13\sqrt{\ }\ :\ 7-34\sqrt{\ }\}.$$

Per la (3) si ha

$$\{\sqrt{\ }\ ;\ 7-34\sqrt{\ }\}=\sqrt{\ }\ .$$

Ed adoperando due volte la legge di reciprocità

$$\{13+6\sqrt{\ }\ ;\ 7-34\sqrt{\ }\}=\{7-34\sqrt{\ }\ ;\ 13+6\sqrt{\ }\}=\{-5-8\sqrt{\ }\ ;\ 13+6\sqrt{\ }\}=$$
$$=-\{13+6\sqrt{\ }\ ;\ 5+8\sqrt{\ }\}=-\{3\sqrt{\ }\ ;\ 5+8\sqrt{\ }\}\ .$$

La (3) dà

$$\{\sqrt{\ }\ ;\ 5+8\sqrt{\ }\}=-1\ .$$

Finalmente

$$\{3\ ;\ 5+8\sqrt{\ }\}=\{5+8\sqrt{\ }\ ;\ 3\}=\{-1+2\sqrt{\ }\ ;\ 3\}=-\{3\ ;\ -1+2\sqrt{\ }\}=$$
$$=-\{1-\sqrt{\ }\ ;\ -1+2\sqrt{\ }\}=-\sqrt{\ }\ .$$

Da tutte queste equazioni si deduce

$$\{68+14\sqrt{\ }\ ;\ 103\}=1\,(-1)\sqrt{\ }\,(-1)\,(-1)\,(-\sqrt{\ })=-1\ ,$$

Quindi $68+14\sqrt{\ }$ è rispetto al modulo **103** soltanto residuo quadratico. Infatti si trova

$$(57+20\sqrt{\ })^2\underset{103}{=\!=}68+14\sqrt{\ }\ ;$$

e la

$$X^2\underset{103}{=\!=}57+20\sqrt{\ }$$

non ha poi alcuna radice.

**70.** La teoria dei residui conduce alla determinazione dei divisori semplici di alcune formule. Così se cerchiamo tutti i divisori semplici degli interi espressi da $X^4-11$ essendo $X$ un intero qualunque; ciò è lo stesso come cercare tutti i moduli semplici, che rendono possibile la congruenza $X^4\equiv 11$ ; vale a dire tutti i moduli rispetto ai quali **11** è residuo biquadratico. Per la legge di reciprocità avremo

$$1=\{11\ ;\ p+\pi\sqrt{\ }\}=(-1)^{\pi:2}\{p+\pi\sqrt{\ }\ ;\ 11\}\ .$$

Quindi tutti i divisori di $X^4-11$ sono (senza parlare di $1+\sqrt{\ }$) gl'interi semplici, che hanno il coefficiente di ramuno divisibile per

quattro, e che sono residui biquadratici rispetto al modulo **11**; ed inoltre quegli interi semplici che hanno il coefficiente di ramuno imparimente pari, e che sono residui quadratici ma non biquadratici.

I primi di questi divisori semplici dovranno essere congruenti rispetto al modulo **11** con uno dei trenta interi

$$\pm(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2\pm V^{-1}\ ,\ 4\pm 2V^{-1}\ ,\ 5\pm 3V^{-1}\ ,\ 3\pm 4V^{-1}\ ,\ 1\pm 5V^{-1})$$

che hanno i logaritmi (§. 38.) paramente pari; ed i secondi (cioè quelli con $\pi \underset{2}{=} 2$) dovranno essere congruenti con uno dei trenta interi, che si hanno moltiplicando i precedenti per $V^{-1}$.

Per tal maniera si possono scegliere tra gli interi semplici tutti quelli che sono divisori di un qualche $X^4-11$. Così si ottengono i numeri primi-semplici **3**, **7**, **19**, **23**, **31**, **43**, ec. ed inoltre gli interi $3\pm 8V^{-1}$, $1\pm 16V^{-1}$, $13\pm 12V^{-1}$, $17\pm 8V^{-1}$, ec. e finalmente gli interi $1\pm 2V^{-1}$, $11\pm 6V^{-1}$, $11\pm 14V^{-1}$, $7\pm 18V^{-1}$, $17\pm 10V^{-1}$, $19\pm 6V^{-1}$, ec.

Ne viene che se $X=x$ sia reale, tutti i numeri primi composti divisori di $x^4-11$ sono **3**, **89**, **137**, **237**, **313**, **317**, **353**, **373**, **389**, **397**. ec. Forse col calcolo dei soli numeri reali non sarebbe stato facile determinare questi divisori.

Cerchiamo tutti i divisori semplici $P$ della formula $X^4-4+3V^{-1}$. Perchè sia $\{4-3V^{-1}\ ;\ P\}=1$ dovrà essere (§. 69.) $\{3+4V^{-1}\ ;\ P\}:\{V^{-1}\ ;\ P\}=1$, e quindi per la legge di reciprocità

$$\{P\ ;\ 3+4V^{-1}\}=\{V^{-1}\ ;\ P\}=V^{(pp+\pi\pi-1):4}.$$

Distinguiamo quattro casi:

1.° Se $p \underset{8}{=} \pm 1$, $\pi \underset{4}{=} 0$ sarà $P \underset{5+4V^{-1}}{=} \pm(1,\ 16,\ 10,\ 4,\ 18)$.

2.° Se $p \underset{8}{=} \pm 3$, $\pi \underset{4}{=} 0$ sarà $P \underset{5+4V^{-1}}{=} \pm(3,\ 2,\ 9,\ 20,\ 8)$.

3.° Se $p \underset{8}{=} \pm 1$, $\pi \underset{4}{=} 2$ sarà $P \underset{5+4V^{-1}}{=} \pm(11,\ 12,\ 13,\ 3,\ 7)$.

4.° Se $p \underset{8}{=} \pm 3$, $\pi \underset{4}{=} 2$ sarà $P \underset{5+4V^{-1}}{=} \pm(6,\ 14,\ 19,\ 17,\ 15)$.

Per esempio quando $X=3$ la data formula prende il valore $77+3V^{-1}$.

che è divisibile (oltrechè per $1-\sqrt{}$) per $13-2\sqrt{}$ , $3-2\sqrt{}$ . i quali interi semplici appartengono ai predetti casi 3.° e 4.° e sono congruenti il primo a $-3$, ed il secondo a $-13$.

Vogliansi tutti i divisori semplici degli interi compresi nella formula

$$X^2+8X-11\sqrt{} = (X+4)^2-16-11\sqrt{} ;$$

cioè si cerchino tutti i moduli rispetto ai quali $16+11\sqrt{}$ è residuo quadratico. Tale condizione si esprime con

$$1 = \{16+11\sqrt{} \; ; \; P\}^2 = \{\sqrt{} \; ; \; P\}^2 \{3-2\sqrt{} \; ; \; P\}^2 \{5-2\sqrt{} \; ; \; P\}^2 .$$

ossia per la legge di reciprocità

$$\{P \; ; \; 3-2\sqrt{}\}^2 \{P \; ; \; 5-2\sqrt{}\}^2 = \{\sqrt{} \; ; \; P\}^2$$

Distingueremo due casi. 1.° Se $\pi \underset{4}{=} 0$ è $\{\sqrt{} \; ; P\}^2 = 1$ , perciò $P$ dovrà essere o residuo quadratico rispetto ad ambedue i moduli $3-2\sqrt{}$ , $3-2\sqrt{}$ , oppure non-residuo rispetto ad ambedue, cioè o

$$P \underset{3-2\sqrt{}}{=} \pm(1, 4, 3) \text{ . e } P \underset{5-2\sqrt{}}{=} \pm(1, 4, 13, 6, 3, 9, 7)$$

oppure $P \underset{3-2\sqrt{}}{=} \pm(2, 3, 6)$, e $P \underset{5-2\sqrt{}}{=} \pm(2, 8, 3, 12, 10, 11, 14.)$:

2.° Se $\pi \underset{4}{=} 2$ dovrà essere o

$$P \underset{3-2\sqrt{}}{=} \pm(1, 4, 3) \text{ . e } P \underset{5-2\sqrt{}}{=} \pm(2, 8, 3, 12, 10, 11, 14)$$

oppure $P \underset{3-2\sqrt{}}{=} \pm(2, 3, 6)$, e $P \underset{5-2\sqrt{}}{=} \pm(1, 4, 13, 6, 3, 9, 7)$.

Per esempio quando $X = 16+10\sqrt{}$ la data formula prende il valore $264+389\sqrt{}$ , che col processo del §. 38. si divide nei due fattori semplici $23-22\sqrt{}$ $13+2\sqrt{}$ , i quali appartengono al 2.° caso, ed il primo è congruente rispetto ai due moduli $3-2\sqrt{}$ , $3-2\sqrt{}$ coi numeri 3, $-3$, ed il secondo è congruente coi numeri 3 . 9. — La nostra formula non potrebbe mai esser divisibile per l' intero semplice $1-4\sqrt{}$ , perchè esso appartiene al 1.° caso. ed è, rispetto ai due moduli $3-2\sqrt{}$, $3-2\sqrt{}$ congruente ai numeri $-3$, $+9$ : bensì essa può essere divisibile per $1-4\sqrt{}$ che è congruente ai numeri $-6$ , 11.

(*Letto nelle sessioni* 8 *Agosto e* 28 *Novembre* 1847.)

# NOTA

Il Cauchy in un Poscritto ad una sua Memoria (*Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut.* T. XXII. 1850. *pag.* 131) espone parecchi dei principii fondamentali da me pure adottati in questo Saggio: e dichiara che, dopo mature riflessioni, trova opportuno di sostituire alla teoria degl' immaginarii considerati come simboli, la teoria delle *quantità geometriche* esposta dal Saint-Venant nella sua Memoria inserita nei *Comptes rendus* pel 1845. T. XXI. pag. 620. Il nome di *equazioni geometriche* era stato da me pure adottato quando nel 1832 partendo dalla rappresentazione geometrica degli immaginarii inventai il metodo delle equipollenze.

Avendo io cercato di presentare in questo Saggio i metodi per facilitare i calcoli numerici, non mi sembra inopportuno di aggiungere alcune tavole tendenti allo stesso scopo.

## TAVOLA I.

*Numeri primi-semplici, e primi-composti, e interi-semplici, in cui questi si decompongono.*

| Primi semplici | Primi composti | Interi semplici | Primi semplici | Primi composti | Interi semplici |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | $1+\sqrt{}$ | 151 | 173 | $13+2\sqrt{}$ |
| 7 | 5 | $1+2\sqrt{}$ | 163 | 181 | 9 , 10 |
| 11 | 13 | $3+2\sqrt{}$ | 167 | 193 | 7 , 12 |
| 19 | 17 | 1 , 4 | 179 | 197 | 1 , 14 |
| 23 | 29 | 5 , 2 | 191 | 229 | 15 , 2 |
| 31 | 37 | 1 , 6 | 199 | 233 | 13 , 8 |
| 43 | 41 | 5 , 4 | 211 | 241 | 15 , 4 |
| 47 | 53 | 7 , 2 | 223 | 257 | 1 , 16 |
| 59 | 61 | 5 , 6 | 227 | 269 | 13 , 10 |
| 67 | 73 | 3 , 8 | 239 | 277 | 9 , 14 |
| 71 | 89 | 5 , 8 | 251 | 281 | 5 , 16 |
| 79 | 97 | 9 , 4 | 263 | 293 | 17 , 2 |
| 83 | 101 | 1 , 10 | 271 | 313 | 13 , 12 |
| 103 | 109 | 3 , 10 | 283 | 317 | 11 , 14 |
| 107 | 113 | 7 , 8 | 307 | 337 | 9 , 16 |
| 127 | 137 | 11 , 4 | 311 | 349 | 5 , 18 |
| 131 | 149 | 7 , 10 | 331 | 353 | 17 , 8 |
| 139 | 157 | 11 , 6 | 347 | 373 | 7 , 18 |

# TAVOLA II.

*Logaritmi degli interi (Veggasi §. 54.) per alcuni moduli primi-composti.*

**5**

| $2^\alpha$ | $\alpha$ | $\log\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | » |
| 2 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 3 |
| 1 | 4 | 2 |

**13**

| $2^\alpha$ | $\alpha$ | $\log\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | » |
| 2 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 |
| 8 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 2 |
| 6 | 5 | 9 |
| 12 | 6 | 5 |
| 11 | 7 | 11 |
| 9 | 8 | 3 |
| 5 | 9 | 8 |
| 10 | 10 | 10 |
| 7 | 11 | 7 |
| 1 | 12 | 6 |

**17**

| $10^\alpha$ | $\alpha$ | $\log.\alpha$ |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 0 |
| 15 | 2 | 10 |
| 14 | 3 | 11 |
| 4 | 4 | 4 |
| 6 | 5 | 7 |
| 9 | 6 | 5 |
| 5 | 7 | 9 |
| 16 | 8 | 14 |
| 7 | 9 | 6 |
| 2 | 10 | 1 |
| 3 | 11 | 13 |
| 13 | 12 | 15 |
| 11 | 13 | 12 |
| 8 | 14 | 3 |
| 12 | 15 | 2 |
| 1 | 16 | 8 |

**29**

| $10^\alpha$ | $\alpha$ | $\log.\alpha$ |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 0 |
| 13 | 2 | 11 |
| 14 | 3 | 27 |
| 24 | 4 | 22 |
| 8 | 5 | 18 |
| 22 | 6 | 10 |
| 17 | 7 | 20 |
| 25 | 8 | 5 |
| 18 | 9 | 26 |
| 6 | 10 | 1 |
| 2 | 11 | 23 |
| 20 | 12 | 21 |
| 26 | 13 | 2 |
| 28 | 14 | 3 |
| 19 | 15 | 17 |
| 16 | 16 | 16 |
| 15 | 17 | 7 |
| 5 | 18 | 9 |
| 21 | 19 | 15 |
| 7 | 20 | 12 |
| 12 | 21 | 19 |
| 4 | 22 | 6 |
| 11 | 23 | 24 |
| 23 | 24 | 4 |
| 27 | 25 | 8 |
| 9 | 26 | 13 |
| 3 | 27 | 25 |
| 1 | 28 | 14 |

**37**

| $2^\alpha$ | $\alpha$ | $\log\alpha$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 |
| 8 | 3 | 26 |
| 16 | 4 | 2 |
| 32 | 5 | 23 |
| 27 | 6 | 27 |
| 17 | 7 | 32 |
| 34 | 8 | 3 |
| 31 | 9 | 16 |
| 25 | 10 | 24 |
| 13 | 11 | 30 |
| 26 | 12 | 28 |
| 15 | 13 | 11 |
| 30 | 14 | 33 |
| 23 | 15 | 13 |
| 9 | 16 | 4 |
| 18 | 17 | 7 |
| 36 | 18 | 17 |
| 35 | 19 | 35 |
| 33 | 20 | 25 |
| 29 | 21 | 22 |
| 21 | 22 | 31 |
| 5 | 23 | 15 |
| 10 | 24 | 29 |
| 20 | 25 | 10 |
| 3 | 26 | 12 |
| 6 | 27 | 6 |
| 12 | 28 | 34 |
| 24 | 29 | 21 |
| 11 | 30 | 14 |
| 22 | 31 | 9 |
| 7 | 32 | 5 |
| 14 | 33 | 20 |
| 28 | 34 | 8 |
| 19 | 35 | 19 |
| 1 | 36 | 18 |

**41**

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 0 |
| 36 | 2 | 26 |
| 11 | 3 | 15 |
| 25 | 4 | 12 |
| 27 | 5 | 22 |
| 39 | 6 | 1 |
| 29 | 7 | 39 |
| 10 | 8 | 38 |
| 19 | 9 | 30 |
| 32 | 10 | 8 |
| 28 | 11 | 3 |
| 4 | 12 | 27 |
| 24 | 13 | 31 |
| 21 | 14 | 25 |
| 3 | 15 | 37 |
| 18 | 16 | 24 |
| 26 | 17 | 33 |
| 33 | 18 | 16 |
| 34 | 19 | 9 |
| 40 | 20 | 34 |
| 35 | 21 | 14 |
| 5 | 22 | 29 |
| 30 | 23 | 36 |
| 16 | 24 | 13 |
| 14 | 25 | 4 |
| 2 | 26 | 17 |
| 12 | 27 | 5 |
| 31 | 28 | 11 |
| 22 | 29 | 7 |
| 9 | 30 | 23 |
| 13 | 31 | 28 |
| 37 | 32 | 10 |
| 17 | 33 | 18 |
| 20 | 34 | 19 |
| 38 | 35 | 21 |
| 23 | 36 | 2 |
| 15 | 37 | 32 |
| 8 | 38 | 35 |
| 7 | 39 | 6 |
| 1 | 40 | 20 |

Mostriamo con un esempio l'uso delle precedenti tavole. Vogliasi risolvere la congruenza

$$X^3 \underset{1+4\sqrt{-1}}{\equiv} -3\sqrt{-1} :$$

rispetto al modulo $1+4\sqrt{-1}$ il secondo membro è $\equiv 5$ ; cercando questo 5 nella colonna $\alpha$ della tavoletta corrispondente al modulo 17 si trova $\log 5 = 7$ , il qual logaritmo deve dividersi per 3 ; ora si ha $7 \underset{16}{\equiv} 3 . 13$ , e cercando il logaritmo 13 nella stessa colonna $\alpha$ si vede che esso è logaritmo di 11 ; perciò

$$X \underset{1+4\sqrt{-1}}{\equiv} 11 \equiv 2 - 2\sqrt{-1} .$$

La congruenza non ha che questa sola radice .

## TAVOLA III.

*Logaritmi degli interi per alcuni moduli primi-semplici*

(*Veggasi* §. 58, 59.)

**Modulo 3.**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 |
| 4 | 0 | 8 |
| 7 | 6 | 1 |

**Modulo 7.**

Veggasi la tavola data al §. 58

**Modulo 11.**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 99 | 103 | 110 | 97 | 52 | 78 | 32 | 47 | 70 | 113 | 69 |
| 23 | 75 | 28 | 46 | 79 | 54 | 89 | 86 | 8 | 45 | 73 |
| 100 | 38 | 27 | 41 | 95 | 6 | 25 | 31 | 117 | 118 | 80 |
| 77 | 116 | 61 | 63 | 34 | 42 | 74 | 33 | 11 | 16 | 67 |
| 62 | 119 | 55 | 104 | 51 | 30 | 21 | 4 | 65 | 49 | 22 |
| 108 | 84 | 36 | 72 | 60 | 0 | 120 | 12 | 96 | 24 | 48 |
| 82 | 109 | 5 | 64 | 81 | 90 | 111 | 44 | 115 | 59 | 2 |
| 7 | 76 | 71 | 93 | 14 | 102 | 94 | 3 | 1 | 56 | 17 |
| 20 | 58 | 57 | 91 | 85 | 66 | 35 | 101 | 87 | 98 | 40 |
| 13 | 105 | 68 | 26 | 29 | 114 | 19 | 106 | 88 | 15 | 83 |
| 9 | 53 | 10 | 107 | 92 | 18 | 112 | 37 | 50 | 43 | 39 |

## Modulo 19, Base $3+\sqrt{}$

| $m$ | Num. | Logar. | $n$ | Interi | Logar. | Interi | Logar. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 | 1 | $-3+7\sqrt{}$ | 18 | $3-\sqrt{}$ | 19 |
| 2 | 5 | 40 | 2 | $-2-4\sqrt{}$ | 36 | $-2+5\sqrt{}$ | 37 |
| 3 | −7 | 60 | 3 | $-4-2\sqrt{}$ | 54 | $9+9\sqrt{}$ | 55 |
| 4 | 6 | 80 | 4 | $7-3\sqrt{}$ | 72 | $5-2\sqrt{}$ | 73 |
| 5 | 3 | 100 | 5 | $+\sqrt{}$ | 90 | $-1+3\sqrt{}$ | 91 |
| 6 | −8 | 120 | 6 | $-7-3\sqrt{}$ | 108 | $1+3\sqrt{}$ | 109 |
| 7 | −4 | 140 | 7 | $4-2\sqrt{}$ | 126 | $-5-2\sqrt{}$ | 127 |
| 8 | −2 | 160 | 8 | $2-4\sqrt{}$ | 144 | $-9+9\sqrt{}$ | 145 |
| 9 | −1 | 180 | 9 | $3+7\sqrt{}$ | 162 | $2+5\sqrt{}$ | 163 |
| 10 | −10 | 200 | 10 | $-1$ | 180 | $-3-\sqrt{}$ | 181 |
| 11 | −5 | 220 | 11 | $3-7\sqrt{}$ | 198 | $-3+\sqrt{}$ | 199 |
| 12 | 7 | 240 | 12 | $2+4\sqrt{}$ | 216 | $2-5\sqrt{}$ | 217 |
| 13 | −6 | 260 | 13 | $4+2\sqrt{}$ | 234 | $-9-9\sqrt{}$ | 235 |
| 14 | −3 | 280 | 14 | $-7+3\sqrt{}$ | 252 | $-5+2\sqrt{}$ | 253 |
| 15 | 8 | 300 | 15 | $-\sqrt{}$ | 270 | $1-3\sqrt{}$ | 271 |
| 16 | 4 | 320 | 16 | $7+3\sqrt{}$ | 288 | $-1-3\sqrt{}$ | 289 |
| 17 | 2 | 340 | 17 | $-4+2\sqrt{}$ | 306 | $5+2\sqrt{}$ | 307 |
| 18 | 1 | 360 | 18 | $-2+4\sqrt{}$ | 324 | $9-9\sqrt{}$ | 325 |
| | | | 19 | $-3-7\sqrt{}$ | 342 | $-2-5\sqrt{}$ | 343 |

*Pel modulo* **23** *veggasi la tavola al* §. **39.**

## Modulo 31, Base $1-4\sqrt{}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 32 | 1 | $-10-5\sqrt{}$ | 30 | $1+4\sqrt{}$ | 31 |
| 2 | 10 | 64 | 2 | $13+7\sqrt{}$ | 60 | $10-14\sqrt{}$ | 61 |
| 3 | 15 | 96 | 3 | $-2-11\sqrt{}$ | 90 | $-15-3\sqrt{}$ | 91 |
| 4 | 7 | 128 | 4 | $-4-4\sqrt{}$ | 120 | $11+12\sqrt{}$ | 121 |
| 5 | −5 | 160 | 5 | $-11-2\sqrt{}$ | 150 | $12+11\sqrt{}$ | 151 |
| 6 | 8 | 192 | 6 | $7+13\sqrt{}$ | 180 | $-3-15\sqrt{}$ | 181 |
| 7 | 12 | 224 | 7 | $-5-10\sqrt{}$ | 210 | $-14+10\sqrt{}$ | 211 |
| 8 | −13 | 256 | 8 | $+\sqrt{}$ | 240 | $4+\sqrt{}$ | 241 |
| 9 | −4 | 288 | 9 | $5-10\sqrt{}$ | 270 | $-4+\sqrt{}$ | 271 |
| 10 | −6 | 320 | 10 | $-7+13\sqrt{}$ | 300 | $14+10\sqrt{}$ | 301 |
| 11 | −9 | 352 | 11 | $11-2\sqrt{}$ | 330 | $3-15\sqrt{}$ | 331 |
| 12 | 2 | 384 | 12 | $4-4\sqrt{}$ | 360 | $-12+11\sqrt{}$ | 361 |
| 13 | 3 | 416 | 13 | $2-11\sqrt{}$ | 390 | $-11+12\sqrt{}$ | 391 |
| 14 | −11 | 448 | 14 | $-13+7\sqrt{}$ | 420 | $15-3\sqrt{}$ | 421 |
| 15 | −1 | 480 | 15 | $10-5\sqrt{}$ | 450 | $-10-14\sqrt{}$ | 451 |
| | | | 16 | $-1$ | 480 | $-1+4\sqrt{}$ | 481 |

Altre tavole si potrebbero formare adoperando pel modulo 53 alcuna delle radici primitive 2, 3, 5, 8, ec.; pel 61 alcuna delle 10, 2, 6, 7, ec.; pel 73 le 5, 11, 20, ....; pel 89 le 3, 6, 7 ...; pel 97 le 10, 5, 7 ....; pel 109 le 10, 6, 11 ....; pel 113 le 10, 3, 5, 6 ...; pel 137 le 3, 5, 6, 12, 13, 20, ....; ec.

Pel modulo 43 potrebbe servire la radice primitiva $1+2\sqrt{}$; pel 47 la $1-2\sqrt{}$ o la $3-\sqrt{}$; pel 59 la $3+\sqrt{}$; pel 67 la $3+2\sqrt{}$; ec.

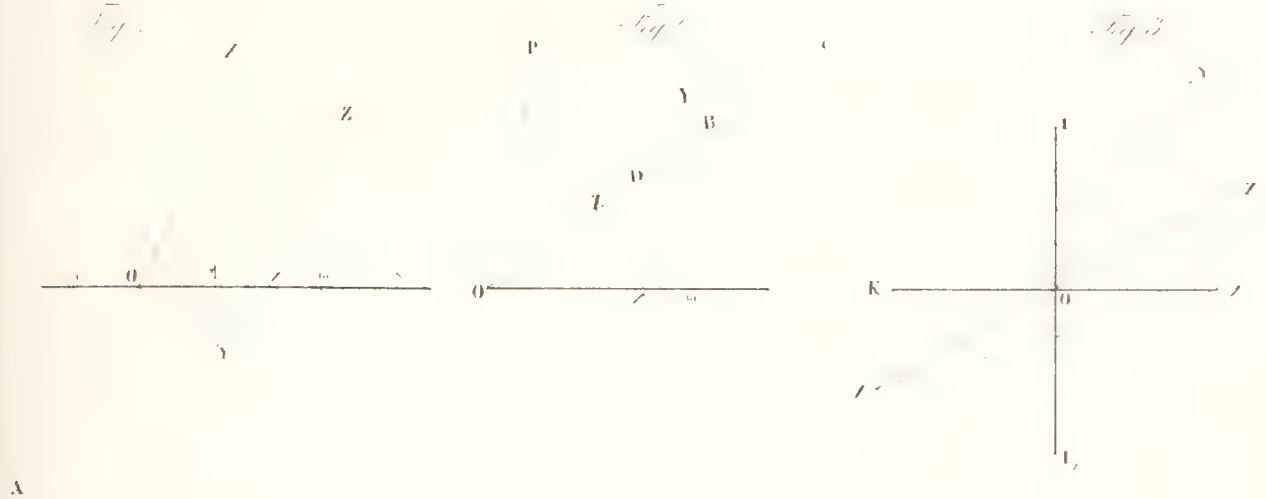


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Z
P
Y
B
D
O
K
A

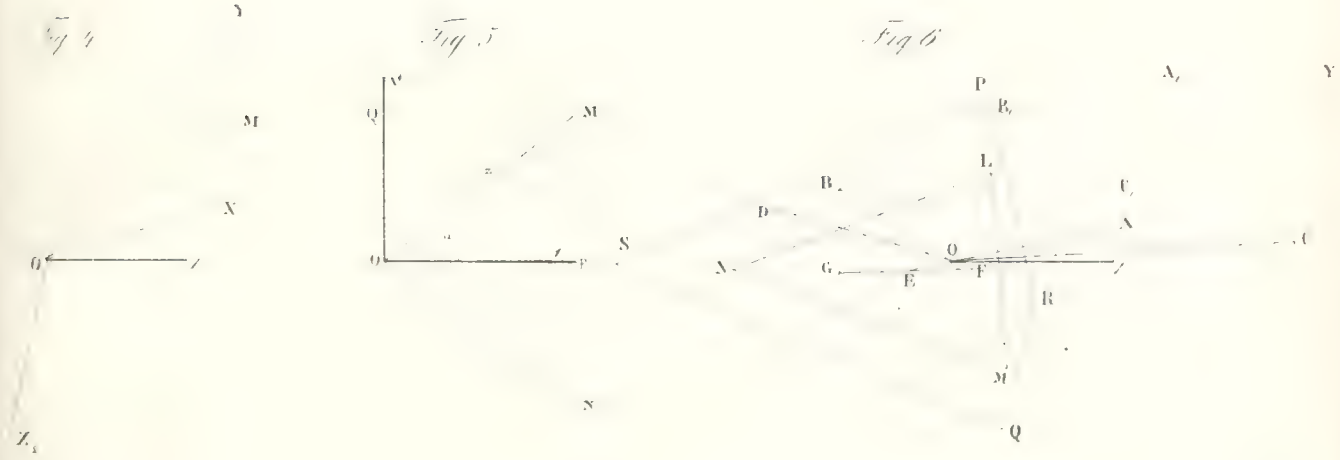


Fig 4
Fig 5
Fig 6
M
N
O
Q
S
P
L
R

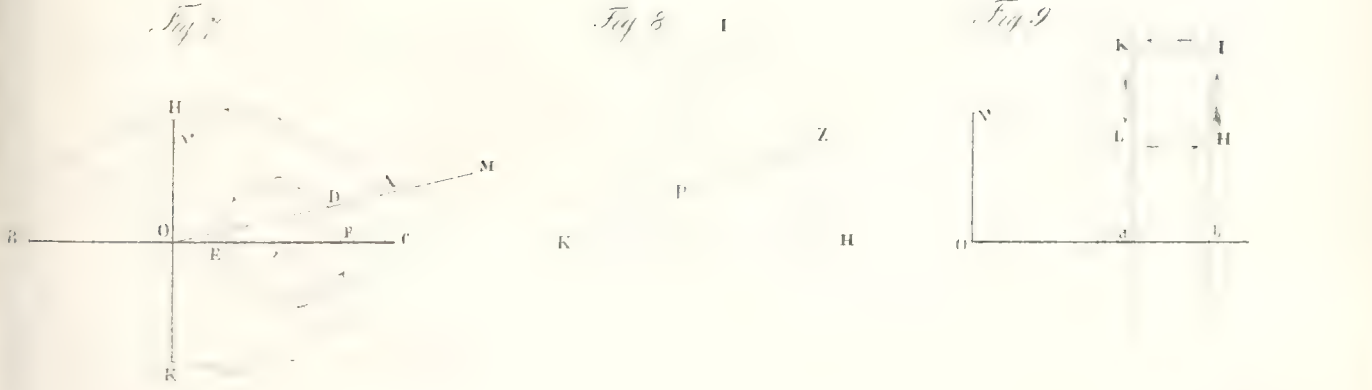


Fig 7
Fig 8
Fig 9
H
M
D
E
F
C
K
Z
P
L

# SULLA COLTIVAZIONE

DEI

# GELSI E DE' FILUGELLI

E SUL MODO

# DI DIFFONDERE LE BUONE PRATICHE

NELLE

## PROVINCIE VENETE

DI GHERARDO FRESCHI

Lo stato della serica industria si può considerare sotto tre aspetti, cioè sotto l' aspetto agricolo, sotto l' aspetto zootecnico e sotto l' aspetto manifatturiero. Trattandosi di un' industria che è la più adatta alla natura del nostro clima e del nostro suolo, la più anziana e più famigliare alle nostre abitudini, e soprattutto la più viva e lucrosa di qualsiasi altra, mi è sembrato argomento di non poco interesse dare una rapida occhiata allo stato in ch' ella si trova, in un tempo in cui non si parla che di progresso, e in cui le scienze, applicatesi ai bisogni della vita, hanno fatto realmente progredire tutte le arti utili, conciliando per questa via a sè stesse non più la sterile ammirazione d' una misteriosa e privilegiata sapienza, ma la gratitudine di reali e sensibili benefizii.

Riservando peraltro ad una speciale Memoria la parte manifatturiera, io non mi occuperò in questa, che della parte agricola e zootecnica, considerando 1.° quali progressi abbia fatto la coltivazione del gelso; 2.° quali progressi abbia fatto l'arte di allevare i bachi da seta. Sebbene diverse queste due arti, esse nondimeno hanno fra di loro sì stretta relazione, che mi è piaciuto farne due parti di una sola Memoria, anzichè di una distinta Memoria per ciascheduna. Esse appartengono entrambe all'Agricoltura; si giovano reciprocamente; non possono progredire l'una dall' altra indipendenti; sono infine inseparabili rispetto alla quantità e qualità di quella preziosa materia, che servono a produrre, di quella materia che ben può dirsi il vello d'oro dell' età nostra.

Vedremo pertanto quali progressi abbian fatto tra noi l'arte agraria e la zootecnia in ambedue queste parti della serica industria; quanto la comune pratica ne abbia approfittato, e come i buoni metodi possano rendersi più popolari, se qualche ostacolo per avventura s'opponesse alla loro diffusione.

## PARTE PRIMA

### *Della coltivazione del gelso.*

Un fatto, che dee colpire qualunque osservatore, si è, senza dubbio, l'estensione che ha preso da pochi anni in queste Provincie la coltivazione de' gelsi. Tranne forse il Veronese e il Vicentino, questa coltivazione non era certo, trent' anni fa, così estesa nelle altre Provincie come è oggidì, che la vediamo diffondersi nel Padovano e nel Polesine, ma più largamente nel Trevigiano e nel Friuli; nel Friuli singolarmente, che malgrado l'antica riputazione della sua seta, malgrado i consigli e gl'insegnamenti dello Zanon e malgrado gl' incoraggiamenti dell'Accademia Agraria e dei Reggitori della città d' Udine, rimanevasi stazionario anzi languente nella produzione di questa merce fin molto innanzi nel secolo presente; ma che per vero dire l'ha più che triplicata da trent' anni a questa parte.

Imperciocchè il Friuli, che poco oltre la metà del passato secolo non produceva a mala pena 400,000 chilogrammi di bozzoli, ne produce ora quasi un millione di più. Ora questo considerabile aumento lo dev'esso a ben due millioni di gelsi, i più vecchi de'quali contano appena 30 anni. Se poi tale aumento di produzione abbia proceduto con pari proporzione nelle altre Provincie, io non mi starò adesso a ricercarlo, giacchè non è mio subbietto un'indagine statistica; ma quello che puossi affermare senza l'appoggio de'calcoli si è, che da per tutto la coltivazione de'gelsi ha preso e va prendendo sempre maggiore estensione; fatto di cui basta a convincere i più increduli una semplice occhiata, e che si argomenta eziandio da quella sterminata moltitudine di gelsi da piantonaia, che concorrono ogni anno in Primavera su tutti i mercati.

Questo fatto pertanto non si può seriamente negare: esso prova almeno, che il senso comune, che non s'inganna di leggeri sul tornaconto, ha vinto per sempre le obbiezioni e i pregiudizii che fecero per lungo tempo la guerra alla coltivazione del gelso, e che ben lungi da temere le conseguenze dell'eccessiva produzione e i danni che si pretendeva recati dal gelso agli altri raccolti, esso cerca a tutta possa di accrescere la produzione de'bozzoli, e riguarda il gelso e direi quasi lo venera come il palladio dell'Agricoltura. Sotto questo punto di vista adunque, cioè quanto all'estensione della coltura de'gelsi, forza è riconoscere un progresso.

Ma coll'estendersi della coltivazione procede del pari, ed ovunque, la buona coltivazione? A questo gran numero di gelsi che si piantano ogni anno, corrisponde egli il prodotto in modo da compensare largamente l'occupazione del fondo e le spese di coltivazione? Che fino ad ora siavi stato un tornaconto non è da dubitarne, poichè altrimenti la coltivazione del gelso lungi dall'avanzare, come vedemmo, sarebbe oramai caduta in abbandono, come avvenne in quelle regioni, cui la niegava natura, e dove gli sforzi dell'umana industria avendola chiamata in onta dell'eterno divieto, si provarono indarno di ritenervela. Ma non basta che vi sia un tornaconto qualunque; bisogna che questo sia nella massima parte indipendente dal favore di certe

circostanze eventuali facilmente mutabili; bisogna che sia fondato in modo che, anche mutando quelle circostanze, gli rimanga sufficiente base a sussistere. Ognuno sa che da alcuni anni il prezzo de' bozzoli si sostiene a un certo livello, poco variabile fra un anno e l'altro, malgrado le sensibilissime oscillazioni de' prezzi delle sete; di che io non saprei trovare altra ragione, che le gare de' filandieri, gare fomentate non tanto da pura speculazione, quanto da altre cause da indagarsi nelle umane passioni. Comunque sia fatto sorprendente, questa emulazione tra compratori fu sin qui vantaggiosissima a' produttori; e il reddito de' gelsi recò all' industria agricola benefizii sufficienti per allettarne vie più la coltivazione. Ma se i prezzi de' bozzoli si equilibrassero coi prezzi della seta, declinando questi ultimi per l'una o l'altra delle varie cagioni ond' è questa merce dominata, resterebbe egli tuttavia un margine ai benefizii che l'Agricoltura aspetta da' suoi gelsi? Io credo che sì; ma soltanto a condizione, che un agricoltore ricavi dalle sue piantagioni molto di più, che non ne ritrae un altro, posto nelle medesime circostanze; o in altri termini, a condizione che si aumenti il prodotto della foglia, e quindi la produzione de' bozzoli, senza estendere le piantagioni. Non v' ha dubbio; di qualunque coltivazione si tratti, il problema agrario è sempre lo stesso: ottenere il maggior prodotto colla minore spesa possibile; e dalla soluzione più o meno felice di questo problema dipenderanno sempre i vantaggi, o le perdite dell' agricoltore.

A questa condizione adunque la coltivazione del gelso sarà sempre utile per le nostre Provincie, e massimamente per quelle, che, fornite di minore fertilità per le altre naturali produzioni, sono in compenso fertilissime per la produzione della seta. Ma quantunque il gelso sia dalla natura dotato (fate grazia all' espressione) di sì buon temperamento, che anche mediocremente trattato e perfino maltrattato, rende, finchè gli basta la vita, un qualche benefizio; nondimeno facciano senno gli agricoltori di non illudersi; nè confidino troppo nella benigna natura che protegge le piante, e nella fortuna che sostenta i prezzi delle produzioni agricole. Se i gelsi male educati producono poco, relativamente al terreno occupato e alle spese di coltivazione; se male

governati deperiscono e muoiono; se d' altra parte decade il prezzo de' bozzoli, addio benefizii.

Laonde parmi di non poca importanza considerare le pratiche più comunemente usate nel piantare e nell' educare il gelso, come pure nel governarlo adulto. Potremo portare un giudizio tanto più sicuro sul valore di codeste pratiche quanto che, grazie ai lumi della Fisiologia e della Chimica vegetale, l' Agricoltura ha oggimai rettificato e perfezionato i principii e le teorie che le servono di scorta nell' educazione delle piante arboree. Che se queste pratiche esaminate col criterio della scienza si trovassero all' intutto o in qualche parte difettose, a che gioverebbe l' opporre i precarii vantaggi fin qui ottenuti? Basta forse un esito fortunato a giustificare gli errori?

E che più o meno opposte ai sani principii di una buona Agricoltura siano le pratiche comuni in ciò che concerne i gelsi, si può arguirlo a prima vista dal solo confronto che ognuno può istituire tra i gelsi coltivati da un agricoltore intelligente, che esista in qualche Distretto, e i gelsi coltivati dagli altri agricoltori del circondario. Senza certe diversità di circostanze, poichè l' esposizione, la natura de' terreni, infine tutte le circostanze fisiche non possono offrire in un medesimo territorio variazioni importanti, voi vedete talvolta tra una coltivazione e l' altra immense differenze: qui gelsi bene cresciuti e bene formati, colà gelsi meschini, deformi, invecchiati anzi tempo, e che col doppio d' età non danno la metà del prodotto di quelli. Ne argomenterete a buon diritto una differenza nel modo di trattarli, modo più o meno perfetto da una parte secondo le vostre idee, ma pessimo assolutamente dall' altra.

Così spingendo i confronti tra Distretto e Distretto, tra Provincia e Provincia, osserverete dove più dove meno allontanarsi le pratiche volgari dalla pratica intelligente, e ricercandone gli essenziali difetti, ne troverete alcuni che sono universali, forse perchè inerenti alla umana natura, altri che sono particolari, perchè dipendenti da abitudini locali. Comune per esempio a tutti i paesi e ad ogni classe di agricoltori, salvo qualche eccezione, scorgerete il difetto di raccogliere troppo presto la foglia dai gelsi novelli per avidità d' interesse; più partico-

lare a certi paesi il difetto di spogliare questi gelsi non solo della foglia, ma anche de' rami, senza distinzione di età e di altre circostanze.

In generale si pianta meglio che non si educa, e l' educazione ha meno difetti del governo delle piante adulte. Io credo che eccetto pochi ignorantissimi ed ostinati, nessuno pianti oggi un gelso d'alto fusto in una piccola buca, ma che qualunque agricoltore, per poco che conosca il suo mestiere, faccia molto caso e usi ogni diligenza nello scavare molto spaziosa la buca, o meglio scavando un fosso continuo se si tratti di piantagioni in fila.

La separazione dello strato coltivato dal sottoposto nello scavare la buca, o la fossa; la scelta della varietà di gelso più conveniente, almeno secondo l' opinione; tutte quelle cure ragionevolissime raccomandate da' migliori agronomi, e specialmente dal co. Verri, nel porre i gelsi a stabile dimora, osservo in generale che non sono neglette. Il bene in questa faccenda si è che i proprietarii, o i loro agenti, se anche non ispingono l' amore de' gelsi sino a curarne l' educazione, sì ne sorvegliano ordinariamente la piantagione, persuasi almeno, che il ben piantare sia la parte più essenziale come è la prima della coltivazione. Da ciò è derivato certamente che i contadini in generale hanno contratto l' abitudine di piantar bene.

Ma non è così della educazione. Pochi proprietarii, e solo in piccoli poderi, si prendono la cura di dirigere personalmente l' educazione de' proprii gelsi: ne' grandi poderi questa bisogna è per lo più abbandonata ai gastaldi, i quali non ne sapendo più de' coloni, l'abbandonano intieramente ad essi. Ora i coloni fanno quel meglio che sanno, se partecipano giustamente de' benefizii di questa coltivazione; fanno all' incontro quel peggio che possono, se non vi partecipano. E quale ostacolo sia questa ultima circostanza ai miglioramenti delle pratiche è facile pensarlo.

Il metodo più comunemente invalso nell' educare i gelsi a pien vento, si è quello di abbandonare la pianta alla sua naturale vegetazione dopo praticato quel primo taglio de' rami, che si fa al momento della piantagione. In questo abbandono la si lascia per alcuni anni sino a che si può considerare adulta, ma la si considera tale dopo

tre, o quattro anni per raccogliere più presto. Questa pratica seguita non solo dal volgo contadinesco, ma da molti eziandio che si credono periti in Agricoltura, è nell'opinione di questi fondata sul principio fisiologico, che un albero cresce più presto e diviene più robusto, qualora gli si lasciano intatti i rami e le foglie; ma per la maggior parte degli agricoltori, non ha altra ragione che l'indolenza; la quale trova ottimo tutto ciò che la dispensa da sollecitudini e da fatica. Quel principio per altro è vero in sè stesso, ma in questo caso è male applicato. È vero perchè le piante non si nutrono e crescono per solo officio degli organi terrestri ossia delle radici, ma vi è necessario il concorso degli organi aerei che sono le parti verdi e le foglie; e il tempo, che una pianta impiega a riprodurre questi organi, è tutto sottratto all'accrescimento: il fatto lo dimostra. Ma il principio è male applicato, perciocchè la questione del tempo, ossia il divenir più presto grande e robusta la pianta, non è il solo fine dell'educazione dei gelsi; ma uno de'fini cui deve mirare è una certa forma e una certa distribuzione de'rami, la quale offra ad un tempo facilità alla sfrondazione, sicurezza al raccoglitore, e abbondanza di foglia. Ora senza tagliar qualche ramo non è possibile regolare come si vuole la forma di una pianta, e per questo solo oggetto gli agronomi tutti, e il co. Verri in principalità, prescrissero quell'annuo taglio sistematico; nè mai alcuno di essi intese, che il taglio serva a far crescere la pianta, ma bensì a darle la forma desiderata, e a moltiplicare i rami e le foglie. Siccome peraltro è non meno vero, che il recidere ogni anno alla pianta le sue messe novelle e lo spogliarla della maggior parte delle sue gemme, come insegna il Verri, cagiona un sensibilissimo ritardo nell'accrescimento di tutto il corpo della pianta, e tale una differenza tra le piante trattate in questa guisa e quelle abbandonate a una libera vegetazione, che si direbbe avere il co. Verri e i suoi seguaci perduto di vista il principio fisiologico, o averlo sacrificato alla forma; così non è meraviglia se i pratici in generale hanno abbandonato quel metodo per seguirne uno diametralmente opposto. Ma così facendo sono incorsi in tutti quei difetti che costituiscono il carattere d'ogni estremo, e si condussero per una mala applicazione di principio, come il volgo si conduce per ignoranza o per indolenza.

Del resto, che il volgo non si accorga de' suoi difetti, ciò sta nella sua natura, che lo fa schiavo delle proprie abitudini; ma che non se ne avveggano essi, è cosa per vero dire non compatibile. E sì che nulla v' è di più evidente e di più palmare degl' inconvenienti presentati dall' accennato estremo. Non vedono codesti pratici, che abbandonato a sè stesso un gelso dopo averlo piantato e ridotto con due o tre soli rami troncati a poca altezza, e' caccia da quei monconi e dalla testa del tronco tante verghe e virgulti, i quali allungandosi senza proporzione, e poco o sregolatamente ramificando per tutti quei tre o quattro anni, che lo si lascia in questo abbandono, finiscono col formare un ammasso confuso di polloni e di polloncelli, che costituiscono un informe cespuglio anzichè la corona di un albero, i cui rami sieno in bell' ordine disposti?

Lasciato così in balía di sè stesso, il gelso fa mostra, è vero, dopo quattro anni d' un robusto pedale, il cui diametro supera almeno di un terzo i gelsi educati col metodo di Verri; ma che serve? codesto vantaggio, chi ben riflette, è un' illusione; perciocchè, a dare una forma a quella pianta è mestieri diradare quel cespuglio, abbattere molti rami, troncarne alcuni a varie altezze, in una parola distruggere per costruire di nuovo.

Ci vogliono poi due anni almeno, perchè la pianta rifaccia quanto ha perduto; ma intanto ch' essa lavora a quest' uopo, e a cicatrizzare le moltiplici e larghe sue ferite, essa non si nutre gran fatto, e non cresce; sicchè in questo intervallo perde tutto il vantaggio che aveva acquistato, e in capo a questo, cioè al sesto anno della sua piantagione, non si trova essere punto più avanzata di quelle educate alla Verri, col non piccolo svantaggio di non aver mai come quelle un ampio e bene ordinato castello.

Confesso sinceramente, che sebbene a me poco garbino que' gelsi foggiati a mo' di corba o di canestro, che alla fin fine non porgono alcuna comodità maggiore, nè maggior sicurezza a chi sfronda, che non ne porga un gelso foggiato secondo il suo tipo naturale, nondimeno se non avessi a scegliere che fra l' uno e l' altro dei due opposti metodi, de' quali si ragiona, darei senza alcuna dubitazione la

preferenza a quello dell'agronomo milanese, siccome almeno più razionale e più in armonia fra lo scopo ed i mezzi.

Ma essendo che il vero fugge sempre gli estremi e sta, come suol dirsi, fra due; perciò io sono d'opinione, che a più savio consiglio si attengano quegli agricoltori che seguono un sistema di mezzo tra i due accennati, e che in conseguenza piantato che abbiano il gelso in Primavera e lasciatolo per tutto l'anno riempirsi di fronde, non però sulla testa del pedale, ma solo sulle braccia, gli recidono poi nel febbraio successivo tutte quante le messe per intiero, a riserva di una per braccio, che serbano intatta, destinandola a formare in continuazione con esse braccia le branche principali. Indi per altri quattro anni lasciano ramificare queste messe a loro talento, senza prestarvi altre cure che di sopprimere colle dita, appena che si mostrano fuori, quelle gemme che trovansi aggruppate nelle parti inferiori ed esterne di ciascuna branca, serbandone d'ogni gruppo una sola, affinchè si svolga più rigogliosa; recidendo quelle sole verghe che si dirigono a incrocicchiarsi verso il centro del castello, e mutilando a un'altezza proporzionata alle altre quelle che non fanno che allungarsi perpendicolarmente senza punto ramificare. Con queste piccole diligenze usate ogni anno durante la Primavera si ottengono in cinque soli anni gelsi robusti, bene ramificati e ricchi di fronde, i quali si possono mettere a profitto al quinto anno, purchè si tolgano loro con delicatezza le sole foglie, senza guastare le gemme che devono riprodurle.

Questo metodo, di cui ho diffusamente insegnato la pratica nell'*Amico del Contadino* (1), e che, per quanto l'esperienza di molti anni lo conferma, è il più vero e ragionevole, e quello che meglio di ogni altro concilia il principio della conservazione degli organi nutritivi, coi fini della forma regolare, dell'abbondante produzione, e della facilità e sicurezza di raccogliere; questo metodo, dicea, si va ora propagando qua e là, ma non già con quella rapidità che sarebbe a desiderarsi; e la causa ne è quella poc'anzi accennata, cioè l'essere troppo generalmente l'educazione de'gelsi abbandonata all'indolenza e alla ignoranza de'contadini.

(1) Anno 1.° 1843 Foglio n.° 2.

Che se questa causa influisce tanto sulla lenta diffusione de' buoni metodi di educare, per cui è sì raro incontrarsi in una estesa piantagione di gelsi che soddisfi l'occhio intelligente di un amatore, sia desso seguace del Verri, o di qualsiasi altro maestro di pratiche più o meno razionali; viemaggiormente influisce sul progressivo sviluppo delle piante, sulla loro durata e sulla quantità e qualità della foglia, cose tutte che dipendono non tanto dalla prima educazione, quanto dal metodo successivo di governare la pianta, dal momento che si è cominciato a raccoglierne il frutto.

Il governo de' gelsi comprende tutte le operazioni cui vengono assoggettati dacchè si è fatta la prima raccolta, cioè la sfrondatura, la mondatura, la potazione, e lo scalvamento; ma si riferisce a due stati delle piante, che importa molto distinguere, vale a dire lo stato di una pianta tutt' ora in crescere, e quello di una pianta che ha raggiunta la sua maggiore grandezza, determinata sia dalla forza del suolo, sia dalle viste particolari dell' agricoltore.

Nella pratica generale tutte codeste operazioni, salvo la mondatura, non hanno per fondamento alcun sano principio, ma sono puramente guidate da consuetudini locali. La raccolta si fa in certi momenti con tanta fretta, atteso specialmente il poco ordine che vi si mette, che non lascia tempo di scegliere il modo più conveniente di eseguirla.

Qui è dove si mostra più che mai l' arbitrio del contadino e la sua ignoranza. Guai s' egli non ha per un giusto patto una parte sufficente nel reddito della foglia raccolta sulla campagna affidatagli, e peggio ancora se gode solo il prodotto della legna. Sfogliare e scalvare sono per lui in questi casi una cosa identica, perchè con pochi colpi di accetta serve doppiamente al suo interesse liberando il suo campo dall' ombra che lo molesta e di cui esagera il danno, e procurando copia di legna al suo focolare. Ma ov'anche il contadino non fosse spinto da un interesse contrario a quello del padrone de' gelsi, ei li rovina per la sola ragione che vi adopera il ferro sempre ad un modo senza far distinzione alcuna dello stato e dell' età delle piante.

Ora se per esempio l'uso del paese è di sfrondare tagliando tutti i rami, eccettuati i principali o maestri, essi sfrondano nella stessa guisa

tanto i giovani gelsi, quanto i vecchi. Il qual barbaro uso, che esiste specialmente nel Friuli, se anche per avventura non recasse nocumento ai gelsi già formati o vecchi, ne reca un gravissimo e forse irreparabile alle piante novelle, perchè si oppone al loro aumento, e le arresta così nel loro progresso, che mai più acquistano la grandezza e la forma di cui erano capaci. Quanti gelsi non si veggono dapertutto, eccetto che nel Veronese e nel Vicentino, i quali avendo quindici, venti e sino trent' anni, non sono niente più cresciuti, nè danno punto più foglia, anzi ne danno assai meno, che qualche gelso di soli sei anni meglio governato? Ciò appunto proviene dal taglio precoce e indiscreto che vi si fa per malizia o per una cattiva abitudine. S'egli fosse mai possibile che questi gelsi, resistendo a siffatti maltrattamenti, giungessero all' età di cento anni, non uguaglierebbero certo giammai in grandezza quei maestosi gelsi secolari che ancora ci rimangono qua e là come testimonii della perizia de' nostri avi, veri monumenti di gloria per essi e di vergogna per noi, che presumiamo d' essere in tutto migliori. Conciossiachè in questo pessimo modo di governare i gelsi non pecchino soltanto i contadini, ma i proprietarii stessi illuminati, e che hanno tutto l' interesse di conservare i gelsi e di accrescerne la produzione; eglino stessi, che pure li educarono con intelligenza e con sollecitudine, quando siamo a quella di sfrondare e di potare, eccoli divenuti contadini, eccoli schiavi delle abitudini del loro paese, e quel che è peggio persuasi che siffatte abitudini convengano alle circostanze loro senza aver mai sperimentato altri metodi.

Del resto in quei paesi ove si *manomettono* i gelsi così *crudelmente*, sia necessità, sia prudenza, i proprietarii meno avidi lasciano riposar di tratto in tratto i loro gelsi; e i più giudiziosi sogliono dar loro questo riposo periodicamente e per turno. Con ciò ritardano almeno la perdita delle piante, e prevengono il caso possibile di dovere una volta o l' altra rinunciare per forza a tutto il raccolto.

Ma questo rimedio, se usato a lunghi intervalli (p. e. di cinque a sei anni), è di poca efficacia per la durata delle piante; usato a più brevi periodi, giova bensì un po' meglio alla loro conservazione, ma non basta ad aumentarne il prodotto.

Variano peraltro moltissimo da Provincia a Provincia, e sovente nella stessa Provincia e nello stesso Distretto i modi di sfrondare e di tagliare i gelsi. Ovunque si sfoglia senza tagliare verghe nè rami, il taglio o la potatura è un' operazione a parte, ma essa varia non che nel grado, nel tempo eziandio che si lascia correre tra una e l' altra. Qua si tagliano totalmente tutti i rami minori, non lasciando sulle branche madri, che gli sprocchi de' rami più grossi; altrove si lasciano questi sprocchi più lunghi, e sovr' essi anche alcuni pochi de' rami minori, pure accorciati, e questa potatura si fa dove ogni anno, dove al compiersi di due, di tre e di più anni.

Chi volesse cercare il principio teorico di queste varietà di usi, lo cercherebbe invano. La diversità delle condizioni cosmo-telluriche che si adduce da alcuni per giustificarsi, non è mai sì grande fra paese e paese in una stessa Provincia, che valga a darne una ragione sufficiente; e dall' altra parte due metodi affatto diversi trovansi talvolta in tale non dubbia parità di circostanze, che o l' uno o l' altro deve necessariamente essere meno adattato alle circostanze medesime. Non può quindi assegnarsi a queste varietà alcun principio, ma soltanto il capriccio o la forza dell' abitudine, che seguendo l' agricoltore che muta dimora, trasporta in un paese i metodi dell' altro.

Se non che è d' uopo confessare ingenuamente che se anche gli agricoltori avessero la ferma volontà di emanciparsi dalle abitudini per servire a' principii di ragione, ei non saprebbero davvero a qual partito appigliarsi. Imperocchè di quanti dettarono precetti sulla coltura del gelso, nessuno ha mai trattato del governo delle piante adulte, e specialmente della potatura, con quella sicurezza di principii e con quella precisione d' insegnamento con cui trattava della piantagione e dell' educazione.

Il Verri stesso, che con tanta semplicità e chiarezza dettò le regole da osservarsi dalla semina del gelso sino alla completa educazione, confessando con una rara ingenuità mancargli la certezza dell' esperienza in ciò che riguarda la potatura de' gelsi adulti, si limita a troppo succinti e troppo generali avvertimenti.

Egli è, cred' io, che studiare praticamente co' proprii occhi e colle

proprie mani quest' ultima parte della gelsi-coltura, è cosa molto più ardua e spinosa che studiare le altre; ciascuna delle quali non presenta la fatica nè i rischi di questa. L' appollaiarsi infatto e bilicarsi sopra un albero lavorando or di ronca or di seghetto, non è faccenda per ogni galantuomo. Comunque sia, egli è un fatto, che mancano principii e regole certe che possano guidare la mano dell' appassionato gelsicultore, e trarlo da quella molesta incertezza che prova in faccia a' gelsi da lui cresciuti con tanta intelligenza e tante cure, quantunque volte si tratta di porre il ferro nella loro chioma.

Compreso dall'importanza di una tale situazione, io pubblicava nell' *Amico del Contadino* dell'anno terzo un' istruzione affatto popolare, esponendo alcuni principii fondamentali su tale argomento e il modo più facile per applicarli, valendomi in ciò fare dei dati che mi offriva una lunga pratica personale, coronata da' più felici risultamenti; ma non credo per questo di aver abbastanza riempita la lacuna di cui mi lamento. Desidero che altri più valente di me la riempia interamente, e soddisfi così al bisogno universalmente sentito di una istruzione tanto necessaria, e senza la quale la coltivazione del gelso sarà sempre imperfetta, e il migliore educatore si troverà deluso sul più bello delle sue speranze. Oserei dire che fino a tanto che s' ignorerà il vero modo, il modo più utile di potare i gelsi adulti, non varrà la pena di darsi tanti fastidii per la migliore educazione. Tanto secondo me è importante l'istruzione di cui manchiamo! Più importante e più necessaria ancora, specialmente pel popolo, che non fu mai per avventura quella che riguarda il piantare e l'educare. Imperciocchè senza dire che un agricoltore non ha fatto che la metà dell' opera quando ha condotto un gelso al punto di raccogliere il primo frutto, se non sa poi governarlo in guisa che il prodotto s' accresca ogni anno fino a che la pianta sia compiutamente formata, e d' indi in poi si mantenga senza diminuzione di quantità nè di qualità; l' agricoltore meno istrutto in ciò che riguarda la piantagione e l' educazione, trovò sempre una guida nell' analogia che ha il gelso con tutti gli alberi, ch' egli già sapea coltivare; ma questa guida gli vien meno da quel momento che egli chiede alla pianta uno sforzo contro natura, un prodotto che per

la costanza, per la qualità e pel momento in cui lo esige, non ha alcuna relazione col prodotto delle altre piante.

Perciò il governo del gelso adulto è un' arte affatto distinta e di suo genere, arte che violenta, direi quasi, la natura, anzichè secondarla, ma che sarà tanto più perfetta quanto più saprà blandire i mezzi onde costringerla.

Le teorie del volgo, se pure il volgo ha teorie sue proprie, implicano una falsissima idea sull' influenza del taglio delle piante, ed io ho più volte dubitato, non le troppo concise e forse troppo astratte istruzioni date dagli autori abbiano contribuito a far considerare il taglio de' gelsi sotto un fallace aspetto, ponendo come uno de' fini della potatura la durata delle piante. Ma effettivamente questo fine non ha colla potatura che una relazione indiretta. I fini diretti della potatura non sono veramente che due: la conformazione della pianta e la produzione di una maggiore quantità di foglia. Se il gelso non si pota mai, cresce d' ordinario sregolatamente e si deforma; e quanto alla foglia, la produce bensì sostanziosa e ottima pei filugelli, ma più piccola e più rara, e in luogo di foglie si riempie di frutta. All' incontro mercè la potatura la foglia riesce più grande e più folta, benchè più debole; perchè dove un ramo di due anni s' accorcia, ivi spuntano molte verghe, e le gemme inferiori ne producono altrettante; laddove lasciando il ramo intero non avrebbero tutte quelle gemme prodotto che sole foglie per un anno ancora, e in seguito nè anche quelle. Ma il taglio per discreto che sia, dacchè sforza la pianta a produrre più foglia, che per sua spontanea natura non avrebbe prodotto, sforzo che non può che indebolirla; e dacchè le produce inoltre ferite, che certo non sono un balsamo, non si potrà mai considerare un mezzo diretto per invigorirla, e farla lungamente vivere e prosperare. Per le quali cose vorrei che chi si fa a dettare teorie e precetti su questa materia non ponesse a sè stesso il quesito come han fatto gli altri, cercando cioè qual sia la potatura che oltre a produrre abbondanza e buona qualità di foglia, serva a rendere più robusta e più longeva la pianta; ma invece qual debba essere per ottenere molta copia di foglia nuocendo il meno che si possa alla buona qualità della stessa, all' in-

cremento naturale della pianta se giovine, alla sua durata se vecchia. Forse io m' inganno, ma parmi che posto il quesito in questo modo si eviti più facilmente il pericolo di alimentare le false idee al volgo, tanto proclive ad esagerare i mezzi coi quali crede poter raggiungere il suo scopo, e che appunto per l' opinione che il taglio sia un mezzo diretto di rinforzare le piante, siccome è in certe loro malattie un rimedio, vi adopera il ferro senza remissione come se fosse un alimento, un ristoro.

Per me io sono convinto dalla mia esperienza, che la migliore potatura è quella che si fa ogni anno all' atto stesso della sfrondatura, ovvero se la fretta di raccogliere la foglia non lo consente, subito dopo. Lo sfrondatore armato del suo coltello adunco recide, senza offendere le sottoposte gemme, tutte le foglie che non si lasciano facilmente svellere dalla mano, e recide pur anco i ramoscelli erbacei sviluppati nel corso di quella stagione, e procede così operando lunghesso tutte le verghe delle branche madri al prim' ordine di rami, da questo al secondo, e via così fino all' estrema periferia della corona dell' albero. Giunto all' estremità de' rami più sottili, accorcia questi tagliando il ramo che conta due anni in uno de' punti ove si biforca con una o due messe del secondo anno, e fa lo stesso tutto all' ingiro, accorciando più basso i rami superiori se troppo vegeti, e lasciando più lunghi gl' inferiori se più deboli de' primi. Da ultimo monda l'albero da' seccumi, leva ogni verga troppo debole, tutte quelle che s' incrociano nel centro, accorcia le soverchiamente lunghe, accommoda le rotte ed offese.

Codesta potatura, che con un po' di esercizio si eseguisce, sfrondando in minor tempo che non si crede, conviene sì a' giovani gelsi che ai vecchi, e non differisce che nel tagliare più a lungo i primi e più a corto i secondi; non cagiona all' albero considerevoli ferite, perchè si eseguisce con piccolo coltello, e risparmia quelle potature triennali e quadriennali che importano necessariamente ferite molto più gravi; favorisce l'aumento progressivo delle piante, e conserva alle già cresciute quella quantità di prodotto che sono capaci di dare.

Ma io non mi estenderò di più sopra un argomento che mi trar-

rebbe fuori de' limiti prefissi a questa Memoria, e del quale ho già particolarmente ragionato nel mio Giornale; quindi riassumendo le fatte considerazioni sullo stato in cui si trova la coltivazione del gelso, concluderò: che se è consolante vedere questa utilissima pianta conquistare d' anno in anno spazio sempre maggiore, e vincendo i pregiudizii che le facevano ostacolo, accrescere ognor più il primo elemento della serica industria; dall' altra parte per chi vorrebbe che le arti agricole camminassero di pari passo con tutte le altre, e colle scienze eziandio che tanto avanzano ogni giorno, egli è doloroso osservare un procedere sì lento nell' arte di educare il gelso, e nessun progresso, e sto anzi per dire un vergognoso decadimento nell' arte di governarlo. Ma siccome questa lentezza di progresso dipende, come vedemmo, parte dalla poca cura che se ne presero i proprietarii terrieri, parte dal poco interesse che vi ha il contadino, e parte ancora da mancanza di regole opportune, e all' intelligenza di tutti accommodate; così io mi conforto colla speranza, ch' essendo oggidì l'Agricoltura in tanto auge d'onore da stimolare l' amor proprio non meno che l' interesse, essendo sì ovvio per tutti il calcolo del tornaconto, sì facili i mezzi di diffondere le cognizioni; non sarà malagevole rimovere tutte queste cause di lentezza, onde la serica industria riceva un nuovo impulso dal perfezionamento d' una coltivazione che è la base fondamentale della sua prosperità.

## PARTE II.

### *Della coltivazione dei gelsi e dell' educazione de' bachi da seta nelle Provincie Venete.*

L' arte di produrre i bozzoli, ossia l' educazione dei bachi da seta, ha occupato assai più gli studii degli agronomi, che fatto non ha quella di governare il gelso ossia di produrre la foglia che dee alimentare i bachi. In questo secolo particolarmente in cui l'Agronomia ha più che mai approfittato di quello spirito d' analisi e d' induzione che le fruttò il suo commercio colle scienze, la bacologia non si è

contentata di seguire le orme segnate dagli antichi maestri quantunque sancite dall' esperienza, ma ha voluto esaminarle e misurarne la profondità col lume e collo scandaglio della scienza, ha voluto trovare le relazioni della scienza colla pratica; e allora fu che creò o almeno scoperse la teoria che mancava, ovvero si celava sotto la rozza corteccia dell' empirismo; allora fu che procedendo dietro la scorta di questa teoria meritò giustamente di chiamarsi arte, poichè in vero chi dice arte dice teoria e pratica insieme.

Studiata la natura, le abitudini, i bisogni del prezioso insetto, meglio si seppe distinguere il regime igienico che gli conviene, e maggiori profitti ne trasse l' industria che si diede a coltivarlo. Non dirò già che tutte le ricerche alle quali si rivolsero a' nostri giorni la Zoologia e la Fisiologia sieno state di eguale profitto a questo importantissimo ramo dell' agricola industria: alcune di esse veramente sono fatte per soddisfare la sete dell' uomo dotto, anzi che per servire ai bisogni dell' industrioso. Certo ella è questione più curiosa che utile se nell' apparato setifero del filugello si contenga il filo della seta bell' e fatto, o una materia che si trasforma in filo uscendo per le filiere dell' insetto, se la stessa materia serica sia un organo, o sia il prodotto o la secrezione di un organo, questioni che pel dotto bacologo si credeano già da gran tempo risolte dalle osservazioni di Malpighi e Reaumur, ma che vennero non ha guari di bel nuovo in campo per nuove osservazioni fatte dal naturalista alemanno Strauss. Che importa di fatto che la seta preesista in filo nel serbatoio del verme, come la pensa questo dotto naturalista, o ch' ella sia una materia filata dal verme stesso quando tesse il suo bozzolo come si è sempre creduto infino a questi giorni? Fosse anche vera l' opinione del naturalista alemanno, sarebbe perciò l' alimento del filugello indifferente quanto alla produzione della seta in sè stessa, come pretende il francese Bourgnon Delayre? Sarebbe per ciò men vera l' influenza che le varie qualità delle foglie mostrano di esercitare e sulla qualità e sulla quantità della seta prodotta dal filugello? Siffatta influenza è pel bacologo un fatto sperimentale, come è pel pastore la diversa potenza nutritiva de' suoi foraggi. Resterà a spiegarsi il fatto, ma questa spiegazione la chiede-

remo piuttosto alla Chimica che all' Anatomia. E la Chimica in vero sparse già molta luce sulla natura delle sostanze alimentari del regno vegetabile, e sulla loro proprietà nutriente, e ci dimostrò in modo da non poterne più dubitare, che la forza vitale nulla crea di ciò che costituisce l' organo animale e i suoi prodotti, ma soltanto riduce con leggi chimiche subordinate ad essa i materiali già preparati nelle piante. Or se le chimiche ricerche hanno dimostrato che l'albumina e la fibrina, parti essenziali del sangue, e la caseina ed il butirro che compongono il latte si trovano già identicamente costituite nei vegetabili di cui si nutrono gli erbivori, noi potremo a buon dritto aspettarci che queste ricerche ci mostrino un giorno i principii costituenti la seta nelle foglie del gelso. Allora troveremo ragione di que' fatti di cui la spiegazione non è ancora che ipotetica, allora sapremo perchè rispetto alla produzione della seta le varietà del gelso si diversifichino tra loro molto più che rispetto all' alimentazione e all' igiene; allora comprenderemo perchè non tutte le sostanze vegetali mangiate dai filugelli, avvegnachè atte a sostenerli, sieno ugualmente idonee a renderli produttivi di bozzoli ben tessuti e pesanti; e perchè la *Machura aurantiaca*, sebbene per principii azotati, idrogenati e carbonati superi forse tutte le varietà di gelsi, e si annunzii perciò secondo i dati della chimica odierna eminentemente ricca di sostanza alimentare, nondimeno mangiata dal filugello mostri di non valere neppure l' infima delle varietà del gelso. Certamente convien dire che non basta che una sostanza appetita dai bachi da seta abbondi di que' principii che Liebig e Dumas e Boussingault chiamano plastici e respiratorii; ma fa di mestieri che cotali principii si trovino nei vegetabili in certe combinazioni o condizioni che per anche sfuggono all' analisi; condizioni per le quali il solo gelso pare dalla natura destinato al doppio uffizio di nutrire il filugello e somministrargli i principii ond'egli elabora o compone la seta. Scoprire la natura di tali condizioni sarebbe trovar il mezzo di giudicare a priori la bontà relativa delle varie qualità di foglia, e però le chimiche indagini in questo senso dirette acquisterebbero pel bacologo una decisa importanza.

Egli è vero nondimeno che anche certe esperienze di pura curio-

sità hanno fruttato al bacologo preziosi lumi. L'aver voluto provare con graduati esperimenti fino a quali estremi di temperatura il filugello resista senza soccombere, ha servito a far conoscere che se la natura gli ha concesso un' ampia scala per garantire la specie contro la total distruzione, sicchè l'ha reso idoneo a vincere la prova del gelo e a resistere a' più ardenti soli delle nostre estati; ella ha peraltro fissato entro confini meno distanti lo spazio della vita attiva e riproduttiva, onde a soli 10 gradi della scala di Reaumur comincia ad effettuarsi lo svolgimento del germe nell'uovo, e questo è il punto estremo inferiore in cui il filugello può nascere, e comincia a mangiare, essendo pur questo il grado necessario alla vegetazione del gelso, mentre dall' altra parte il 46.° grado è l' estremo superiore in cui cessa d' alimentarsi. Tra questi due limiti della vita operativa, l' esperienza ha poi fatto conoscere altri due punti intermedii onde si circoscriva, dirò così, la vita utile del filugello, e questi sono il 17.° e il 20.° grado Reaumur; ed è omai provato che solo fra questi gradi di temperatura si possono ottenere bachi robusti e condurli la maggior parte a tesser bozzoli bene incartati e pesanti, e che tanto al di sotto che al di sopra di questi limiti vi è sempre in ragione di circostanze più o meno contrarie una perdita più o meno considerevole di prodotto, o si riguardi al peso, o si riguardi alla qualità di esso.

L' osservazione ha pure provato che in qualunque stato igrometrico il filugello vive, nè teme gli eccessi dell' umido e del secco. Io stesso ho voluto più volte sperimentare la sua tolleranza per l' acqua che l'opinione volgare proclamò sempre funesta al filugello, e non solamente l' ho veduto prosperare in un' atmosfera saturata di umidità, ma l' ho veduto sopportare senza disagio alcuno l' acqua versata frequentemente su di esso e sulla foglia di cui si ciba, sol che si abbia l' avvertenza di non lasciargliela fermentare di sotto, e mi sono convinto che fra i due eccessi gli è men favorevole il secco. Ma quante volte non si è veduto riuscire perfettamente filugelli esposti a tutte le vicende atmosferiche senz' altra difesa che una tettoia? E vivrebbero pure ottimamente sui gelsi all'aperto de' campi se non avessero nemici non già il sole e i venti e le pioggie, ma i topi, gli uccelli e le formiche.

Che se questo insetto è stato dalla natura dotato di sì robusta tempra da sopportare il caldo ed il freddo, l'umido e il secco, e fin anco il digiuno; a che, si dirà, tanti studii, a che tante regole per educarlo, quasi che fosse una cosa piena di difficoltà? Non basta averlo sottratto ai pericoli che correva nella piena libertà de' campi ponendolo a ricovero nelle nostre case, senza assoggettarlo inoltre contro il suo istinto a un regime così artifiziale come è quello di cui fa suo vanto la moderna bacologia? Meno cure e meno delicatezza, signori bacologi, e seconderete assai meglio il voto della natura. Così ragiona il volgo e tira innanzi ostinato nelle sue abitudini. Ma se gli accade di far confronto tra i prodotti raccolti dalla massa degli educatori, e i prodotti che si ottengono coi metodi perfezionati, allora fa le maraviglie e non crede ai proprii occhi e grida impossibile! Ma quale maraviglia? I perfezionati processi d'educazione sono frutti dell'osservazione che sa interrogare la natura, interpretarne le leggi ed applicarle, laddove queste volgari educazioni sono tutt'altro che conformi a queste leggi. Il volgo non è mai più lontano dalla natura che quando appunto ei s'immagina di seguirne le tracce operando a caso e disprezzando le teorie e i precetti di coloro che sanno. Per lui è natura tuttociò che non è arte, però crede di usare più naturalmente co' suoi filugelli quanto meno vi adopra d'artifizii. Dacchè quest'insetti riescono bene sugli alberi quando possono sfuggire alle insidie de' loro nemici, ei ne argomenta che ogni mezzo artifiziale debba tornare ad essi nocivo, o almeno inutile. Ei non s'avvede che una buona riuscita in quei casi dipende da certe condizioni le quali mancano per lo più sotto il tetto ov'egli ricovera i suoi filugelli, e che questi debbono necessariamente riuscir male in una situazione già abbastanza contraria alla loro natura, perchè quelle condizioni sono indispensabili, e perchè l'arte ch'egli pone in non cale consiste appunto nel far sì che quelle condizioni vengano adempiute.

Se non che fa d'uopo compatire al volgo che non è osservatore, e a cui manca d'altronde il gran soccorso dei dati scientifici che mettono sulla via del retto osservare, e facilitano la scoperta delle relazioni tra fatti e fatti.

Il filugello che vive sugli alberi gode senza limiti dell' aria, della luce, della libertà di mangiare a seconda del suo appetito. Codeste circostanze hanno certo una necessaria connessione col ben essere di lui. Ma fino a qual segno? Cioè in qual misura dovrassi procurare all' insetto quelle cose in una situazione artifiziale? Per ciò che riguarda il cibo e la luce la risposta è facile; la quantità del cibo è determinata dall' appetito; della luce diurna non possiamo disporre che quanto il sole ce la dispensa. Ma l' aria? Ben si sa ch' essa è indispensabile ad ogni animale; ma quanto grande ne sia il bisogno pel baco da seta nessun indizio potea renderlo manifesto nella vita de' campi, perciocchè ivi l' aria soprabbonda intorno a lui. La scienza soltanto avrebbe potuto farlo preservare. Di fatti la struttura del verme, la particolare organizzazione del suo apparato respiratorio; la sua voracità che esige un gran consumo di aria per l' ossigeno e dà materiali carbonati e idrogenati che formano facile la base de' suoi elementi; i noti effetti sull' aria della fermentazione cui vanno soggette le sostanze vegetali e animali sottoposte ai bachi; tutti in somma i dati che la Fisiologia e la Chimica sanno offrire in questo argomento potrebbero dimostrare *a priori* il gran bisogno che il filugello deve avere dell' aria e avvertire della necessità di rinovarla nelle stanze in cui si rinchiude, rimovendo eziandio tutte le cause che sogliono viziarla. Ma l' esperienza rese questa verità evidente, e confermò i dati della scienza, mostrando più ferma la salute dei bachi da seta, più felice il loro esito, e più copiosi i raccolti laddove a parità di circostanze era stata maggiore la nettezza e la ventilazione.

Quindi era necessario trovare il modo di non lasciar mai venir meno ai filugelli questa essenzialissima condizione d' un' aria pura e costantemente rinovata. Nei primi periodi dell' educazione la cosa non era veramente difficile, perciocchè essendo la temperatura esterna più bassa di quella delle abitazioni, l' apertura di qualche parte bastava a introdurre nuov' aria a piacere; ma crescendo l' esterna temperatura coll' avanzarsi della stagione e venendo ad equilibrarsi coll' interna ventilazione, cessava, e cessava nei momenti del maggiore bisogno quando cioè il letto de' filugelli e i loro escrementi sono in

maggiore abbondanza e più disposti alla fermentazione. Prevenire gli estivi calori sollecitando l' educazione era dunque un vantaggio. E qui pure l' osservazione veniva in soccorso e ne suggeriva il mezzo. Era stato osservato che l' appetito dei bachi era proporzionale alla temperatura nella quale viveano; ch' essi consumavano più presto il loro alimento quando questa s' innalzava; che la frequenza dei pasti accorciava i periodi delle loro fasi: quindi riscaldare la stanza e pascere a brevi intervalli i filugelli era il mezzo di terminare più presto la loro educazione. Per tal modo la scienza e l' esperienza giovandosi reciprocamente convenivano nella conferma de' seguenti principii su cui tutta s' appoggia l' arte del bigattiere:

1. Serbare colla più scrupolosa nettezza e colla ventilazione un' aria pura intorno ai filugelli.

2. Regolare la temperatura in cui si fanno vivere in modo da prevenire i grandi calori estivi.

3. Commisurare a questa temperatura la frequenza dei loro pasti.

Dissi confermati questi principii, e nol dissi a caso. Imperciocchè non sono essi un frutto originale dei moderni studii bacologici; ma sono leggi antiche lasciateci da' nostri avi, leggi che noi avevamo obbliate, e alle quali ci trovammo ricondotti tosto che il sole della scienza venne a rischiarare il nostro incerto cammino.

Si trovano di fatti negli antichi maestri dell' arte di educare i filugelli tutti i migliori precetti della moderna bacologia, e i mezzi più facili per applicarli; e non so veramente comprendere come quest' arte restasse sì lungamente stazionaria fra noi e corresse anzi all' indietro. Forse abbiamo troppo assecondato la nostra inerzia confidando nella mitezza del nostro clima, contenti de' meschini raccolti ottenuti con poche cure per virtù di esso, ci siamo assuefatti a riguardarli come lo stato normale dell' industria. E chi sa che cosa sarebbe ancora quest' industria, se Dandolo ed altri dopo di lui non fossero giunti a richiamare gli educatori sull' orme di una pratica razionale ch' essi avevano abbandonata ed obbliata? E nondimeno corse una gran parte di questo secolo prima che le nuove o piuttosto rinovate dottrine fossero abbastanza diffuse per far sentire qualche effetto un po' generale ed

apprezzabile sulla pratica popolare. Non sono che pochi anni che nelle nostre Provincie si comincia a riguardare come assai mediocre un raccolto di 30 Kilogrammi di bozzoli con mille di foglia, mentre quest'era per lo innanzi il raccolto ordinario degli anni buoni. Varii opuscoli di vario merito contribuirono più o meno in ragione della loro popolarità a diffondere l'amore e la persuasione dei principii proclamati dalla sana bacologia. Nè l'opera loro fu infruttuosa, poichè l'educazione dei bachi da seta quasi da pertutto abbandonata alla gente del contado divenne occupazione personale di ricchi proprietarii e di donne gentili, e da abbietta abitatrice ch'ell'era del villaggio e della capanna, passò ospite onorata anche nelle città e ne' palagi. I buoni educatori si moltiplicarono qua e colà, e la massa de' cattivi si è in proporzione diminuita. Un fatto che dimostra il progresso delle buone dottrine gli è questo, che, pochi anni sono, si credeva una baia un prodotto di 60 Kilogrammi di bozzoli da un'oncia di seme con 10 quintali di foglia; ed oggi questa cifra è la media che si ottiene dai buoni educatori, ma non è raro che si parli di 70 e di 80, senza che ciò rassembri una favola. E chi si pensava sette, otto anni fa di ricercare quanti bozzoli facessero un Kilogramma per giudicare dal numero il peso e la bontà loro? Nessuno avrebbe avuto la pazienza d'incontrare il novero di sette a ottocento bozzoli; ma oggi si stimano leggeri que' bozzoli che nel Kilogramma oltrepassano i quattrocento, mentre si danno frequenti casi in cui non arrivano a trecento.

Ovunque la riforma delle vecchie pratiche è stata accolta da proprietarii intelligenti, anche le pratiche de' contadini hanno subíto una vantaggiosa modificazione. L'assistenza da essi prestata alle bigattiere padronali dirette con un metodo perfezionato loro ha reso a poco a poco famigliare l'uso del termometro, la regola di proporzionare la frequenza dei pasti alla temperatura, e quella di dividere i filugelli in categorie per trattarli secondo il loro rispettivo avanzamento.

La sola cosa che più difficilmente si ottiene dai contadini è la nettezza. La frequente sottrazione dei telai è per essi una delle operazioni più penose, in ragione della scarsezza delle braccia, e perciò è negletta o male eseguita. Peraltro le dannose conseguenze che pos-

sono derivare dall' inosservanza di questa regola, sono assai diminuite dal costume che regna in alcuni luoghi e specialmente nel Friuli di distribuire il cibo ai filugelli con rami intieri di gelso, i quali coll' intrecciarsi e tenersi fra loro sollevati offrono ai bachi più spazio per muoversi, li tengono più lontani dalle loro deiezioni alvine e dai residui delle foglie, e quindi meno a portata di risentire gli effetti della loro fermentazione. Se non che al vantaggio che offre questa pratica sotto i punti di vista zootecnico ed economico, si dee contrapporre il danno che soffrono i gelsi dal genere di sfrondatura ch' essa richiede, e che ad essi non può sempre convenire; perlochè qualora non si voglia sacrificare l' interesse agricolo all' interesse zootecnico, il che tornerebbe alla perfine in danno della stessa industria, e' converrà pure che questa pratica si ometta. Ma sarebbe facile supplirvi col sostituire ai verdi ramoscelli di gelso, rami secchi di qualsiasi pianta, facendo di questi sostegno ai bachi ed alla foglia. Alla quale cosa sembra aver non ha guari provveduto il sig. Vincenzo Giordani di Padova con un suo congegno che estenderebbe i vantaggi dell' applicazione di questo mezzo a due età di filugelli, cioè alla quarta ed alla quinta.

Del resto siffatti mezzi che si direbbero inventati piuttosto col fine di favorire l' inerzia che di servire a una vera necessità, non valgono certamente il mezzo delle reti a maglie quadrate da lunghissimo tempo conosciuto in Italia, mezzo semplicissimo, economico, se altro mai, e più d' ogni altro efficace per mantenere la purezza dell' aria allontanando le cause che contribuiscono a corromperla. Questo mezzo diverrà d' un uso generale mano mano che si sentirà l' importanza di risparmiare ai gelsi una dannosa scalvatura, riconoscendo in pari tempo il sommo vantaggio di sottrarre con frequenza i letti ai filugelli e di poterli facilmente classificare e uguagliare nelle loro mute. Nulla è più facile della tessitura di queste reti e gli agricoltori che non hanno d' uopo di comperare filati di canape o di lino per poco che abbiano industriose e massaie le donne loro potrebbero farsene il bisogno per le loro piccole bigattiere, senza per così dire accorgersi del loro costo.

Io non contesterò il merito dell' albero Garulliano, della poc' anzi citata bigattiera di Giordani, e dei telai che il sig. Alberto Guillion

descrisse in una sua Memoria diretta alla Società d'Agricoltura di Bologna; mezzi più o meno ingegnosi con cui si pretende di offrire ai bachi da seta le condizioni di vita più conformi al loro istinto, facendo economia di foglia e di man d'opera; ma dirò soltanto che non ancora comprendo che cosa vi sia in essi di tanto semplice, di tanto economico per ogni rispetto e di sì ovvia applicazione che non si trovi ugualmente e più ancora nell'uso delle reti e dei nostri comuni graticci. Trattasi della foglia? Non nego che somministrata in rami e in modo che i filugelli non la schiaccino, gravitandovi sopra in massa compatta, essa viene mangiata interamente, e non ne avanza di rifiutata; ma oltre lo svantaggio che ha questa pratica, come ho già detto per l'economia dei gelsi, vi ha l'altro che manca il criterio della sufficiente alimentazione, poichè il non avanzar foglia mi dice bensì che non era soverchia, ma non mi assicura che fosse bastante al bisogno dei filugelli. Se fosse stata scarsa avrei ben male utilizzata la mia foglia e il magro raccolto mi renderebbe ancora il frutto della mia parsimonia. Perchè andar incontro a un danno probabile? Meglio è che soprabbondi la foglia e che ne avanzi un rifiuto, del qual non mancherà largo il compenso nell'abbondanza del raccolto. Ma oltre il danno probabile v'è il danno certo che va a ricader sul futuro prodotto dei gelsi, e che fa scontare nell'avvenire con grandissima usura il meschino risparmio del presente. E dico meschino risparmio poichè si esagera dai partigiani di questo metodo lo scialacquo di foglia che si fa sui graticci, mentre si può evitarlo o ridurlo inconcludente col tenervi più rari i bachi sovr'essi e col dar loro pasti meno abbondanti, ma più frequenti.

Che se poi si tratta del risparmio di man d'opera, dove può rendersi inutile la sottrazione dei letti, farò osservare che questo vantaggio è in gran parte un'illusione, relativamente al maggiore impiego di lavoro che si attribuisce al sistema dei graticci. Di fatti se l'albero di Garulli, la bigattiera di Giordani, e il cavalletto di M.r Guillion dispensano dall'opera di sottrarre i letti, opera d'altronde che basta a farsi ogni terzo giorno; codesto risparmio è tutto a spese del tempo o delle mani impiegate a distribuir uno alla volta con una

certa regola i rami scelti di gelso, opera che si ripete almeno sei volte al giorno, e che in siffatti apparecchi esige più lungo e più intelligente lavoro che non richiede lo sparpagliare qualche manata di foglia sovresso i graticci. E la sottrazione dei letti col mezzo delle reti è operazione sì facile e spedita che può farsi ogni giorno, e il tempo che s' impiega va tutto al più in conto di quello che si risparmia nella distribuzione del cibo. Avrei inoltre un dubbio cioè che simili congegni non sieno capaci di una quantità di filugelli proporzionata allo spazio che occupano senza esserne almeno sopraccaricati in modo da distruggere uno dei vantaggi che si prefiggono cioè lo stare e il manovrarsi agiato de' filugelli. Tutto in somma considerato e fin che l' esperienza non giudichi definitivamente i risultamenti pratici ed economici di tuttociò che si va inventando all' oggetto di render più agevole e più corrispondente ai mezzi comuni l' applicazione dei precetti fondamentali dell' arte che sono immutabili, io non trovo finora alcun meccanismo che meglio si adatti alle nostre circostanze di quei castelli formati di 5 o 6 graticci sovrapposti uno all' altro a conveniente distanza, e sostenuti da cavicchie od assicelle mobili talchè si possano alzare od abbassare a volontà, e sui quali i bachi da seta tenuti convenevolmente rari e pasciuti con foglia mondata si cambino di letto mediante l' uso delle reti. Io credo che questo sistema manterrà sempre su qualunque altro una preferenza pari alle sua anzianità, salva qualche modificazione che l' umano ingegno potrà farvi per accrescerne i vantaggi pratici e igienici, come p. e. quella proposta da Vasseur.

Ma ciò che lascia ancor molto a desiderare si è il modo di rinovare, quando si voglia, l' aria della bigattiera, al qual fine non rispondono costantemente i ventilatori e le finestre, tenute aperte o socchiuse, mentre si fa ardere la fiamma di un camminetto. Noi abbiamo un bel raccomandare la massima ventilazione specialmente nell' ultima età de' filugelli in cui vi è maggiore il bisogno; ma come ottenerla in certi momenti, in cui si direbbe che manca l' aria stessa per produrla, in quei momenti terribili pegli educatori che sogliono precedere i temporali? Tutti i mezzi fin ora proposti per la forzata ventilazione, cammini d' appello, buratti, soffiatori, pompe ad aria,

gazometri ec., siane motore l'azione diretta del fuoco, della forza umana, del vento, d'un maneggio, d'una macchina a vapore o d'una caduta d'acqua, sono mezzi ingegnosi e più o men proprii ad ottenere l'effetto che si contempla; ma l'applicazione loro non risolve per anche il problema d'una ventilazione facile, economica e insieme sufficiente per le piccole educazioni tenute dagli agricoltori nelle proprie case. A questo io vorrei si rivolgesse seriamente il pensiero; chè a pochi è dato poter costruire bigattiere salubri col sistema di Darcet; nè per dire il vero io consiglierei alcuno a farne, non già perchè poco le stimi, ma perchè sono in generale nemico di queste costose costruzioni, di questi complicati meccanismi che possono bensì per l'ingegno che vi si scorge, e per il capitale enorme che rappresentano essere soggetto di curiosità e d'ammirazione, ma nulla insegnano al piccolo educatore, nulla gli offrono d'imitabile avvegnachè si chiamino bigattiere-modello.

Per altro nelle nostre Provincie sia prudenza, sia poca fiducia in questi meccanismi, pochissimi ch'io mi sappia li hanno adottati, quantunque veda sempre più risvegliantesi ne' possidenti la sollecitudine per questo ramo d'industria, e l'amore delle nuove riforme guadagni di giorno in giorno terreno. Se non che parmi di scorgere in questa sollecitudine una tendenza che deve controoperare allo scopo, anzichè favorirne il pieno conseguimento. I cospicui risultamenti ottenuti da qualche piccolo saggio della perfezionata educazione de' bachi da seta invogliano tosto a farne un'applicazione più grande, e non pochi proprietarii si consigliano di estenderla a tutti i loro filugelli. Il consiglio sarebbe ottimo se si trattasse di fare quest'applicazione alle singole partite affidate a coloni o a mezzadri; ma siccome non si credono abbastanza opportune le case di questi, nè questi medesimi abbastanza docili e sufficienti per uniformarsi al nuovo metodo; così avviene che tutte quelle piccole partite si concentrano nella casa dominicale o in una sola bigattiera espressamente costruita. E già non è piccolo il numero di queste bigattiere, e se ne vede ogni anno sorgere qualcuna. bensì modesta in quanto apparati fisico-meccanici, ma non tanto modesta quanto all'ampiezza.

Ora debbo proclamar questo un insano consiglio sia che il proprietario riguardi al suo particolare tornaconto, sia che riguardi al progresso generale dell' industria. Le grandi bigattiere sono contrarie e all' uno e all' altro.

Egli è innegabile che con un' accurata applicazione del metodo perfezionato si può ottenere da un' oncia di semente con una data quantità di foglia tre volte più di bozzoli che non si ottiene da una vecchia pratica. Ma s' ingannerebbe a partito chi credesse che quello che si può fare con poche once di seme, si potesse fare ugualmente con qualsiasi quantità del medesimo, dati pure i mezzi e i comodi corrispondenti. La proporzione regge fino a un certo punto; un buon educatore posto in circostanze favorevoli potrà ancora trovarla a tutto rigore in dieci once di semente, poichè questa quantità sta tuttavia nei limiti d' una piccola educazione in cui i mezzi impiegati sono abbastanza proporzionati all' effetto che se ne può attendere. Ma al di là di dieci once la proporzione decresce, e con essa vengono meno i vantaggi, a misura che crescono le difficoltà della riuscita, e posso asserire per una lunga esperienza che le difficoltà crescono in una proporzione spaventosa colla quantità di filugelli che si vogliono allevare; di modo che già con trenta once di seme la riuscita si fa molto dubbia, e con quaranta è quasi impossibile ottenere più d'un raccolto ordinario. Ma quand' anche si giunga a fare un terzo o una metà di più, questo vantaggio è acquistato a sì caro prezzo, che posta ogni cosa in bilancio la riuscita si risolve in una perdita.

Io non discenderò qui a particolari per dimostrare quali e quante sono le difficoltà accennate, e tralascerò di dire perchè è troppo facile imaginare quale sarebbe la conseguenza di un' infezione di calcino o di qualsiasi epidemia in una grande bigattiera comunque divisa in più compartimenti e molto peggio poi se non divisa. L' esperienza si è già su tuttociò definitivamente pronunciata.

Ma non solo le grandi bigattiere rendono sommamente difficile la buona educazione de' filugelli, e si oppongono all' interesse dell' arte in sè stessa; ma si oppongono eziandio all' interesse agricolo. Al proprietario coltivatore di gelsi interessa non solo di trarre il maggior

profitto dalla foglia che gli producono, ma di aumentare pur anche la produzione di questa foglia. Ora se concentrando egli nella sua bigattiera dominicale tutta l' educazione dei filugelli invece di dividerla fra' suoi coloni a farneli partecipi al benefizio, utilizza da un canto assai meno il prodotto de' suoi gelsi, dall' altro si espone infallibilmente al pericolo di vedere d' anno in anno diminuire il prodotto medesimo. Imperciocchè i contadini che già poco accarezzano questa pianta anche quando se ne conceda loro un sensibile profitto, moveranno ad essa una spietata guerra quando il padrone vorrà utilizzarla per sè solo. Nè giova dar loro credito d' una parte del valore della foglia; questo vantaggio sebbene relativamente maggiore per essi che pel padrone stante la sopraddetta difficoltà e rischio d' una gran bigattiera, non equivale, al loro giudizio, non solo all' utile che ritraggono dall' educare i bachi da seta, ma nè anche al danno sempre da essi esagerato, che recano i gelsi agli altri raccolti. Che può adunque derivare da un sì falso sistema di economia, se non che il deperimento progressivo dei gelsi, e quindi la rovina dell' industria?

Lunge pertanto l' idea delle grandi bigattiere; lunge l' idea di concentrare in esse un' industria che forma la risorsa di tanti agricoltori. Facciansi pure bigattiere-modello, ma non si facciano in grande, e siano veramente destinate non al monopolio dell' industria, ma ad istruire dei contadini e a renderli famigliari coi procedimenti delle nuove teorie, i quali sono pure di una facile applicazione. Incoraggiare le piccole educazioni, moltiplicarle quant' è possibile, ecco secondo me i migliori mezzi di far prosperare questa industria. È invano che si oppone non potersi migliorare l' educazione dei bachi da seta finchè si lasci abbandonata alla pratica volgare. E chi dice di abbandonarla? Si sorveglin anzi attentamente, si dirigan coloro a cui la si affida, s' istruiscano colla forza dell' esempio e dei fatti.

Invece di costruire una grande bigattiera, un proprietario farà assai miglior senno adattando nelle sue case coloniche la cucina ed una o due stanze all' uso di educarvi i bachi da seta, ciò che non esclude di adoperare que' locali agli usi ordinarii innanzi e dopo la stagione. Per adattarli a bigattiera non ci vuol molto; massimamente se avendo

egli una bigattiera dominicale adotterà il costume di far ischiudere presso di sè la semente destinata a' suoi coloni, e di non distribuir loro i filugelli che dopo la seconda muta. In questo caso si possono risparmiare le stufe nelle piccole bigattiere coloniche supplendo col camminetto al bisogno di mantenervi la temperatura di 17 gradi R.r quando la stagione non la desse già naturalmente in quell'epoca che si può far cadere a volontà, circa alla metà di maggio.

Chi conosce l'arte di educare i bachi da seta, i pericoli che attorniano dirò così l'infanzia loro d'insetti, il vantaggio immenso per le piccole bigattiere di averli tutti d'una sola categoria, e quello di poter ritardare in certe circostanze la loro nascita approfittando della felice elasticità che concede all'arte la nota disposizione di questo verme, che simile a una pianta accelera o ritarda la sua vita in proporzione del calore che riceve, saprà da sè medesimo apprezzare la conseguenza del suggerito provvedimento, e vedrà di leggieri quanto sia per esso agevolata al contadino l'educazione dei bachi da seta e quanto diminuita la contraria probabilità del successo.

In questa guisa operando, i proprietarii vedranno infallibilmente aumentare e migliorare nei loro poderi la produzione dei bozzoli, senza toglierla di mano al popolo delle campagne di cui ha sempre formato l'occupazione e nel cui seno spargerà e l'agiatezza e il ben essere quanto più sarà in fiore; vedranno i lor contadini divenire più amici de' gelsi, ascoltare più attenti ed eseguire più docili i precetti e i consigli per le cure da prodigarsi al governo di questa preziosa pianta, e all'educazione del maraviglioso bruco ch'essa alimenta; e provvedendo meglio al lor tornaconto assicureranno sopra solide basi la prosperità generale della serica industria.

(*Letta li* 10 *Agosto* 1846 *e* 31 *Gennaio* 1847.)

# SUL

# PORTO DI MALAMOCCO

## MEMORIA

DI

GIOVANNI CASONI

Mi sono proposto di tenervi discorso prendendo ad argomento del mio dire *Alcune considerazioni sulla futura condizione del Porto di Malamocco.*

In siffatto assunto, avvegnachè svolto le tante volte, e sempre con fino criterio e con dovizia di scientifici ragionamenti, da tanti ingegneri nazionali e stranieri, e più che da altri, eminentemente illustrato dal nostro cavaliere Paleocapa, che nomino con reverenza e con ammirazione, e a malgrado che in quelle trattazioni siasi adoprato ogni artifizio, ogni ordine logico, pure non ancora si è pervenuto a convincere, a persuadere i pratici naviganti, gli uomini di mare, coloro che sogliono frequentare queste nostre spiaggie, della proprietà e della efficacia de' provvedimenti e dei grandi lavori operati, e che si vanno conducendo per migliorare la condizione di quel Porto medesimo.

Siccome dunque il voto di costoro vale più assai di quello si pensa, e molto influisce a propagare ne' loro compagni la incertezza e la diffidenza, e va ad estendersi fino a toccare i progetti e le ardite e generose speculazioni de'commercianti; credo non verrò accagionato di superfluità, se con alcune considerazioni, attinte alla pratica, usando le stesse loro frasi, valendomi de' medesimi loro ragionamenti, procurerò di riempiere quel vacuo, togliendo dagli occhi di que' mal prevenuti la fatal benda che fa loro travedere i mali colà dove trar dovrebbero invece argomenti di conforto, d' incoraggiamento. Gentili, siccome siete, io so che nobile interesse vi prende in sentir toccare un proposito in cui grande parte è riposta de' futuri destini e delle liete speranze di questa Venezia, nel qual riflesso riposando, caccio da me quel palpito di giusta temenza che, a voi davanti, in questo punto m' assale, e do, senz' altro, incominciamento al mio dire.

Lunga sarebbe e al mio scopo non necessaria cura tesservi una storia di questo Porto: ne trattarono il Sabbadino, il Cornaro, e nell'esteso numero di quanti, appo questi, scientificamente, o praticamente ne scrissero, notar convienci l' illustre nostro Bernardino Zendrini, che attingendo notizie da' reconditi archivii, a' quali la posizione di matematico della Repubblica in cui trovavasi, facilitava l'accesso, ci ha lasciate estesissime e precise indicazioni riguardanti il Porto medesimo, e gli aneddoti storici che vi appartengono; il perchè mi basta ricordare che, a quanto sembra, dalla natura sostituito ad altro Porto poco distante, al sito oggi giorno denominato *Porto Secco*, già esistente al litorale di Pelestrina, principiò Malamocco ad essere praticabile pelle navi solo dall' anno **1493**; quando cioè il Porto di San Nicolò del Lido, che è quello primario di Venezia, andava perdendo di profondità, e la Repubblica pensava da senno ad un essenziale provvedimento; epoca quella e circostanze che troviamo ricordate, oltrechè nell'opera dello stesso Zendrini *sulle Lagune di Venezia,* anco nel libro sulle *Lagune* stesse del valentissimo e rinomato Antonio Luigi Romanò, Colonnello d' ingegneri (al cui posto nella Marina di guerra, io stesso, pur troppo con tanta differenza di sapere e d' ingegno, venni sostituito), il quale molto si valse del Codice detto del *Pio-*

*vego*, ricca collezione di leggi, di regolamenti e di pratiche che il dotto Tommaso Temanza trasse dall' obblio, e ne arricchiva la patria storia municipale.

Nei primi secoli dopo la emigrazione in queste isolette de' fuggiaschi veneti continentali e fin oltre la metà del XV. secolo, l' accessibilità dei Porti di queste Lagune era libera, agevole, generalmente conosciuta; e vegliava di quelli a custodia la più potente fra le difese, cioè la pubblica opinione de' mezzi militari, la celebrata efficacia di essi, ma più che tutto il conto in cui tenevasi la forza morale, il consiglio, l' attività della veneziana Repubblica: ma quando i navigatori stranieri, profittando delle indicazioni de' nostri *Polo*, delli *Zeno*, delli *Cabota*, e sopra ogni altro del *Cadamosto*, si spinsero ad oltrepassare il Capo meridionale dell'Africa, e che la scoperta d' una nuova via pelle Indie orientali rapì di mano a' nostri le redini del commercio europeo e cominciava indebolimento nell' economia della Repubblica; allora dovettero i Padri coprire col politico manto del mistero il nuovo stadio del loro regime, e finalmente involgere nel timoroso velo della incertezza la condizione locale de' Porti di Venezia e singolarmente di quello primario di Malamocco.

Cessate, col cambiare dei tempi, le cause che consigliavano a quelle misure di riservatezza e di circospezione, il Porto di Malamocco divenne tema agli studii de' dotti: si è potuto misurarlo, scandagliarlo, confrontare le antiche colle recenti condizioni delle sue foci, e quindi se n' è parlato, si è scritto e se ne fecero trattazioni non meno da' nazionali che da illustri stranieri, in guisa che si potrebbe a buon dritto dire di lui quello che in più larga applicazione leggiamo nell' Ecclesiaste, cioè che un nuovo ordine di cose *illum tradidit disputationi eorum*.

Un' avvertenza essenzialissima giova a tutto premettere, ed è, che le foci di questi nostri Porti tutte sono viziosamente inclinate verso mezzogiorno, per l' effetto di due correnti, una delle quali, ed è la *radente litorale* che qui procede dal Nord, urta di fianco l' altra prodotta dall' acqua che, nel periodo del riflusso, sorte dalla Laguna, onde ne nasce che la corrente dirò così complessiva si determina per

la direzione risultante dalle due anzidette, in guisa che il Canale primario, quello che per la maggiore profondità è capace al passaggio de' più grossi navigli, percorre quasi parallelo, ed in poca distanza dalla spiaggia: il perchè in circostanza di venti, tra il greco ed il sirocco, che riguardo a questi Porti sono da marinari chiamati *venti di traversia*, non solamente è malagevole accostarsi ad essi, ma spesso n' è impossibile l' accesso, e sempre pericoloso ed azzardato. Ecco il bisogno di Piloti conoscitori del vasto banco che a que' varchi sta dirimpetto, e che è prodotto e mantenuto dalle torbide de' fiumi posti sopra corrente, dal commovimento del mare che spinge a terra le sabbie e dalle correnti di riflusso che vorrebbero allontanarle; ecco il bisogno di *Dromi* che un tempo erano la parte enigmatica del loro mestiere; ecco la così detta *Fraglia* quasi *Sodalizio de' Piloti d' Istria*, saviamente istituita dalla Repubblica. Tali imperfezioni, e tutte queste necessità fra loro associate componevano il nucleo del mistero che la Repubblica nell' ultimo suo secolo voleva gelosamente conservato, a costo di tutto, a costo di tenere un Porto vizioso, a costo di dover adattare la carena de' vascelli da guerra alla poca profondità di foce, a costo di tener navigli assai piatti, di poca immersione; e ben sanno i costruttori navali quali difetti più o meno vadano annessi a codesta prescrizione di forme.

Allora quando nell' anno 1807 il commovitore d' Europa comparve a Venezia, seco trascinava nel lungo codazzo alcuni eletti ingegni, fra' quali gl' illustri Prony e Sganzin, cui il miglioramento del Porto di Malamocco venne dato a quesito. Alla comitiva associarono tosto il rinomatissimo nostro ingegnere navale Andrea Salvini. Conobbero essi che la risoluzione del quesito stesso stava (come ognuno ben vede) nel disporre quella foce con direzione possibilmente ortogonale al lido, ed accolsero la prima idea dello stesso Salvini, che ciò ottener si potesse colla separazione delle due correnti, quali poco fa ho descritte, e quindi che uopo eravi d' una Diga, per tale uffizio disposta al Nord fuori del Porto, protratta sopra il Banco fino ad incontrare la normale profondità del Golfo in queste vicinanze; ed egualmente di altra Diga minore in lunghezza, per intercludere la vecchia foce

verso il Sud, per tenere raccolta l'acqua e per dirigerne il corso verso la estremità della Diga maggiore, impedendo in tal modo la dispersione laterale di essa. Quei distinti matematici portarono alcuna modificazione al progetto del Veneziano, che in sostanza venne applaudito ed accolto. Questo fatto che egualmente onora e quello che ha ideato il progetto ed i matematici stessi che seppero calcolarne la efficacia e valutar la importanza; questo fatto, dissi, è solennemente consacrato nella Scrittura d'allora col titolo *Commission de Venise* in più luoghi, ma nel §. 169 con queste precise parole: *L'emploi des jetees poussées au large, pour resserrer la passe, et la théorie qui indique les effets qu'on doit attendre de ces ouvrages, ont été indiqués dans un projet que M. Salvini a fait, et qu'il a communiqué à la Commission*.

Chi avrebbe ora l'ardire di porre a tortura la vostra tolleranza, o Signori, col narrarvi per serie i conflitti delle opinioni insorte dopo l'accoglimento di siffatto progetto e precipuamente intorno alla modificazione di quella parte di Diga interna destinata a regolare il Canale detto della Rocchetta ed a sistemare il bacino interno del Porto? Per certo io non oserò tanto; soggiungo solo che i nomi di Salvini, di Lessan, di Lahiteau, di Romanò figurano in codesta onorata polemica, di cui più a male che a vantaggio dell'opera ne tornarono i risultamenti, causa anco le variate circostanze, e la maggiore o minore influenza degli opinanti sull'animo di coloro che erano nella posizione di deliberare su di questo interessante ed essenziale proposito.

E qui non potrei senza recar onta alla giustizia, alla verità, tralasciar d'osservare, che se il merito di aver adottato il vasto progetto e di averne anco abbozzata la esecuzione nella parte interna del Porto, spetta ad un Governo che fu, l'onore primario, il massimo rendere dobbiamo noi Veneziani alla munificenza dell'Imperatore e Re nostro, il quale con Sovrana deliberazione decretando la esecuzione delle opere esteriori al Porto di Malamocco, decretava ad un tempo la completa redenzione del Porto stesso, dono sopra tutti il primiero, il più importante e decisivo, se dalla praticabilità di quel varco attende Venezia di poter ghermire alcune fila, almeno, della vasta rete commer-

ciale che ne' secoli decorsi qui versava tante ricchezze, quelle ricchezze che nel XVI. secolo si tolsero in parte al giro de' traffichi per profonderle in abbellire con portentosi e magnifici edifizii il materiale di questa illustre città.

L' accennata Diga di Nord, la quale è lunga 2122 metri, cioè 1/8 più di un miglio geografico, partendo dallo Sperone o Guardiano che determina a sinistra l' apertura del Porto, passa traverso il Banco o Scanno che più volte ho nominato, e normalmente lo taglia. Le misure del profilo, quelle del nucleo, della corona, ossia del lavoro murale in sommità di questo grande manufatto, non occorre che qui passi in rivista; e per darvi una semplice idea della colossale impresa, mi basta notare che il corpo subacqueo, a gettata di grossi sassi d' Istria, presenta un volume di oltre metri cubici 126 mila; che la parte regolare emergente dall' acqua, ragguagliata all' ordinaria alta marea, e che in settembre del decorso anno si cominciava a commettere, ascende ad altri metri cubici 2120; e finalmente che il valore complessivo dell' intiera opera fin qui approvato dall' Imperatore va ad oltrepassare li 3,307,739 di lire austriache.

Non appena erasi gettata la parte subacquea di codesta poderosa barriera, che gli utili effetti, già preveduti dalla scienza, vennero ben presto a manifestarsi, ed ora il nuovo varco, che naturalmente si è aperto, va via via migliorando, abbenchè nè siavi ancora la seconda Diga di Sud, nè l' arte sia accorsa con mezzi meccanici per secondare le tendenze della natura. Oramai, ed è già lungo tempo, gran numero di grossi navigli da commercio e da guerra, abbandonata la foce antica, questa nuova tentano con successo e prescelgono, che al cammin loro offre retta e facile via, tanto nell' entrata come nella sortita da quel Porto primario.

Non ostante tanto confortante risultamento, e a malgrado la evidenza di sempre maggiori vantaggi, la intolleranza di alcuni marini mal soffre che il lavoro stesso della natura non progredisca con la celerità da essi desiderata, e ne deducono quindi sinistri presagi, che crescono e si moltiplicano nelle loro teste anco perchè favoreggiati dalle erronee massime di alcuni che dovrebbero invece prestarsi a

trarli d' inganno; ma vogliano questi considerare che la natura in consimili circostanze agisce sempre con incessante, ma lenta attività, e guai se adoprasse di tutta la insigne potenza che talvolta dimostra; allora accaderebbero rovine, sovvertimenti, e noi siamo ben lunge dal desiderare un cataclisma, perchè vadano più presto soddisfatte le brame di codesti intolleranti.

Premesse tali sommarie notizie, la trattazione che ho preso a tema mi conduce al dovere di risolvere alcune obbiezioni, le quali vennero poste in campo parte sulla proprietà e sull' essenzialità del progetto, parte sugli odierni effetti che ne vanno conseguendo.

Primo, e per quanto io mi sappia il solo meritevole di confutazione, che si dimostrasse avversario alla applicabilità del Piano Italo-Franco, fu l' ingegnere francese Lahiteau, il quale in allora, quando gli interessi marittimi erano comuni dalla foce del Tronto a quella del Tagliamento, scrisse una memoria sui porti esistenti in quelle spiaggie, e toccando di questo di Malamocco si pronuncia contrario al progetto stesso. Dice, che le acque della Laguna non potendo scorrere incassate come quelle di un fiume, ed in causa dell' impedimento delle Dighe, rallenterebbero il loro corso, retrocederebbero, e disporrebbonsi in parte a seguire altra via, portando i soliti *Parti-acqua* (ossieno i punti di contatto tra l' acqua che entra nella Laguna per un Porto, e quella che s' introduce pel Porto vicino) verso i Porti laterali di San Nicolò e di Chioggia. Soggiunge inoltre, che il banco, quale ora vediamo disteso dirimpetto al Porto, si riprodurrebbe alla estremità della nuova Diga di Nord, e le cose di quel Porto ritornerebbero ben presto nell' antico vizioso stato.

Penso che pochi argomenti, e tutti pratici, bastino a togliere la esposta obbiezione. Dichiaro in prima che l' apertura o la bocca del Porto si è prossimamente conservata sempre la stessa malgrado i fatti lavori; che quand' anche si dia opera alla seconda Diga di Sud, il varco niente va a restringersi, ma d' alquanto se ne allunga il canale; che questo canale, presentando alla sua imboccatura (misurata da una estremità all' altra delle due Dighe) una sezione molto maggiore e più esposta alle correnti del vivo mare, tanto più sarà favo-

rito l'ingresso all' acqua di flusso, e perciò i limiti di contatto ossieno i Parti-acqua interni, o resteranno prossimamente immobili, o piuttosto si discosteranno; allora la parte di Laguna, spettante al sistema idraulico di questo Porto, sarà dalle acque inaffiata con più vivacità e con maggiori correnti, e quello spostamento di Parti-acqua verso i Porti laterali, che l' ingegnere Lahiteau deplora quale difetto del Piano, torna invece di quello a vantaggio, perchè allargherebbesi la Laguna di Malamocco, e sarebbe quindi per riconfermarsi il trito proverbio de' marinari che *gran Laguna fa gran Porto*.

In quanto alla riproduzione del Banco foraneo che Lahiteau temeva veder ricomparire al Sud della nuova Diga, quest'è un preludio indicato dagli stessi Prony e Sganzin, i quali assegnavano agli effetti utili del progetto durata temporanea; giacchè, osservano essi, collo scorrere del tempo, e sussistendo le stesse cause, la natura andrà riacquistando su quelle acque la primiera giurisdizione.

Ciò nondimeno mi permetterò considerare che Lahiteau, ed i suoi aderenti, sembra poco conto abbiano fatto sulla interposizione della gran Diga, o per meglio e generalmente spiegarmi sulle conseguenze naturali che si osservano quando l'acqua in movimento trova un corpo, un piano disposto pella direzione del proprio suo corso.

Ed in vero valendomi di un paragone che imito dal celebre Mengotti, e che parmi essere a portata de' mêno addottrinati, dirò che l' acqua, a guisa di delicata donzella vuole essere trattata con dolcezza, non soffre opposizioni dirette; si sdegna, ricalcitra, s' oppone, imperversa quando trova contrasto; ma diventa pieghevole se la si sente blandita, si adatta allora, si uniforma all' altrui volere, opera anche contro le proprie sue disposizioni, e se trova il braccio virile di un saggio e prudente, a lui si abbandona, vi si associa e il seconda. Così del nostro Porto. Quell' acqua di riflusso da prima contrariata dalla corrente litorale, quindi liberata e divisa da quella per la salutar Diga, ad essa, quasi riconoscente, s'appoggia, vi striscia, s' abbandona; non distratta, aumenta così la prima velocità; e finalmente fatta rigogliosa e vivace lascia il braccio che la scortava, e più avanti di quello, colla stessa direzione si spinge, ed inoltra, e procede, seco al largo

travolgendo le torbide che la sorprendono di fianco, e che secondo Lahiteau coll'andare degli anni tenteranno mettere una barriera al vertice di quel potente manufatto.

Da questa allegoria vorrei dedurre e con essa persuadere i pratici naviganti, che la riproduzione del Banco foraneo alla nuova foce di Malamocco sarà un avvenimento da noi lontano un qualche secolo; il perchè lascieremo a' nostri pronipoti la cura di studiare, e prevenire, di prestarvi i convenienti ripieghi, come appunto testè dissi, e come avvisavano i due matematici Prony e Sganzin.

Per ciò poi che riguarda gli odierni effetti, i quali danno materia a' timori di alcuni male veggenti, soggiungo in prima, che quel nuovo varco, quel solco naturalmente escavato traverso lo Scanno, notar si deve come prodotto di due opposte e contrarie azioni, una dell'acqua di mare cacciata dalle correnti nella Laguna, durante il periodo del flusso, per cui la profondità presso il vertice della nuova Diga; l'altra della corrente d'acqua che ne' periodi di riflusso sorte dalla stessa Laguna, onde la profondità protratta dalla radice di essa Diga fin quasi ad un miglio dalla bocca del Porto. Entrambi esse correnti, strisciando sulla Diga, aumentano la loro velocità relativa; quindi accade che, tanto al bacino esterno del Porto, davanti la Diga, quanto all'accennato vertice di essa, dalla parte di Sud, si è abraso il fondo, si è aumentata la profondità, vedonsi aperti ed allargati due seni od imbuti, i cui vertici, dirò così, che stanno ora davanti il riparto della Diga, tra le sezioni XIX. e XX. (diviso essendo quel manufatto in XXII. sezioni o riparti, per comodo de' lavori, principiando dalla sua radice al Porto) restano a poca distanza fra loro, e quasi quasi ormai si toccano e si confondono; ed è appunto in questo sito, lontano dal Porto un miglio circa, ove le velocità iniziali delle due correnti s' attenuano, che la nuova foce, pella lunghezza di soli metri 102 circa, è alquanto più ristretta, a confronto del resto, ma sempre conservasi di eguale profondità: circostanza veramente passaggera, come può arguirsi dagli effetti fin qui ottenuti, ma che pure infonde timore ed agita la vigilanza di chi può aver occasione per colà passare con grossi navigli e più ancora pe' sinistri preludii che

da un tale fatto, che mal direbbesi anomalia o fenomeno, ma che invece è ragion di natura, vorrebbero pure congetturare.

A conforto però di codesti diffidenti, la cui circospezione merita encomio anzichè censura, valgono alcune solenni verità, alcuni fatti, che il confronto de' vecchi co' recenti scandagli non permette di menomamente porre in dubbio: Che il solco apertosi naturalmente, traverso il banco, e che costituisce la nuova foce, va giorno per giorno sensibilmente allargandosi: Che codesta nuova foce ha la costante profondità di metri 5 : 20, cioè piedi 16 1/2 di Parigi, riferita alla linea di comune alta marea, anco nel suo tratto il più ristretto: Che in quel tratto più ristretto, cioè per metri 102 circa, tra la sezione o riparto XIX. e XX. della Diga, il canale è largo, nel più angusto di sua apertura, metri 30, larghezza alquanto diminuita a confronto della osservata due anni addietro. Lunge però dal trepidare per questo, e dal lagnarsi, a me sembra che, e per quanto fin' ora dissi, e per le osservazioni che vado facendo, questa stessa passaggera crisi sia da riguardarsi siccome foriera e caparra di un pieno successo; imperciocchè, a compensare l' accusato momentaneo ristringimento, ed a scacciare ogni ingrata dubbiezza, rallegra il trovare che dall' anno decorso al dì d' oggi quello spazio di canale si è accorciato per oltre 60 metri, vale a dire da metri 162 è ridotto a soli 102 metri, e ciò che più importa, la lingua del vecchio Banco, interposta tra il vertice del seno esterno, ed il vertice del seno interno, che ancora vi ho nominati, quella lingua, dissi, va gradatamente abbassandosi, e procedono in ragione diretta e l' accorciamento e l' abbassamento, in guisa che se nel profondo della foce avvi oltre metri 5 d' acqua, scandaglio come dissi riferito alla linea di comune alta marea, su quella lingua di basso fondo e ne' siti circostanti dell' antico Banco si trovano metri 4. 65 a 4. 80 di profondità; differenza minima trattandosi di mare, e che permetterebbe poter dirsi, quasi a un livello, il fondo della nuova foce con quello del Banco vicino, e che fa presagire il prossimo allargamento totale della stessa nuova foce, secondo una misura normale, costante; effettiva conquista delle acque sopra quel Banco, onde ne deriva un vantaggio che largamente compensa l' accen-

nato momentaneo restringimento; vantaggio che serve senz'altro a provare, come quei lavori, quelle opere, ideate e finora condotte a miglioramento del Porto di Malamocco, sono confacenti alle tendenze della natura, sono adattate e proprie alle condizioni della località; il perchè, e lo vediamo col fatto, la natura stessa coopera colle sue forze a coronare le brame comuni.

E già i modesti presagi di Prony e di Sganzin, le allarmanti predizioni dell'ingegnere Lahiteau, visto l'odierno aspetto delle cose, sembra che si possano se non porre in dimenticanza, certo assegnare a remota probabilità, il che io non sono tanto ardito per adottare, nè tanto animoso per proclamare: pure, se a sistema non ancora compiuto, anzi appena eseguito per metà, gli effetti che ne risultano sono tutt'altro che valevoli ad appoggiare quelle presunzioni; se in luogo di adunamento di sabbie, di accrescimenti in appendice al vecchio Banco, accade invece trovare che il Banco medesimo va sensibilmente disperdendosi; che esso, anzichè aumentare, anzichè ingrossare di fianco ed al Sud di quel nuovo varco, va via via dileguando, si abbassa, lascia luogo ad un seno largo e profondo: mi sarà gioco forza ritenere, quanto dissi da prima, cioè che ben lontana sia l'epoca assegnata dalla natura al supposto ricomparire di un nuovo Banco.

È vero! Dopo la collocazione della prima pietra alla nuova Diga per mano di S. M. l'Imperatore e Re nell'ottobre del 1838, od almeno negli ultimi anni, nessuna grande procella meridionale è avvenuta per poter in qualche modo praticamente determinare gli effetti del massimo commovimento del mare sulla Diga marmorea, e la sua influenza riguardo la nuova foce. Sono però d'avviso, che il corso dell'acqua istigato dalla perseveranza del vento, e le grosse onde urtando nella Diga e rinversate retrocedendo, saranno colla risacca per produrre, ferme le dovute proporzioni, gli effetti medesimi che ora vediamo, come quelli che vengono causati dall'acqua uscente dalla Laguna, cioè il maggiore profondamento della nuova foce. E già ne abbiamo il preludio nella totale scomparsa della parte estrema del vecchio Banco e nell'allargamento o seno che testè andava ricordando:

effetto questo che non dalle correnti di riflusso, ma sì da quelle del flusso e dall' azione del mare esterno deriva.

Che se taluno insorgesse ad avvisarmi, il giorno in cui sarà colmata di torbide e di sabbie la gran Duna od insenata sopravvento alla Diga di Nord, essere quello che segnerà l' incominciamento del temuto nuovo Banco, a ciò umilmente risponderei che quella insenata è vastissima, che quando pure sarà riempiuta, essa presenterà in superficie la figura di un grande triangolo quasi rettangolo, la cui ipotenusa, evidentemente partendo e disponendosi dal Lido sopravvento oltre il paese di Malamocco e verso la estremità foranea della Diga stessa, servirà di guida alla corrente litorale, che perciò si spingerà al largo; ed eziandio aggiungerei che in tale caso, i vortici prodotti alla estremità medesima, associati alla corrente di riflusso che sorte dalla Laguna, contribuirebbero a conservare in quel sito la desiderata profondità: e se le diverse circostanze del sito e la perennità della corrente di scarico ammettessero un lontano paragone, indicherei ad esempio la foce maestra del fiume Po, la quale abbenchè non assistita da alcun soccorso artifiziale, ma appoggiata alla propria sua sponda, vale per sè sola a contrastare colla radente del Golfo ed a ributtare le torbide che vi si adunano alla sinistra; laonde, anco per questo lato, vorrei trovare appoggio alla opinione da me esternata.

Tolte di mezzo, per quanto a me pare, le accennate difficoltà, sembrami confacente alla fatta trattazione dare un qualche ragguaglio sui movimenti osservati nella vecchia foce di questo Porto dopo la costruzione della gran Diga.

Questi movimenti sono, più che altro, di traslazione, intendo dire di deviazione, ma di favorevole ed utile deviazione, mercecchè la stessa vecchia foce durante l' annegamento de' massi, a base di essa Diga, andò piegando alquanto verso levante; in guisa che ora la si trova lontana dalla spiaggia di Pelestrina o meglio di San Pietro in volta, oltre metri 55 più di quanto lo era negli anni addietro: sembra però alquanto più ristretta, ma differisce appena e poco sensibilmente nella sua normale profondità che si conserva presso che la stessa, e tocca li metri 5. 30 circa, piedi 16 e 4 pollici di Parigi misurata allo sbocco.

Non è questo il caso, nè il momento di toccare agli effetti ed alle perturbazioni che i grandi manufatti di Malamocco collo scorrer del tempo produrranno al sistema del Porto di San Nicolò ed all'altro di Chioggia: questo delicato argomento ammetterebbe una particolare dissertazione, onde meglio è far silenzio, e in vece accennare: che, fino a quando sarà condotta l'altra Diga minore di Sud, la quale forma parte essenziale a compimento dell'intiero progetto di sistemazione, si hanno due foci che vengono praticate dai naviganti promiscuamente, secondo che le circostanze di mare consigliano valersi dell'una anzichè dell'altra. Ma questa alternativa, da' pratici accarezzata, cesserà tosto quando, per le opere che rimangono a farsi, sia in totalità stabilita la nuova Foce, ed abbia acquistata la normale e continua maggiore profondità; avvenimento immancabile, che la scienza ha predetto, e che la pratica e la esperienza van giornalmente confermando.

A questo punto sento le voci dei marinari che mi assordano col ripetere essere migliore la condizione di quei Porti al cui ingresso, non una sola ma più foci conducono, perchè in quest'ultimo caso ne riesce più agevole l'accessibilità nelle svariate circostanze di mare, e si può maggiormente profittare della mossa de' venti e della varietà delle correnti, così nell'entrata come nella sortita, ed essere perciò utilissima cosa conservare anco la vecchia foce di Malamocco, tralasciando di distendere la contro Diga di Sud.

Un tale principio, come massima generale, è una verità di fatto: pure giova far conoscere a costoro che conviene distinguere i Porti procurati, o migliorati dall'arte, da quei Porti originati dalla natura; mentre, tacendo dei primi, sarà sempre vero, che un porto naturale, sia lo sbocco di un fiume, o sia corrispondente ad una Laguna, sarà più profondo se l'acqua in esso fluisca e retroceda per una sola foce, imperciocchè, e quest'asserto non ha bisogno di dimostrazione, quando la massa d'acqua, uscente da una bocca, può divergere in più direzioni, può suddividersi in più canali, essa minora di energia, d'azione, quanto più s'allontana dalla bocca, e quindi la foce primaria del Porto (che ogni Porto ne ha una primaria) non tocca a

quella profondità che avrebbe, se la massa stessa dell'acqua per quell'unico varco passasse. E siccome uno fra i primarii vantaggi de'Porti è la massima profondità, se per conseguire codesto essenziale requisito riguardo il nostro Porto di Malamocco tanto studiarono i dotti italiani e francesi, e tanto indagarono prima di condursi al virtuale progetto che hanno poi suggerito; se a scopo siffatto venne precipuamente ideata la contro Diga di Sud, affinchè le acque scorressero, dirò così, incassate; se ad accrescere la loro massa aveansi anco proposte alcune Dighe e scaglioni traverso la Laguna di Chioggia, e traverso a quella di Venezia coll'intendimento di adunare le acque di flusso de' due Porti laterali di San Nicolò e di Chioggia, per sostenerle, farle riversare col riflusso ad inaffiar la Laguna media di Malamocco, procurare coll'accresciuta massa anco la massima velocità del riflusso e quindi una maggiore profondità a quella unica nuova foce (che voleasi giungesse fino alli 8 metri, cioè piedi 24 circa di Parigi); dovranno a forza que'marini concludere e persuadersi, che non si potrebbe conservare ulteriormente l'antica foce di Malamocco senza gravissimo danno della nuova, perchè si avrebbero due foci imperfette, e più che tutto, dopo tante spese, dopo tante cure si avrebbe un Porto, per deficienza di profondità, incapace al passaggio de' grossi legni da commercio e da guerra, ciocchè ripugnerebbe allo scopo dell'opera, si opporrebbe alle viste della militare marina, alle brame dei commercianti, ed alle lusinghiere speranze di questa Patria carissima.

Che se queste considerazioni fossero generalmente fatte conoscere, come in qualche occasione io stesso non ho risparmiato di fare, credo che quei, direi quasi, retrogradi marini, assuefatti a vedere le cose dal lato rovinoso, ed a giudicarle con preoccupazione, penetrati dalla evidenza dei fatti, non vorranno preferire un vantaggio accidentale e passagero alla utilità costante, e che volentieri rinunzieranno pel Porto di Malamocco alle misere prerogative di un Porto da Cabotaggio per conseguire invece con vedute splendide e generose le condizioni proprie ad un Porto di prima classe, atto a prestarsi all'alta navigazione, alla navigazione di lungo corso; mentre quell'unica nuova foce munita da un lato di validissime *Prese*, dall'altro provveduta, (quan-

do occorra) di *Gavitelli* da *ormeggio momentaneo* e da *gegomo*, segnalata da due Fari che ne indichino l'apertura, con davanti a sè, ed in pieno mare, il sicurissimo *Sorgidore di Pelorosso*, potrà essere agevolmente accostata, facilmente imboccata e sicuramente percorsa, quand' anche soffiasse il vento tra l'Est e il Nord-est; chè quello di traversia contiamo essere il Sud-Est ed i rombi a lui vicini.

Lungi dunque i timori, lungi quelle dubbiezze che tengono inceppate le menti, che rallentano il corso alle commerciali speculazioni, che avviliscono e tarpano gli onesti desiderii di ogni Veneziano; il nostro Porto è buono, esso va progressivamente migliorando, e come un tempo ha primeggiato, figurerà ancora fra i Porti principali d'Italia per favorevole posizione, per sicurezza d'interna stazione, per comodo, per capacità di spazio, che può accogliere e dar ricetto contemporaneamente a grande numero di navigli. Qui Lazzaretti munitissimi, qui Leggi sanitarie prese già a modello dalle altre nazioni, qui emporei, qui magazzini, qui dogane, qui fondachi, qui mente, qui cuore, qui mezzi, nulla qui manca; sorga dunque il buon volere e siangli compagne e sorelle l'attività, la operosità, il nobile orgoglio di efficacemente cooperare alle viste munificenti dell' Augusto Sovrano.

Me fortunato, se con queste parole giungessi a persuadere, a convincere i mal prevenuti. Questo appunto è lo scopo cui tendono le mie brame!

(*Letta nella sessione* 30 *Gennaio* 1848.)

# ESPERIENZE ED OSSERVAZIONI

SULLA CULTURA

# DEL TRIFOGLIO INCARNATO

## MEMORIA

DEL CAV. AGOSTINO DOTT. FAPANNI

### PARTE I.

Non vi fu scrittore assennato nostrale o straniero, che esaminando lo stato dell'Agricoltura delle Provincie Venete non abbia riconosciuto, che la nostra economia agraria quasi da per tutto patisce difetto di foraggi, difetto proveniente da due essenzialissime cause; che sono la poca quantità di terre che si destinano a prato naturale ed artificiale, e le poche e non provvide cure che si dedicano alle praterie. Da ciò deriva e si stringe quella dura catena, che quasi tutti gli agricoltori conoscono e provano, e pochi sanno dirompere e infrangere, la quale al mancamento de' foraggi tien legata la scarsezza degli animali da lavoro e da macello; a questa si avvincola la diffalta de' concimi, a cui si annoda per ultimo la frequente penuria d' ogni campestre prodotto.

Ai danni di tale difettoso agrario sistema si aggiunsero nel prossimo decorso decennio quelli delle stagioni, che in molti de' nostri paesi furono avverse all' abbondante raccolta de' fieni. Se non che le avversità atmosferiche avendo più efficacemente ammaestrato i coltivatori, che non le dottrine e le ripetute esortazioni degli agronomi, ne venne che alcuni si diedero a studiare, quale coltivazione di nuovi

foraggi, oltre gli usitati, potesse soccorrere alla sempre crescente carestia d' alimenti pel bestiame.

Fra le piante più acconcie a formar prati artificiali fuvvi qualche benemerito (del quale farò in appresso la debita onorevole menzione) che introdusse tra noi il Trifoglio incarnato. Mi accertai del buon esito, e dell' utile introduzione di questa pianta, quando conobbi che non ricerca terreno nè molto ricco, nè molto preparato; ch' essendo pianta annuale da seminarsi alla fine di Agosto, e da raccogliersi a' primi di Maggio susseguente, occupa il terreno che in molti paesi resta vacuo e infruttifero tutto l'inverno; che invece di smungerlo, lo bonifica e lo rende atto a ricevere il grano turco; che finalmente porge la più primaticcia e sana pastura fresca ai bestiami a' primi di Maggio, dopo il lungo, secco e scarso alimento dell'invernata. Perciò vedutala in pochi anni estendersi e dilatarsi in molti paesi con tale profitto, da riputarla, a mio debole avviso, una delle più utili agrarie introduzioni de' nostri giorni, mi posi ad apparare sui libri, e sperimentare nei campi il miglior modo di coltivarla. Quindi dal 1837 fino al presente consultai le opere di quanti Agronomi italiani e francesi mi venne fatto di rinvenire, ne interrogai personalmente i migliori coltivatori di pratica, e per undici anni continui coltivai il Trifoglio incarnato nel mio podere di circa 100 campi trivigiani, che lavorati per economia circondano la mia casa di villeggiatura in Martellago, nel Distretto di Mestre, nella Provincia di Venezia.

Raccolte pertanto le regole che trovai sparse qua e là in varii Autori relative al modo di coltivare il Trifoglio incarnato, assoggettai ad esperimento quelle che credei più opportune alla buona riuscita ed alle qualità del mio terreno, e registrandone gli ottenuti risultamenti, venni a compilare questo scritto, che desidero possa servire di eccitamento (non osando dire di guida) a chi volesse intraprendere tale coltivazione, giacchè, dalle fatte ricerche, non mi è noto, che alcuno fra gl' Italiani abbia pubblicato un formale Trattato sulla cultura di questo foraggio [1]; e tra' Francesi il solo celebre Agronomo Matteo Dom-

(1) Dopo letta all'I. R. Istituto questa Memoria venni a conoscere i *Cenni sul trifoglio russo* di Alvise Lonardi fattore del sig. Paolo Libanti in Bragagnani sotto il comune di Oppeano. Vero-

basle pubblicò in Parigi una breve *Notice sur le Trèfle incarnat*, che a me però non riuscì di rinvenire, avendo io d'altronde approfittato, come sarò per dire in appresso, dei cenni ch'ei diede di questo coltivamento ne' suoi *Annales agricoles de Roville*.

## Capo I.

*Descrizione botanica del Trifoglio incarnato, cenni sopra gli Autori che ne scrissero, e indicazione de' paesi ove maggiormente si coltiva.*

Il Trifoglio incarnato, *Trifolium incarnatum* L., è pianta erbacea appartenente alla Diadelfia decandria del sistema sessuale, ed è una delle duecento cinquanta e più specie di Trifogli, che formano un genere nella famiglia delle leguminose. È pianta annua, che presenta secondo il ch. prof. Giuseppe Moretti [1] i seguenti caratteri botanici. Radice annuale gracile fibro-ramosa, caule eretto solcato, vestito di rara pelurie, alto dalle nove alle quindici oncie, foglie ternate cuneiformi, con leggera smarginatura, villose, crenulate: il picciuolo lungo più di due pollici, dalla cui base staccansi due ale membranacee ovato-lanceolate, superiormente screziate in rosso, che a guisa di vagina bassamente attorniano per qualche linea il caule: spica unica cilindrica, ottusa, lunga due pollici all'incirca senza brattee: calici lanuginosi divisi in cinque lacinie fatte a lesina: corolla d'un purpureo vivace, talora però di un color carneo, secondo i luoghi ove vegeta, con vessillo caduco, ali persistenti, diritte e lanceolate; il legume arcuato, complesso ed appena più lungo del calice.

In Italia viene chiamato volgarmente Trifoglio rosso, Trifogliolo, Erbone, Erba lupina, Trifoglio Pesarone e Pesarese, perchè coltivato in addietro, forse più che in altro luogo, nel territorio di Pesaro, Tri-

na, tip. Libanti, 1845 in 8.° di pag. 8. Questi cenni che sono puramente pratici li reputo giovevoli specialmente agli agricoltori della Provincia Veronese, per cui pare che siano scritti: ed in essi vi notai indicata una maniera di coltivare il Trifoglio incarnato che non trovai accennata da alcun altro: vale a dire di seminarlo nelle risaie.

(1) Elementi di Agric., Tom. IV. pag. 250, Milano 1835.

foglio matto da' nostri Contadini, per distinguerlo dal Trifoglio comune pratense; e da alcuni coltivatori, non bene istrutti della provenienza di lui, lo sentii denominare Trifoglio Russo, Chinese ed Indiano, e perfino Trifoglio d' Egitto.

In Francia poi gli si dà volgarmente il nome di *Trèfle Farouche*, *Farouch*, *Ferou*, che equivale a selvatico: ed è molto pure conosciuto sotto la denominazione di *Trèfle de Roussillon*, perchè in quella Provincia si coltiva più estesamente che in ogni altra; e pare che di là si sia propagato in altre parti di quel Regno, ed anche fuori del medesimo.

Tra i Botanici ne diedero una figura il Lobelio, il Dodoneo, il Dalechamp, il Clusio, Giovanni Baulino, Domenico Chabreo, il Morison, il Rivino ed il Barrelier; tutte però figure, come me ne fa fede il nostro onorevole collega sig. prof. De-Visiani, o cattive o incomplete, e senza colori. Il Gaertner ed il Lamarck ne rappresentarono il solo legume ed il seme. Tale mancanza mi ha determinato ad unire alla presente Memoria una figura esatta del Trifoglio incarnato, che feci trarre dalla natura e colorire dal vivo anche nelle singole parti della fruttificazione dall' abile Pittore fiorista sig. Jacopo Acqua veneziano. Quanto alla patria del Trifoglio suddetto, non solo è spontaneo di molti paesi, sì invece di tutta Italia dall' Alpi al Lilibeo: e parlando delle nostre Provincie, Marzari Pencati l' osservò nativo nella Vicentina (1), il prof. Pollini nella Veronese (2), il dott. Zanardini in quella di Venezia (3). Nasce pure spontaneo nella Svizzera e in diverse Provincie di Francia, nei contorni di Parigi, di Mompellieri, di Laon ed altrove, come ce ne accerta l' Enciclopedia metodica (4).

Vi è una varietà di Trifoglio incarnato, che fa il fiore carnesino, e tal altra bianco, che Balbis e Decandolle denominarono *Trifolium Molinerii*, e questa, forse più ch' ogni altra, si trova spontanea in Italia.

La pianta, ove da sè cresce selvatica, presenta ne' fiori un color

(1) Elenco delle piante del Vicentino, Milano 1802.

(2) Pollini, Catechismo Agrario 1819, Verona in 8.°

(3) Zanardini nella Flora Veneta 1847 nell'Opera *Venezia e le sue Lagune*, Vol. II. Parte 3.ª

(4) Encycl. méthod. Botanique, Tom. VIII., Partie I.

carnicino, o roseo pallido, che le valse il nome specifico d' incarnato datole da' Botanici, mentre la coltivata distinguesi pel suo bel rosso puniceo vivacissimo.

Il primo, per quanto a me consta, fra gli scrittori Italiani che abbia dato contezza del Trifoglio incarnato qual pianta da foraggio, fu il dott. Ottaviano Targioni Tozzetti, che accennò sino verso il 1794 coltivarlasi intorno a Firenze per pastura delle bestie di campagna (1). Simonde di Ginevra nel viaggio fatto in Toscana verso il 1800 (2) osservò, che il Trifoglio incarnato col porporino de' suoi fiori, col verde opaco delle sue foglie, e col vigore d' una ricca vegetazione formava l' ornamento dell' etrusche campagne. Quegli poi, che dopo le indicazioni di Targioni Tozzetti, ebbe il merito di promuoverne nel 1809 la cultura, fu il co. Filippo Re, che ne raccolse le notizie dai professori Miotti, Spadoni e Brignoli, e le inserì ne' suoi Annali d' Agricoltura del Regno d' Italia di quell' epoca: e fu quel sommo Agronomo (che mi onorava della sua corrispondenza) che mi fece conoscere il Trifoglio incarnato da lui coltivato a foraggio in un ritaglio di terra dell' Orto agrario dell' Università di Bologna, e nel 1811 me ne regalò alcuni semi.

Tra' Francesi non rinvenni alcuno, che ne parlasse, come pianta da prato artifiziale, prima del sig. De-Père nel Vol. XI degli Annali agrarii di Francia, e sulle traccie di lui i compilatori del Dizionario ragionato universale di Agricoltura (3); a' quali tenne dietro con più estesi ragguagli e più particolarizzate esperienze il prelodato sig. Dombasle.

Dopo di lui il sig. Vivien nel suo nuovo Dizionario d' Agricoltura (4), ed il sig. Bixio nella sua *Maison rustique du XIX Siècle*, e tanti altri ancora di quella nazione, fra' quali più specialmente il prof. Lecoq nel suo applaudito *Traité des Plantes fourragères* (5).

(1) Istituzioni Botaniche, Prima Edizione 1794, e Lezioni di Agric. nel Tom. II. pag. 1209, Firenze 1802.

(2) Tableau de l' Agric. Toscane, Genève 1801 in 8.°

(3) Traduzione di Padova 1822, T. 25 pag. 5.

(4) Nouveau cours complet d' Agric. Paris 1834—1839, T. XVII

(5) Paris 1844, in 8.°

E chi mai avrebbe detto che di un' utile pianta, ch' è indigena tra noi da un confine all' altro di questa bella Penisola, che cresce e vegeta spontanea sotto a' nostri piedi, che accreditati Agronomi nostrali ci additarono da molto tempo fra le più adatte a moltiplicare con poca spesa la massa de' nostri foraggi, chi avrebbe detto, che di questa pianta non si raccogliessero i semi presso di noi, e si dovesse ripeterli dall' alpigiano Chambery? E pur così avvenne, e ne sia giusta lode al valente agronomo bassanese nob. sig. Francesco Bortolazzi, che nel 1829, procuratisi di là dalla casa Burdin gli occorrenti semi di Trifoglio incarnato, ne introdusse la coltivazione ne' suoi fondi, e da lui la impararono gl' industri suoi concittadini, e poi gli agricoltori di Cittadella, di Castelfranco, e delle pianure sottostanti alle colline Trivigiane di Asolo e di Montebelluna.

Veduta ch' io ebbi nel 1836 tale coltivazione fruttuosamente diffondersi in que' Distretti, m' invogliai di farne prova, ricordevole ancora degli encomii, che me ne aveva fatto il sullodato Georgico Reggiano. Ne seminai nel mio podere dominicale, ne diedi a seminare a' miei fittaiuoli, i quali, come cosa nuova, lo ricevettero da principio a mal in cuore, poscia ammaestrati dalla buona riuscita, che ne videro nei miei campi, e dalla grande carestia de' fieni delle ultime annate, non tralasciarono di coltivarlo con impegno; ed ebbi la compiacenza in questi ultimi due anni di vedere imitato il mio esempio da molti villaggi della superior parte del Distretto Mestrino.

Dalle notizie, che mi sono procacciato, mi risulta, che la coltivazione del Trifoglio incarnato poco si estende nelle Provincie di Padova, del Polesine, di Verona e di Belluno; che nella Vicentina vi progredisce in altri Distretti, oltre i menzionati di Bassano e di Cittadella; che nella Trivigiana vi si va dilatando, e così parimente nel Friuli, come di quest' ultimo si legge nel foglio settimanale intitolato *L' Amico del Contadino* compilato dal nostro onorevole collega co. Gherardo Freschi, che riportò sino dal 1844 due articoli sopra le felici sperienze fatte di tale coltivazione dai valenti signori Del-Torre e D' Angeli, alle quali si può aggiungere le altre dei signori Zuccheri in San Vito del Tagliamento, ch' io stesso ho veduto con piacere nel

1846. Dalle notizie, che mi favorirono gli egregii Georgofili signori marchesi Francesco e Gio. Paolo de Polesini di Parenzo venni a sapere, che per opera loro, or sono dieci anni, la si è introdotta ed estesa, oltre che ne' vasti di loro possedimenti, anche in altre parti del Distretto di quella Città, e in altri Distretti dell' Istria: come vi è pure fiorente nel Circolo di Gorizia. Quanto sia introdotta ed estesa in Lombardia la cultura del Trifoglio incarnato non lo posso dire, perchè non trovai Autori che ne parlino, eccettuato quanto contiensi nel Vol. IV. degli Elementi di Agricoltura del prelodato prof. Giuseppe Moretti [1], in cui riferendo di questo foraggio, dice, che il si coltivò primitivamente nel Distretto di Angera nella Provincia di Como per opera dei signori padre e figlio Castiglioni: ma non facendo egli cenno che in altra Provincia Lombarda si coltivasse, pare, che all' epoca in cui scriveva, ch' era nel 1833, non se ne fosse dilatato l' uso: come non sembra che ciò sia avvenuto neppure nel Piemonte, poichè Anton Evasio Borsarelli in una sua Memoria letta alla Reg. Società Agraria di Torino nel 1820 *sopra alcune spezie di Trifogli, che servono di pascolo e di foraggio,* non indica che nel Piemonte si faccia grand' uso dell' incarnato; può darsi che in appresso tanto colà, che in Lombardia siasene dilatata la coltivazione: ed attendo di là le richieste notizie che inserirò in appendice di questa Memoria, se mi giungeranno in tempo. Il valente Ingegnere dott. Annibale Ratti mi assicura di aver veduto, in un recente suo viaggio, di assai belle e vaste culture di questo foraggio nel Bolognese, nelle Marche Pontificie, e segnatamente in quella di Ancona, ed anche nella Sicilia.

## Capo II.

### *Del clima e terreno più conveniente al Trifoglio incarnato.*

Sebbene i primi ad accogliere il Trifoglio incarnato sieno stati sì in Italia, che in Francia i paesi meridionali, pure col progresso del tempo se ne estese la cultura anche a' settentrionali di Picardia e Nor-

(1) Milano 1835, in 8.°

mandia, e Pictet narra di averlo coltivato con successo nei contorni di Ginevra. Dombasle asserisce, che cinque anni d'esperienza non gli lasciarono più dubbio sugli avvantaggi che ne ritrae l'agricoltura del nord della Francia, nulla sofferendo questo foraggio pe' ghiacci invernali, purchè al sopravvenire di essi trovisi bastantemente forte e radicato, il che si ottiene col seminarlo per tempo dopo la metà, come sarò per dire, di Agosto. Certo è che ne' paesi meridionali matura più presto, che non nei nordici: e perciò può dare maggior vantaggio in quelli, che in questi.

Quantunque lo stesso Agronomo affermi che questo foraggio sia poco delicato per la scelta del terreno, tutti null'ostante convengono, ch'egli ama di preferenza un terreno leggero e sciolto, meglio che uno forte e tenace, non isdegnando però l'argilloso, quando non sia troppo compatto, e trattenga di soverchio l'umidità, che gli è nemica; come del pari fallisce nelle terre eccessivamente calcaree. Proviene nelle silicee, e nelle ghiaiose, se non sieno troppo magre, asciutte e di poca profondità. Ne' terreni buoni, sani e freschi riesce egualmente bene tanto in pianura, quanto in collina, e generalmente gli sono confacenti tutti quelli atti a produrre il Trifoglio comune, il frumento, la ségale.

Vilmorin dice, che gli ha sempre fallito ne' terreni calcarei: io lo coltivai per tre anni in un campo, in cui prevale quel tufo arido, che da noi si chiama volgarmente *caranto,* altrove *calcinello,* eppure non mi diede scarso prodotto.

## Capo III.

### *Dei tempi e modi di seminarlo.*

La vera stagione di seminare il Trifoglio incarnato, a detto degli Agronomi Italiani e Francesi, è dalla metà di Agosto sino alla fine di Settembre. Il seminar prima espone il seme, se domini, come d'ordinario, il caldo e l'arsura, o a non nascere, o a perire appena uscito di terra. Il posticipare la seminagione, come riferisce il prof. Brignoli

usarsi nel Dipartimento del Metauro [1], sino al mese di Ottobre, porta le conseguenze, che nasce tardo pel minorato calore dell' atmosfera, e che non può metter forti radici prima delle sopravvegnenti brinate, per cui venuto su gracile in primavera, non cestisce, cresce rado, a rilento, e porge un troppo tardo e meschino ricolto.

In due modi si suole seminare questo foraggio, o consegnandolo alla terra solo e isolato, o in compagnia d' altra pianta. Il grano, a cui si suole accompagnare, è il grano turco cinquantino, tra mezzo al quale si sparge la semente del Trifoglio, e la si copre nell' atto stesso che colla zappa, o coll' aratolo si dà la seconda sarchiatura al cinquantino medesimo. Così pratica la maggior parte dei coltivatori di Bassano, di Castelfranco e del Distretto di Treviso al di sopra del Sile. Nel Distretto di Angera nella Provincia di Como lo spargono fra le rape, nei boschetti di gelsi, nei filari di viti, tra il miglio e il panico: e dopo la metà di Settembre, quando questi grani toccano la loro maturità, ed il Trifoglio fa verdeggiare tutto il campo colle sue foglie radicali, allora si raccolgono i primi, lasciando nel miglior modo possibile intatto il secondo.

Io ho provato varii anni a seminare il Trifoglio incarnato in mezzo al grano turco cinquantino, ma non n' ebbi mai quella buona riuscita, che vidi ritrarne dalle terre poste superiormente al Sile: ed il motivo si è, perchè da noi nel Distretto Mestrino facendosi le sarchiature al cinquantino colla zappa, ed accumulandosi al gambo di lui assai più terra, che non si adopera ne' paesi, ove il terreno è piuttosto ghiaioso, siliceo, di poco fondo, ne consegue, che levato il mais dal campo, resti il Trifoglio molto ineguale da una parte pei cumuli di terra rialzata, e dall' altra per le cavità formate dal detto rialzamento, e quindi il seme del Trifoglio caduto in quelle cavità, se la stagione successiva vada piovosa, patisca per troppa umidità, e quello sparso sui rialti, se il tempo inclini all' asciutto, non nasca, o intristisca. Oltre ciò l' ineguaglianza di que' cumuli e di quelle cavità rende più lunga la falciatura e la ricolta del fieno.

Si aggiunga altresì, che non dandosi per solito al cinquantino.

(1) Annali d' Agric., Tom. 9 pag. 153.

che succede immediatamente al frumento mietuto, alcuna letaminazione, se il campo che lo accoglie, non è di buona qualità, non può somministrare al Trifoglio un lauto alimento, poichè viene terzo a vegetare sopra una terra, che ha già nutrito altre due differenti qualità di grani.

È vero che seminando il Trifoglio nel cinquantino, o fra mezzo ad altri grani minori serotini, come il miglio, il panico, il saraceno e le rape, si risparmia il lavoro di un'aratura; e si hanno da un solo campo nel periodo di dieci mesi due ricolte: ma le prove, che feci, mi ammaestrarono che l' unico prodotto del Trifoglio seminato solo, e non molestato dallo sterpamento dei gambi degli altri grani, a cui lo si vuole associare, supera il profitto delle due ricolte. Osservai parimente, che seminando il Trifoglio nel cinquantino, non si può sempre cogliere il momento opportuno a detta seminagione, perchè conviene farla, quando il mais abbisogna di essere sarchiato, giacchè questo altrimenti ne sentirebbe danno: operazione, che fatta quando domina l' asciutto, la semente del Trifoglio perisce disseccata.

Gioverà adunque seminarlo solo, e senza mistura di altre piante. facendolo succedere alla ségale, all' orzo, al frumento.

Al campo, che si destina al Trifoglio incarnato, tosto liberato dalla messe, si dia una buona aratura per sotterrarvi le stoppie ed ogni altra erbaccia, e lo si erpichi bene, e tutto si compia senza ritardo, perchè altrimenti il sole cocente di Luglio potrebbe indurire il terreno a modo, da renderlo incapace di accogliere utilmente la sementa nel successivo Agosto. Verso la metà di questo mese, quando il gran caldo comincia a cessare, e che il terreno sia stato rinfrescato da una buona pioggetta, si ari di nuovo il campo, si divida in larghe porche, vi si adoperi l' erpice per triturar bene ed appianare la terra: indi si getti con giusta mano la semente, coprendola poscia col passarvi sopra il rotolo, e meglio l' erpice co' denti all' insù.

Se dura l' asciutto, e non viene la pioggia neppure agli ultimi di Agosto, non si lasci inoltrare Settembre senza avere almeno dato principio alla seminazione del nostro foraggio, effettuandola in ora fresca verso il tramontare del sole; nè si copra con terra la sparsa semen-

te, affinchè senta l' azione della notturna rugiada: all' alba poi del dì seguente la si copra coll' erpice.

Andando propizia la stagione al seminamento, non lo si compia tutto di seguito, quando vogliansi destinare parecchi campi a questo foraggio: ma si divida possibilmente la seminazione in tre periodi, vale a dire in primaticcia alla metà di Agosto, in mediana a' primi di Settembre, in serotina verso li 18 o 20 del detto mese. Da ciò proverrà, che l' erba non si maturerà tutta ad un punto, che sarebbe d' impaccio per falciarla, per farla consumare fresca a' bestiami, o per farla seccare: ma col metodo, che suggerisco, venendo a maturità coll'ordine, con cui fu seminata, darà per lungo tempo un fresco cibo agli armenti; nè dovrà l' agricoltore affrettarsi a coglierla tutta in pochi giorni.

Fin qui ho parlato di seminature da farsi in terre, che supposi non abbisognare di letaminazione, nel caso che fossero state concimate prima di porvi il frumento, od altro grano, che avesse preceduto il nostro Trifoglio. Ma nella circostanza che queste terre fossero o di per sè stesse poco ubertose, o smunte e sfruttate dagli antecedenti prodotti, conviene allora rinvigorirle e soccorrerle con una conveniente letaminatura in precedenza allo spargimento del Trifoglio.

Nè qui mi si dica coll' autorità di Dombasle e di Vilmorin, e con quella pure del co. Re, che si può seminare il Trifoglio incarnato anche senza letame e con arare ed erpicare una sola volta le stoppie del campo, chè ciò volli sperimentare anch' io, e vidi sperimentare spesso da' nostri contadini specialmente da quelli, che mancano di concimi, e di mezzi di procacciarsene. Ma quale è il prodotto, che si ricava da tali imperfette coltivazioni? Quello corrispondente, come suole sempre avvenire, alle deboli forze del campo, in cui le si praticano. Ciò nulla meno io non dissuaderei mai il male agiato colono dal coprire il mal agiato suo campicello di Trifoglio incarnato, piuttostochè lasciarlo vacuo per interi otto mesi; ei non farà ricolta di foraggio così abbondante come quella del campo ben concio e ben preparato, ma farà una ricolta che certamente lo compenserà della tenue spesa del lavoro e della sparsa semente, ed avrà con essa liberato il ter-

reno dalla farragine delle male erbe, nonchè giovatolo meglio, che non col riposo della invernale stagione.

Discorso avendo sin ora delle seminagioni del Trifoglio incarnato solite a farsi ordinariamente e quasi da per tutto dalla metà di Agosto sino alla fine di Settembre, verrò ora a parlare di quelle, che chiamerò straordinarie, e che alcuni Autori suggeriscono di fare in varii tempi dell' anno: intorno a ciascuna delle quali mi piacque tentare qualche sperimento.

Il sig. Bixio dice che si può seminare il nostro Trifoglio in tutte le stagioni dell' anno, ma con migliore riuscita e vantaggio dopo la messe del grano.

Il co. Re e Ciro Pollini affermano, che si semina anche in primavera; ma il primo di questi avverte, che la riuscita n' è incerta, perchè se la stagione va asciutta, difficilmente nasce, e nato che sia, rimane basso e meschino.

Così avvenne a me, che per tre anni ne seminai in primavera: e nell' anno 1846 correndo l' inverno assai tepido, ne posi in due campicelli a' dì 9 di Febbraio; spargendolo solo in un campo, e senza altro grano: nell' altro campo lo sparsi coll' avena; il Trifoglio seminato solo fiorì più presto, e crebbe un po' più alto di quello seminato coll' avena: ma non cestì, gettò uno stelo gracile, e una spiga stentata, che tra l' uno e l' altra non aggiungevano alla metà del Trifoglio seminato in Agosto. Maturarono ambidue alla fine di Giugno, ma quello seminato coll' avena, soperchiato dall' ingorda e prevalente compagna, non potè alzarsi quant' essa, e diede magro ricolto, avendo egli forse impedito la maggior produzione dell' avena medesima: così si nuocqero a vicenda; chè anche in fatto d' erbe e di piante l' esperienza dimostra, che le associazioni male combinate non danno giammai prosperi risultamenti.

Li professori Spadoni e Brignoli raccontano, che si può seminare il nostro Trifoglio nel frumento prima della messe: io feci anche questa prova, spargendolo in Marzo tra il grano, ma non corrispose; perchè tagliata la messe, il Trifoglio rimasto rado, sorse a piccola altezza, andò tosto in fiore pel caldo sopravvenuto di Luglio, e se ne dovette

fare una scarsa falciata. Imperciocchè questa specie di Trifoglio per essere annuale, segue nel suo nascere, nel suo crescere e maturare i periodi diversi da quelli che percorre il Trifoglio pratense, che dura più anni.

Nel 1846 feci un altro sperimento non additato, per quanto io sappia, da verun agronomo: e fu il seminare il Trifoglio incarnato alla fine di Giugno colla speranza di ritrarne una sufficiente ricolta verso Ottobre: ma osservai che anche questa seminagione era fuori di tempo, e che il calore estivo, affrettandone la vegetazione, lo faceva maturare troppo presto, e quindi scarseggiare in prodotto.

Laonde tutte queste pruove mi confermarono nella già adottata opinione, che qui da noi la stagione più propizia per la semina di questo Trifoglio sia quella dalla metà di Agosto alla fine di Settembre.

Dal prelodato sig. Bortolazzi di Bassano imparai una assai buona e cauta maniera di seminare il nostro Trifoglio verso la metà di Agosto: questa consiste nello spargerlo tra mezzo quel grano turco, che noi chiamiamo *Sorghetto,* ed è quello che si pone tardivo da segare in erba per pastura degli animali. Adottando quest' associazione di foraggi, che non ha i difetti di quelle accennate di sopra, si semina prima il grano turco, e poi senza altro lavoro vi si sparge sopra la semente del Trifoglio. Il mais, crescendo più rapido e rigoglioso, copre e difende il Trifoglio dall' arsura, che talvolta si fa sentire alla fine della state. In Ottobre poi, falciatosi il grano turco, resta libero il campo al Trifoglio che lo veste di fresca verzura.

Ora vengo a dire della qualità e quantità della semente da consegnarsi al terreno. Parlando prima della qualità, la si cerchi della migliore, proveniente da buon terreno e da buon venditore, matura, nutrita, di colore giallognolo; chè quella tinta di un giallo oscuro, che tira al rossigno, è inferiore, e dinota o d' aver fermentato per umidità, o di esser vecchia di qualche anno addietro. Non è che la semente di due anni non nasca, chè anche bienne la trovai produttiva; non potrei dire altrettanto, se la si seminasse più vecchia, perchè non ne feci pruova. Suggerisco però di preferire la nuova alla vecchia, e la raccolta ne' proprii fondi alla vendereccia. Nell' acquistare

quest'ultima conviene andare circospetti, perchè i rivenduglioli di mala fede vi mescolano dentro e sabbia e polvere, ed anche miglio, il quale ha una qualche rassomiglianza col seme del nostro Trifoglio, ch'è però di quello più minuto. Guardisi adunque di sceglierla netta da materie eterogenee.

La semente di Trifoglio incarnato è un po' più grossa di quella di Trifoglio pratense o comune. Indicar dovendo la quantità di semente del nostro foraggio occorrente a sementare una data superficie di terreno, mi è d'uopo distinguere, se la si voglia spargere netta e monda da buccia, oppure coperta de' suoi calici e pericarpii. Nel primo caso, ch'è il più usitato, il co. Re assegna libbre 20 di seme netto per ogni bifolca a misura di Reggio di Lombardia. Il *Buon Giardiniere* nella traduzione del sig. Carlo Maupoil [1] dice che occorrono libbre 32 all'incirca per seminarne una tornatura; e Matteo Dombasle kilogrammi 25 per ettaro: li sig. Bixio e Lecoq soli kilogrammi 20 per una simile superficie di terreno. I coltivatori Trivigiani nelle terre asciutte, ghiaiose e di poco fondo della parte superiore del Territorio ne spargono da 10 a 12 libbre grosse Trivigiane per campo della nostra misura: e quelli dell'inferiore ne seminano da 16 a 18 libbre: calcolandosi a un di presso che la libbra grossa di Trevigi sia poco più della metà di un kilogramma, o libbra metrica, ed il campo Trivigiano sia poco più della metà di una tornatura, od ettaro.

Nel secondo caso, in cui si sparge la semente vestita de' suoi involucri o gusci, fa di mestieri adoperarne maggior quantità, la quale dall'Agronomo Reggiano viene accennata in tre sacchi per bifolca, dal prof. Moretti in due libbre da 28 oncie per ogni pertica milanese, dal sig. Del-Torre dalle 35 alle 40 libbre del Friuli per ogni campo di quella Provincia, dalli sig. Bixio e Lecoq da 45 a 50 kilogrammi per ettaro. Quelli che preferiscono al primo questo secondo modo di spargere il seme del Trifoglio, adducono per ciò fare due plausibili motivi. Primieramente, perchè il seme vestito del pericarpio mantiene più a lungo la virtù germinatrice, e resiste meglio all'azione del sole, se avvenga che l'erpice non bene lo copra, o domini lunga dopo

(1) Venezia 1826. in 12.°

la seminagione l'arsura. In secondo luogo, perchè il mondare bene il seme del nostro Trifoglio dal guscio è opera lunga e tediosa, per la quale non tutti i coltivatori hanno la pazienza e l'attitudine. Quando si semina coi gusci conviene aver cura di ben separare il grano colle mani, per evitare che si aggrumoli e cada qua fitto e là rado. Tanto seminando il grano mondo che vestito, conviene scansare questi due eccessi della troppo rada e della troppo fitta seminagione. L'esperienza e la conoscenza de' proprii fondi devono suggerire all'accorto seminatore quando ei debba stringere, ovvero allargare opportunamente la mano.

Non sarà inutile, che io faccia un cenno del prezzo a cui si suol vendere il seme netto del Trifoglio incarnato. Il valore di lui cresce e diminuisce, come ogni altra derrata, a seconda della scarsa od abbondante ricolta, che se ne fa in paese, del maggiore o minore spaccio, della maggiore o minore difficoltà di averne dall'estero. Nel 1827 nello stabilimento orticolo agrario del sig. Maupoil al Dolo valeva una lira austriaca all'oncia, perchè il si doveva ritirare dalla Francia, chè qui da noi era appena conosciuto. Nel 1836 il sig. Burdin di Torino lo vendeva ad un franco alla libbra. Dopo quell'anno dilatatasene, come dissi, anche qui da noi la coltivazione, rade volte il si comperò sui nostri mercati più caro di una lira austriaca e centes. 14 alla libbra metrica: così valse nel prossimo passato anno 1847; nel 1846 era disceso a soli cent. 80 e 70 alla libbra pure metrica.

## Capo IV.

### *Della nascita, vegetazione e fioritura del medesimo.*

Seminato con tali avvertenze il Trifoglio incarnato, lo vedrai verso la fine di Ottobre ricoprire di un bel verde il terreno; e se questo sarà stato o ricco di per sè, o pel concio somministratogli, e se la stagione gli sarà andata propizia, lo vedrai, spezialmente il seminato per tempo, crescere un po' troppo, e di tal maniera che qualche agricoltore s'induce a falciarlo prima del Novembre, per temperargli quel

soverchio rigoglio. Ciò feci anch' io tal fiata, e tal altra ancora ne segai un campo di troppo vigoroso a' primi d' Aprile: l'uno e l' altro ripullulò, fiorì e giunse a maturità, ma risultommi assai meno produttivo e men bello del non falciato. Per ciò non credo che sia da ammettersi quanto si afferma nel *Corso completo di Agricoltura,* cioè che si possa tagliarlo due volte: e tanto meno mi associo alle opinioni del *Buon Giardiniere,* e del sig. Bixio, i quali suggeriscono, che in primavera si possa farlo pascolare dalle pecore: poichè varii sperimenti mi documentarono, che non è applicabile al Trifoglio incarnato quel Virgiliano precetto (1): *Luxuriem segetum tenera depascit in herba.* Ma all' appressarsi della fine di Aprile, al tempo dolce di que' giorni sereni, il lavoratore, che avrà ben condotto la coltivazione del nostro Trifoglio, lo vedrà crescere e lussureggiare a profitto, allargare il cespite, allungare lo stelo, coprirlo di foglie, e tra il verde oscuro di quello e di queste sbocciare il fiore carneo da prima in sul vertice, poi mano a mano che cresce al vivido raggio del sole, farsi rubicondo e imporporare la sottostante verzura. A chi vede in distanza un vasto campo di Trifoglio incarnato in pieno fiore, sembra di ravvisare da lungi il rosseggiar dell' aurora, e grado a grado che vi si avvicina, gli si appresenta quel campo come coperto di un ricco manto di porpora ondeggiante e muoventesi a seconda che il venticello ne agita dolcemente gli steli pieghevoli. Che se in prossimità a questo campo fiorito, altro ne sorga seminato a frumento, e poi un terzo coltivato a lino d' inverno, fiorente anch' esso a' primi di Maggio, vedrassi quasi per incanto convertito il podere nel più splendido giardino, listato a larghe zone purpuree, verdi e cilestre. Così mi è avvenuto di trasformare tal volta i compartimenti della campagna, che sta di prospetto alla mia casa di villa: e queste trasformazioni, in cui all' abbellimento del fondo coltivato studiai di tenere congiunta l' utilità del prodotto, mi confermarono nella sentenza, che l'agricoltura non è solamente una professione industriale, come il commercio e le manifatture, ma che, esercitata con intelligenza ed amore, s' associa al magistero delle belle arti, fassi architettrice di naturali giardini, insegnatrice di tinte svariate

(1) Georg. Lib. I. v. 112.

al pittore, creatrice di prospettive ridenti al paesista, ispiratrice al poeta di puri e delicati concetti, al filosofo di contemplazioni gioconde.

## PARTE II.

### Capo V.

*Degl' insetti danneggianti il Trifoglio.*

Il prof. Bayle-Barelle di Pavia nel suo *Saggio intorno agl' insetti nocivi ai vegetabili economici* (1) nota due insetti, che attaccano la famiglia de' Trifogli, e sono la *Phalaena Fascellina*, e il *Papilio Podalyrius*. Il ch. prof. Torinese cav. Gené nella sua applaudita Opera *Sugli insetti più nocivi all' agricoltura* ec. (2) ne indica altri due, vale a dire la *Coccinella globosa*, e l' *Eumolpus obscurus* Fab. Il nostro onorevole collega co. Nicolò Contarini nella sua *Fauna terrestre Veneta* (3) altri due ce ne addita, cioè il *Crambus carneus*, e la *Cecropis spumaria*. Avendolo io pregato di volermi istruire, se oltre questi vi fossero altri insetti particolarmente nemici de' Trifogli, mi fe' gentilmente conoscere il *Lasiocampus trifolii* Schr., l' *Herminia barbalis*, ed il *Curculio trifolii* Linn., che ne divora le spighe ed i fiori.

Dalle osservazioni fatte fin ora ne' miei campi seminati a Trifoglio incarnato mi avvidi, che soltanto qualche rara di lui pianta viene attaccata dalla *Cecropis spumaria*, che si rende facilmente visibile appunto per la bianca spuma, entro cui sta rannicchiata, rodendone la pianta stessa, la quale perciò ingiallisce, e va a perire. Per unico rimedio, onde liberarsene ed impedire la propagazione, io adoperai quello di tagliare, ed asportare dal campo le piante infette.

Non avendo trovato che alcuno scrittore sopra il Trifoglio incarnato abbia indicato, esservi insetti che lo danneggiano, ritengo, che real-

(1) Milano 1809.

(2) Milano, seconda edizione 1835.

(3) Nell' Opera *Venezia e le sue lagune* 1847, Vol. II.

mente ne vada esente, più che non le altre specie di sua famiglia: e ciò anche a motivo, che il breve corso di sua vita non lasci tempo agl' insetti divoratori d' invaderlo. Credo altresì che per la stessa ragione il nostro Trifoglio non venga attaccato neppure dalla *Cuscuta Europea* (volg. lovero o grongo) cotanto infesta agli altri Trifogli ed alle Mediche. Io certamente non lo vidi mai nelle mie coltivazioni molestato da quest' erba parassita, e non rinvenni scrittore, che lo accennasse soggetto a tal guasto.

## Capo VI.

### *Dei tempi e modi di valersi di questo foraggio.*

I varii usi, a cui si vuol destinare il Trifoglio incarnato, determinano il tempo ed il modo di valersi del prodotto di lui. A cinque si riducono gli usi, a' quali si può assoggettarlo; 1.° a pascolo in erba sul campo: 2.° a sovescio: 3.° a somministrarlo tagliato fresco in alimento a' bestiami: 4.° a darlo secco in cibo a' medesimi: 5.° a ricavarne le sementi. Chi lo destina ad uso di pascolo comincia a valersene tosto che si alza da terra da circa 15 centimetri, e prima che dia indizio di mettere il fiore. Così il sig. Bixio racconta praticarsi nei contorni di Parigi, formando colà il Trifoglio incarnato il primo pascolo, a cui si conducono le pecore ed i montoni: il che viene pure confermato dal sig. Vilmorin, avvertendo però quest' ultimo, che nel farlo pascolare dalle pecore sul campo conviene usare quelle stesse precauzioni, che si adoperano pel pascolamento del Trifoglio comune. Sebbene mi consti, che anche agricoltori nostrali si valgono dei campi seminati a Trifoglio incarnato, per mandarvi a pascolare le pecore, ed altri animali, io però non trovai, che ciò possa tornar conto, perchè il Trifoglio, che si fa consumare a pascolo sul luogo, non è arrivato neppure alla metà dell' altezza, a cui giunge quando il si lascia crescere sino alla piena fioritura per somministrarlo falciato agli armenti: e perciò pascolato non porge ad essi nemmeno la metà dell' alimento, che avrebbe loro procacciato, mangiandolo maturo alla stalla. In un solo caso io

sperimentai opportuno di farlo pascolare dagli animali nel campo, ed è quando il campo stesso o per la male eseguita seminagione, o per altro infortunio mostrasi in primavera così nudo e sprovvisto, da non compensare la spesa della falciata e della ricolta. Giova in allora far pasturare dagli armenti i radi cespi cresciuti stentatamente qua e colà in un colle male erbe, onde potere più di buon' ora preparare la terra ad altre coltivazioni.

Venendo a parlare del secondo uso, a cui si può destinare il Trifoglio incarnato, ch' è quello del sovescio, due autorevoli Agronomi francesi, vale a dire il sig. Moll (1), ed il sig. Vilmorin raccomandano ai coltivatori di provare appunto a farne sovescio in erba al suo primo fiorire; avendo essi motivo di credere, che questo posseda in tale rapporto un merito, che ne renderebbe più rilevante l' utilità. Ciò che i Georgici di Francia suggeriscono di tentare in via di prova; il valente Friulano sig. Del Torre narra (2), »di essere stato da »molti esperito con esito felice, perchè, come egli afferma, vegetan»dovi sopra a meraviglia il frumentone, e il frumento, che vi si fa »seguire, ci viene dimostrato quanti mezzi fertilizzanti somministri alla »terra questa leguminosa».

Siccome io sempre ho coltivato il Trifoglio incarnato ad oggetto di sovvenire alla mancanza di fieni, che da molti anni ci affligge, così non mi valse l' animo, e non potei mai determinarmi a destinare a sovescio alcuna parte delle terre coltivate a questo foraggio, stretto sempre dalla necessità di valermene immediatamente in primavera per cibo a' bestiami: mi propongo però di tentare sì fatta coltura, tosto che un' abbondevole pasciona venga a colmare a ribocco i nostri fenili. A confermarmi in questo proposito, dopo presentato all' I. R. Istituto questo mio scritto, mi avvenne di leggere nel Tomo X. degli *Annales des Sciences physiques ec. de la Societé d' Agriculture et d' industrie de Lyon,* **1847** in **4.°** una Memoria del sig. Puvis intitolata: *De la culture de la vigne ec.*, nella quale quel rinomato agronomo moderno avvalora colla sua autorità le asserzioni delle molte-

(1) Manuel de la science agricole. Nancy 1835.

(2) Giornale l' Amico del Contadino, anno 1844 n.° 24.

plici utilità, che ricavansi dalla coltivazione del Trifoglio incarnato, ed aggiunge un nuovo metodo di valersi di questa pianta con profitto, qual è quello di farne sovescio per conciare le viti. Credo opportuno e giovevole il riportare qui per intero il relativo articolo, traducendolo dal Francese:

» Il Trifoglio incarnato si semina nel Dipartimento dell' Ariege di » buon' ora in autunno, e riesce bene anche se si semina senza muo» ver la terra: in primavera germoglia per tempo, se ne fa sovescio » alla prima falciata, epoca, in cui i suoi steli e le sue radici produ» cono molto ingrasso: dandogli il gesso, germoglia più vigoroso, e » quindi meglio concima».

» Quest' uso è molto esteso, e si cita fra gli altri un proprietario, » che sparse nel 1833 più di cento ectolitri di semente di Trifoglio nelle » sue vigne. È inutile di spogliarlo del suo guscio, il quale torna piut» tosto favorevole, che nocivo al suo nascere».

» Il Trifoglio incarnato riesce bene in tutte le qualità de' terreni, » eziandio ne' leggieri e silicei, mentre il sanofieno rifiuta di prove» nire, e la medica vi proviene mediocremente».

» La cultura del Trifoglio incarnato ci sembra convenire al nostro » paese: la sua vegetazione è primaticcia, e si effettua innanzi che la » vigna allunghi i suoi getti verso la fine di Marzo ed il principio di » Aprile, epoca del primo muoversi delle viti: oltre il formare il Tri» foglio incarnato colle sue foglie un tappeto sul suolo, egli distribuisce » nel seno della terra le numerose sue radici: e la massa vegetale » de' suoi steli, che hanno da 5 a 6 pollici di altezza, sotterrata nella » vigna, vi produce un ingrasso abbondante, il cui beneficio sembra » dover durare per molti anni».

» Ma conviene tener mano forte, perchè i vignaiuoli non soccom» bano alla tentazione di dare questo foraggio appetitoso alle loro vac» che; in luogo di lasciarlo come sovescio alle viti».

Ma il vero, il migliore, il più esteso uso che si fa del Trifoglio incarnato è quello di falciarlo, e darlo fresco a' bestiami. Il tempo opportuno per questa operazione il Trifoglio stesso l' annuncia al coltivatore con quella splendida e solenne pompa di fiori purpurei, colla

quale, come dissi di sopra, suol egli a' primi di Maggio adornare il campo, che lo accoglie. Col segarlo prima della fioritura, e somministrarlo immaturo agli armenti, molto si perde in quantità di prodotto, e si porge loro un cibo poco sostanzioso, perchè ancor ridondante di molta acquosità. Falciato in buon punto, e somministrato verde ad ogni sorte di bestie, a pecore, a buoi, a cavalli, e fino anche a maiali, porge loro un eccellente e sano nutrimento, che lor diviene tanto più desiderato e proficuo, quantochè, eccettuata la sola segala, esso costituisce la prima fresca ed erbosa pastura che ricevono, dopo la lunga e magra profenda del secco foraggio d'inverno. Quindi ci fa sapere il già citato dott. Targioni Tozzetti, che in Toscana da gran tempo si fa uso di questo foraggio in Aprile e Maggio per darlo a tutte le bestie di campagna, quando è in fiore, e portarlo a vendere anche in città, per sollievo, o come dicono per purga, dei cavalli e delle vacche da latte.

Cominciato quindi che abbia l'agricoltore a segare un campo di questo erbaggio, continui a tagliarne regolarmente di volta in volta quanto ne abbisogni per la sua mandra, portandone a casa quella quantità, che può bastarle fresca per una giornata ed anche per due, se il tempo minaccia pioggia, o susseguano giorni festivi.

È concorde opinione di agricoltori teorici e pratici, che il Trifoglio incarnato non produca agli animali, che se ne cibano, quella malattia del gonfiamento, o meteorizzazione, che sogliono produrre spesse volte il Trifoglio comune e l'Erba medica. La mia più che decennale esperienza nel coltivarlo, e nel pascer con esso per varii giorni di seguito e buoi e cavalli e pecore, mi conferma in tale asserzione; e l'aver veduto più d'una fiata agricoltori stretti da mancanza di ogni altra pastura dare alle loro bestie tal foraggio levato dal campo ancor molle e bagnato dalla pioggia, e non essere venuta alcuna infermità alla mandra così pasciuta, tanto più mi rafferma nel ritenerlo assolutamente innocuo. Io però non posso minimamente approvare una tal pratica, che può sempre divenir pericolosa, e che non ha altra giustificazione, che l'estrema necessità.

Ho pure osservato, che gli animali spezialmente bovini, quantun-

que alimentati per quindici e venti giorni in continuazione e in buon dato di questo erbaggio fresco, lo appetiscono sempre con eguale avidità, nè se ne mostrano in alcun modo nauseati. Che se avvenga a lungo andare, che ne prendano sazietà, ciò nascerà perchè il Trifoglio progredendo nel campo alla maturazione, comincierà a farsi duro nello stelo, e perdere il solletico della primitiva succosa freschezza.

Deve perciò a questo punto l'accorto coltivatore osservare, che il suo Trifoglio, affrettandosi alla maturità, non induri soverchio, e non oltrepassi il quarto stadio, ch'è quello, in cui si deve falciarlo, per conservarlo secco, e riporlo opportunamente nel fenile. Sarà segno in lui di maturezza vicina l'imbianchire nella sommità del fiore, e il perdere gradatamente quel suo vivo colore di porpora. Mano adunque alla falce; e quanto più presto si può, si mieta tutto il Trifoglio prima che indurisca e si secchi nel gambo, nelle foglie e ne' fiori. Ponga in appresso il mietitore ogni studio nel soleggiarlo, avvertendo, che potrebbe nuocere a questo fieno tanto una leggera, quanto una eccedente disseccazione: giacchè la prima lo esporrebbe al pericolo di muffire, la seconda di rimanere nudi stecchi. Per evitare quest'ultimo, ho sempre inculcato a miei bobolchi, che in giornate di sole cocente procaccino di caricarlo sui carri, e trasportarlo a casa verso il tramonto del sole; mentre in sulla sera l'incipiente cadere della notturna rugiada ammollisce il soverchio asciuttore dell'ammanito foraggio.

Neppur quando si ha lo scopo di raccogliere il seme del nostro Trifoglio, ch'è il quinto ed ultimo uso, al quale, come dissi di sopra, si suole destinarlo, giova, a mio avviso, lasciare eccedentemente seccare le piante nel campo: perchè nel tagliarle, nel muoverle, nel trasportarle a casa si arrischia di perdere molta semente. Si conosce il vero tempo di coglierla, quando stropicciando colle dita i fiori, che la contengono, essa agevolmente ne sorte liberata dagl'involucri e mostrasi bella e matura.

Il seme del Trifoglio incarnato si può raccogliere in due principali maniere, come quello del Trifoglio comune. La prima, ch'è la più speditiva, consiste nel mietere colla grande o colla piccola falce le piante mature e secche, nel distenderle poscia in piccoli cumuli sul

campo, e legate in fastelli verso sera, portarle al coperto, per batterle in sull' aia in giornata di grandissimo sole. La seconda maniera, ch' è veramente più lunga e costosa, ma che separa meglio il buon seme dagl' involucri o gusci, consiste nello strappare, o mungere, come si dice, colla mano le spighe seminifere dalle piante secche, tutt' ora attaccate al suolo, e raccoltele in sacchi od in consimili recipienti, portarle sul granaio, od in altro luogo ventilato ed asciutto, per poi batterle sull' aia in giornata calda e serena. Quando parlai in addietro del seme del nostro Trifoglio, dissi, che il separarlo dai pericarpii e renderlo perfettamente netto è operazione di lunga pazienza, perchè si deve vagliarlo e rivagliarlo più volte ben bene: ma la diligenza di un abile cultore non ha da venir meno nel tedioso lavoro. Ad ogni modo nel conservar la semente tanto netta, quanto munita de' gusci, abbiasi sempre l' antiveggenza di porla in tal luogo, ed in tale maniera, da non temerne nocumento per fermentazione, o per umidità.

## Capo VII.

### *Della quantità e qualità del suo prodotto.*

Ora m' ingegnerò di dare un qualche ragguaglio della quantità di foraggio, che si calcola approssimativamente potersi raccorre da una tornatura coltivata a Trifoglio incarnato. La maggior parte degli Autori Italiani e Francesi da me consultati, che scrissero su tale argomento, o non diedero relazione di ciò, o la diedero indeterminata. Matteo Dombasle riferisce, che il taglio di questo Trifoglio è a un di presso così abbondante, come due tagli dell' ordinario. Il prof. Brignoli espone, che la rendita del Trifoglio incarnato è presso poco tripla di quella de' prati naturali. Due soli ne indicarono con qualche precisione la quantità del prodotto. Il primo fu l'estensore dell' articolo *Fourrages* nel già citato Dizionario d' Agricoltura del sig. Vivien [1], il quale in un quadro comparativo dei prodotti di diversi foraggi ricavati dalle esperienze del sig. Villele, espone che il Trifoglio incarnato suol dare per ogni

(1) Tom. XI. pag. 445.

Ettaro, ossia Tornatura, da circa 4100 libbre metriche di foraggio secco. Il valente sig. D'Angeli del Friuli riferisce *nel Giornale l'Amico del Contadino*, che un campo di pertiche 3:50 discretamente buono gli produsse dalle 2000 alle 2500 libbre venete di Trifoglio incarnato tra steli e foglie, e circa 800 libbre di semi, che sommano in tutto 3300 libbre venete, equivalenti a un di presso a 1650 libbre metriche; il che darebbe colla regola di proporzione 4700 libbre metriche di foraggio per ogni Ettaro, o Tornatura.

Dai calcoli dedotti da' miei registri risulta, che il termine medio di foraggio secco ricavato da una Tornatura di terra di qualità mediocre coltivata a Trifoglio incarnato ammonta a 3000 libbre metriche: prodotto che si avvicina a quello del sig. D'Angeli; superandolo di sole 300 libbre, mentre avanza di 900 libbre quello dello scrittore francese. Al prodotto del mio Trifoglio dando il prezzo medio di aust. lire 4 per quintale, si avrebbe la rendita di lire 200:00, dalle quali detratte lire 40:00 di spese di coltivazione e raccolta, e di valore di sementi impiegatevi, (non calcolando alcun dispendio di concimazione, perchè questa si ritiene data al frumento, che suole precedere il Trifoglio incarnato), si avrebbe una rendita netta di aust. lire 160:00 da una Tornatura di terra aratoria, la quale, se non vi si fosse coltivato il nostro foraggio, sarebbe restata infruttuosa.

Tutti gli Agricoltori, che mi venne fatto di consultare, convengono nel parere, che il Trifoglio incarnato somministrato verde ai bestiami sia un alimento che torni più salubre e più gradito ai bestiami medesimi, che non quello che si dà loro già secco, ed io concorro con piena persuasione nel riputato loro avviso. Non si accordano però essi Agricoltori nell' opinione, che questo nostro Trifoglio considerato come cibo nutritivo de' bestiami sia da preferirsi al Trifoglio comune. I signori Vilmorin, Bixio e Dombasle propendono pel Trifoglio comune; i signori Bosc, Rieffel [1], e Lecoq danno la preferenza all'incarnato: io non ardirei certamente pronunciar giudizio fra tanto senno, mancandomi regolari esperimenti da' quali dedurre la forza nutritiva sì dell' uno che dell' altro foraggio.

(1) Agricul. de l'Ouest de la France, Paris 1840 Tom. I. pag. 328.

E qui m'è d'uopo purgare il nostro Trifoglio da alcune taccie, che indebitamente gli vengono date. La prima gli viene applicata dai compilatori della *Maison rustique*, che lo fanno sospettare pianta assai smungente il terreno. A sciogliere questo dubbio giovami addurre due incontrastabili assiomi agrarii, l'uno del sig. Pictet, che dice »il Tri»foglio in generale è uno dei più potenti miglioratori delle terre [1]», l'altro del sig. Yvart affermante, »che una bella ricolta di Trifoglio »assicura una bella ricolta di grano». La seconda taccia proviene dall'Almanacco del coltivatore e del vignaiuolo di Parigi del 1848 sotto la direzione del sig. Bixio, il quale così si esprime. »Le vacche che »si nutriscono di Trifoglio incarnato non danno una grande quantità »di latte». Al sig. Almanacchista risponde per me con queste parole il ch. prof. Giuseppe Moretti nella sua Opera altre volte allegata: »I »buoi pascendosi del Trifoglio incarnato impinguano assai bene, e le »vacche abbondano di latte, toltone il caso, in cui si somministrasse »troppo maturo». La terza contiensi in un articolo del sig. Del Torre del Giornale *l'Amico del Contadino* [2] già mentovato, ed è così concepita: »Il latte delle vacche, che si cibano di questo foraggio, in »erba, acquista un sapore e un odore particolare disgustoso, che ha »dell'ircino».

Al sig. Del Torre forma risposta in questi termini il prefato prof. Lecoq (al quale m'associo di buon grado anch'io, che per più di dieci anni assaggiai il latte di vacche pasciute di Trifoglio incarnato): »Il Trifoglio incarnato è assai confacente e giovevole alle vacche, che »per esso danno latte in abbondanza, e di buonissima qualità».

(1) Nouv. Dict. d'Agric., Tom. 17 pag. 374.

(2) Anno 1844 n.° 32.

## Capo VIII.

*Riassunto delle utilità derivanti dalla detta coltivazione.*

Riepilogando le narrate esperienze da me effettuate pel corso di circa dodici anni continui nelle mie terre intorno la coltivazione del Trifoglio incarnato, e riassumendo le osservazioni, ch' ebbi occasione di fare e rifare sopra i precetti saggiamente dati nell' argomento medesimo da preclari Maestri in Agronomia, parmi si possa fondatamente conchiudere, essere evidente e incontrastabile l'utilità della cultura di un tale foraggio, e meritare di essere universalmente adottata e diffusa per le seguenti ragioni:

1.° Perchè il Trifoglio incarnato non esige sceltezza di terreno, nè mitezza di clima, prosperando anche nelle terre meno fertili, e nelle posizioni meno temperate, e resistendo alla neve ed al gelo.

2.° Perchè non domanda che pochi e poco dispendiosi lavori, e li compensa con largo profitto.

3.° Perchè prospera bene anche senza l' aiuto di concime, qualora il terreno, a cui lo si affida, non sia del tutto infecondo.

4.° Perchè occupa la terra in un tempo, in cui la terra stessa resterebbe vacua e infruttuosa: e quindi aggiunge una ricolta di più, oltre quelle portate dal consueto locale avvicendamento.

5. Perchè non altera l' ordinaria rotazione dei prodotti, anzi ne corregge il difetto in que' luoghi, ne' quali si obbliga per due anni di seguito un medesimo terreno ad accogliere il grano turco: difetto condannato da quell' assioma, *che ad una pianta graminacea si deve far succedere una leguminosa.*

6.° Perchè, eccettuata la sola ségale, questo foraggio è il più precoce di quelli di primavera, e si matura in un tempo, in cui è più sensibile e stringente la mancanza delle pasture.

7.° Perchè questo foraggio dato fresco agli animali, dopo essere stati per tutto il verno alimentati di scarsa, secca e magra pastura, torna loro di medicina e conforto.

8.° Perchè essendo dotato di tutte le buone qualità del Trifoglio comune, è scevro d' altronde di quella non buona, vale a dire di non produrre ai bestiami, che se ne cibano, il gonfiamento del ventre.

9.° Perchè raccogliendosi esso di buon' ora, e prima di ogni altro erbaggio, non impedisce, che nel campo stesso, donde si è mietuto, si semini utilmente il grano turco, od altro grano consimile.

10.° Perchè maturando primaticcio, va soggetto meno degli altri raccolti ai celesti infortunii, nonchè al guasto degli erbivori insetti, e della cuscuta parassita.

11.° Perchè seminandosi alla fine di Agosto, od al principio di Settembre, e potendosi a quell' epoca conoscere, se la raccolta de' fieni, che devono servire di scorta pel verno, abbia a riuscire abbondante o scarsa, in quest'ultimo caso, col raddoppiare la seminagione del Trifoglio incarnato, si può rimediare alla preveduta mancanza degli altri foraggi.

Quel preclaro e benemerito Agronomo francese Matteo Dombasle, che ho qui citato più volte con lode, si rallegrava sopra ogni altra cosa di avere introdotto nel Nord della Francia la coltivazione di questo, com' ei lo chiamava, *prezioso foraggio*: ed io, seguendo da lungi l' esempio di lui, potrò rallegrarmi d' averla introdotta tra' miei conterranei, e di aver tentato con quest' umile scritto di estenderla a più vasti confini?

(*Letta nei giorni* 31 *Gennaio e* 30 *Aprile* 1848)

*Spiegazione della Tavola a colori rappresentante il Trifoglio incarnato, che va unita a questa Memoria.*

N.° 1. Calice in grandezza naturale.
» 2. Calice colla corolla ingrandita.
» 3. Calice veduto di prospetto.
» 4. Corolla senza calice.
» 5. Vessillo della corolla veduto di prospetto.
» 6. Involucro con stami e pistillo.
» 7. Parte della corolla, cioè le ali, e la caréna.
» 8. Calice contenente il seme.
» 9. Seme in istato naturale.
» 10. Seme ingrandito con lente.
» 11. Pianticella nel primo suo stato.
» 12. Pianta di grandezza naturale, ed in piena fioritura.
» 13. Stelo con fiore staccato dalla pianta.

NATURAL HISTORY

SULLA

# IDEA GENERALE DI CONTAGIO

## MEMORIA

DI GIULIO SANDRI

I. Dopo che de' contagi si è tanto parlato e scritto, parrebbe che questo importantissimo ramo di medicina comparata avesse almeno il primo suo fondamento sì bene stabilito e sì certo, che non vi si potesse più muover dubbio. Ma tutt' altra è la cosa, mirandola un po' da vicino. Massimamente a' dì nostri si sono all' idea generale di contagio attribuiti de' caratteri, i quali o punto ai contagi non convengono, o convengono soltanto ad alcuni: onde avviene che piantandosi argomento sopra di essi caratteri, si pianti sopra falso supposto, e le conseguenze sien quelle che di tale ragionar sono proprie. A togliere siffatto sconcio, se mai conceduto mi fosse, avvisai di venir qui brevemente indagando quale a buon diritto si debba dire mal contagioso.

II. La prima, più semplice e più natural idea che del mal contagioso presentasi, è quella d' un male che si comunica, d' un male che

può passare dall' uno all' altro individuo. Ed io pure mi penso doversi abbracciare questa sola semplicissima idea; che cioè il male contagioso, senz' altro requisito, sia quello che può ad altri comunicarsi.

III. Qui non entrerebbero i vizii di mera imitazione, come lo sbadiglio abituale dell' uomo, e un cotal tiro del cavallo; nè quelli che, tramandandosi da' genitori ne' figliuoli, appellansi ereditarii: i quali sebbene passino in altri, vi passano però in guisa diversa da quella de' contagi propriamente detti. Nè vi entrerebbero i morbi d' infezione, o sia provenienti da materie paludose, mefitiche, miasmatiche o somiglianti, le quali insinuansi a turbar l' organismo: nè quelli, che in molti ad un tempo nascessero per cibo tristo o bevanda, per fatica smodata o disagio, o inclemenza atmosferica od altra comune accidentale cagione; poichè tali morbi affliggono soltanto gl' individui che all' azione di esse cose soggiacquero, e punto non si trasmettono ad altri.

IV. E benchè non sia nostro intendimento indicar qui la via di verificare che un male è comunicabile, notiamo di passaggio, esser dessa l' attenta osservazione guidata da sano discernimento; quella medesima che fece conoscere i contagi ai nostri predecessori, anche prima che dal celebre professore Rubini e da altri, si assegnassero que' caratteri che accenneremo più innanzi. E in generale ci sembra dover sempre essere contagioso quel morbo, il quale si mette in viaggio, perchè il viaggiare de' morbi non è che una successiva comunicazione da individuo a individuo; conciossiachè non si potendo porre in cammino le circostanze del luogo, ond' essi partono, la causa viaggiante non possa essere che il solo contagio. E ci sembra pure che di contagioso molto sospetto sia quello, che attribuito prima a cattivi alimenti o bevande, a eccessivi lavori, ad aspri patimenti, a intemperie o simili cause, si vegga poscia colpire anche di quelli che non vi furono sottoposti, o durare anche oltre il cessamento di esse; e così quello che prima ascritto a infezione di esalazioni palustri, mefitiche, od altre siffatte, appresso veggasi uscire dalle circostanze che si credeano averlo prodotto; poichè ciò mostrerebbe che le imputate non erano le vere cause: e quello altresì che identico vada quinci e quindi serpeggiando senza che bene se ne conosca altra cagione. E crederemmo che un

solo caso di comunicazione bene avverato provar potesse per tutti gli altri dubbiosi; perciocchè quando ricercasi l' occulta cagione d' un costante identico effetto, e la natura si lascia sorprendere e ce la mostra una volta, c' è tutta la ragion di presumere che ognor sia la stessa. Se la natura suol essere cotanto semplice nelle cause eziandio degli effetti che ci paiono sì varii e complicati, perchè non sarà ella poi semplice nella causa d' un identico effetto, che identico si mantiene anche in mezzo delle più svariate circostanze?

V. Comunque poi facciasi la detta verificazione, da noi qui toccata solo per incidenza; siccome riteniamo che per essere contagioso al male sol basti il potersi comunicare, dall' idea di contagio escludiamo tutti gli altri caratteri che finora le furono dai varii autori assegnati. E primieramente escludiamo quello che il mal contagioso non ritorni più nello stesso individuo. In tutti i contagi si sono ormai vedute recidive, ed eziandio negli acuti e febbrili. Avvene anzi di quelli, che più facilmente ritornano in chi gli ebbe ancora, come la sifilide, e specialmente la migliare. Che se pure n' avesse alcuno che non si ripetesse giammai, sarebbe questo un carattere suo peculiare, e non punto indivisibile dalla generale idea di contagio.

VI. In secondo luogo escludiamo il carattere che non possa un contagio trovarsi insiem con un altro sia nello stesso paese, sia nello stesso individuo; poichè la continua sperienza fa chiaro, che al tempo medesimo non solo varii contagi possono regnare tra gli uomini e tra gli animali, ma eziandio varii fra gli stessi uomini o fra gli animali; e nello stesso individuo più d' uno pur se ne vede non di rado unito.

VII. E, per terzo, dall' idea di contagio escludiamo il bisogno che alla sua esistenza concorrer debbano speciali circostanze atmosferiche. Potranno queste influire a maggiore sviluppo e maggiore incrudelimento, come fa specialmente l' umido e il caldo, ma necessarie non sono per la semplice sua esistenza. Basta per essa che vi sieno individui cui passar il male, e opportunità si presentino di passaggio. A convincerci che un contagio possa esistere indipendentemente da qualunque speciale stato di cielo, veggiamo tutto dì malattie contagiose durare nel luogo stesso per lungo tempo; come certe carbon-

chiose, il vaiuolo, la polmonera de' buoi, la migliare, l' elefanziasi, il cimurro de' cavalli, la scabbia, la sifilide ec.; e le veggiamo durare, benchè tutte le atmosferiche vicissitudini si vadan mutando. Che se pur alcun ve ne fosse a circostanze di tempo così legato, che mai comparir non potesse fuori di quelle, diverrebbe questo un carattere suo particolare, e non mai generale, non mai da unirsi alla stessa idea di contagio.

VIII. Ed escludiamo anche il carattere che il morbo per essere contagioso abbia da avere periodo di durata certo e determinato, o stadii ben definiti: perciocchè sebbene questo avvenga in parecchi, siccome nel vaiuolo sì umano che pecorino, di altri non si può dire che avvenga, come l' elefanziasi e il cimurro nel cavallo, asino e mulo, la sifilide nell' uomo e nel cavallo, e la scabbia in tutti gli animali. Nè direbbesi aver corso determinato la migliare, la quale non di rado si vede tanto insistere nello stesso individuo. Poteva quinci benissimo essere contagioso anche l'asiatico morbo, quantunque a stadii ben definiti non volesse assoggettarsi.

IX. E non è nè men vero che carattere essenziale de' contagi sia quello di non potersene troncar il corso mediante rimedii, e dover quindi essi invariabilmente compirlo; perchè, se questa è la condizione di molti, non è per altro di tutti. Alcuni che abbandonati a se medesimi andrebbero ognor peggiorando fino alla morte, come il cimurro, l'elefanziasi, la sifilide, la scabbia; qual più, qual meno, ceder ponno alla cura, e tanto più facilmente quanto più sono recenti, o sia quanto più breve è il tempo da che han cominciato.

X. Nè ai contagi può darsi per carattere assoluto, che abbiano ad avere espulsione ossia eruzione cutanea. La mostrano quelli che o sono proprii della pelle, o cui la natura colla sua reazione tenta di respignere a questa parte. Ne mancano quelli che assalgono sistemi od organi interni, e di cui la natura tenta liberarsi per altro mezzo; come colla tosse, ove sien molestate le vie della respirazione; col vomito o colla diarrea, se le digestive; colla bava o scialiva nell'idrofobia; ed in altri con iscoli dalle narici od altrove, secondo l' organo direttamente o indirettamente colpito.

XI. Nè perchè il male sia contagioso è mestieri che sempre abbiasi a comunicar per innesto od inoculazione. Primieramente ci sembra probabile che, come non tutte le piante, così nè meno tutti i contagi si possano di lor natura innestare. In secondo luogo anche negli esseri in cui ponno riuscire gl' innesti, perchè riescano deonsene conoscere i requisiti e del tempo in cui praticarli, e della materia da impiegarvi, e della parte in cui eseguirli, e di quanto concerne il modo: e con tutto questo spesso tornano vani. L' idrofobia, per esempio, di cui tanto conosciuto è il mezzo di trasmissione, alle volte dei venti, dei trenta morsicati non prende che in uno. Alcuni professori durante la lunga pratica loro con tentativi replicati cercarono indarno di trasmettere questo male colla bava de' quadrupedi erbivori; di che per poco si conchiudeva, che la bava di questi animali non fosse atta ad ingenerarlo: ed assicurasi che recentemente il sig. De Maria torinese lo comunicò a due cavalli inoculandoli colla scialiva e colla mucosità di un asino idrofobo; e il sig. Rey professore alla scuola Veterinaria di Lione, giunse a inocularlo fra i montoni successivamente fino al sesto individuo (1). Il che mostra quanto l' effetto della inoculazione, eziandio conosciuta ne' suoi particolari, sia in potere dell' accidente, e quanto errato n' andrebbe chi, presentandoglisi un morbo novello, o di cui non conosce nè la materia infettiva, nè il luogo, nè il tempo, nè il modo d' inocularla, dal non veder riuscire lo sperimento conchiudesse che il male non è contagioso.

XII. E acciocchè tengasi un morbo per contagioso nè anche fa d' uopo che passi a tutti quelli che ne vanno a tiro. Chi per avere baciato, o tocco in altro modo un infetto, o dormito con esso; o per essere stato un animale in istalla, al pascolo o al lavoro insieme con un altro contaminato senza prendere il male, pensasse che questo non fosse appiccaticcio s' ingannerebbe a partito, e mostrerebbe non conoscere punto il procedimento che usa natura per gli altri esseri, che come i contagi si riproducono sempre gli stessi; o pretenderebbe che pe' contagi ella cambiasse tenore. La natura che affidò il grande incarico della successione non interrotta degli esseri a proprii germi, af-

(1) L' Idrofobia o la Rabbia canina del sig. dott. Giuseppe Cataneo. Milano 1844 p. 144.

fidò alle circostanze speciali il reggere e moderare lo sviluppo di essi: onde il germe torna effettivo soltanto quando vi si unisce il pieno concorso di tutte le circostanze richieste, e che in parte abbiamo notate in altro scritto (1). Di che avviene che alle fiate sì scarso è il numero de' casi effettivi in paragon de' possibili, che sembra non doversi quasi nè men computare. Ma comunque talvolta di dieci o cento milla sementi abbandonate a sè stesse, e per cui giacciono altrettanti punti di suolo atti ad accoglierle, una sola torni effettiva, non è per questo men vero che, quando la pianta nasce, venga sempre da quella fatta di seme. Laonde il contagio, che si diporta come gli altri esseri consimili, secondo la sua natura, secondo le circostanze, secondo le minori o maggiori opportunità, e le cautele o i sanitarii riguardi, può invadere o pochi individui qual morbo sporadico, e talor anche dar appena sentore in un paese di sua presenza; o invaderne maggior numero divenendo epidemico od epizootico; od infierire ancor più mostrandosi pestilenziale. Ma per quanto grande sia il numero de' risparmiati per le antidette cagioni naturali o politiche, per quanto pochi sien quelli che, andando a tiro del male, lo prendono; esso non muta indole, esso rimane ognor contagioso: o ad esprimer la cosa diversamente, egli è sempre contagioso in potenza, ed in atto ogni volta che passa in altri e si riproduce, ogni volta cioè che il pieno concorso delle relative circostanze ed opportunità gli si presenta.

XIII. E nè men v' è bisogno, che per dirsi contagioso un morbo il quale domina in un paese, egli abbia sempre a passare in tempo determinato ad altro paese, col quale il primo trovasi in relazione. E facile che chi parte non sia stato in luogo da contaminarsi; che essendovi anche stato, i mali germi non siensegli appiccati; che essendosegli appiccati, si distruggano o disperdano colla lunga esposizione all' aria nel tragitto; o che giunti eziandio intatti nell' altro paese, non vi trovino pronto cui appiccarsi, e periscano. Ma dee però sempre temer grandemente il sito che sta in corrispondenza con un infetto; poichè a

(1) Cenno sulla disposizione ai mali contagiosi, inserito nel secondo Volume delle Memorie dell' I. R. Istituto Veneto.

lungo andare il contagio suol finalmente trovar l'unione di tutte le circostanze necessarie al suo trasporto e al nuovo suo appiccamento.

XIV. Per carattere del contagio si mise pur quello, che non passasse dall'una all'altra specie d'animali. Il che essendo verissimo pel più de' contagi, come suol anche esser vero che parassiti d'una specie d'animale o di pianta, non allignano sopra le altre; tuttavia ciò non succede nè di tutti i noti parassiti, nè di tutti i contagi. Di questi ultimi l'elefanziasi ed il cimurro, che assalgono cavallo, asino e mulo, passano dall'uno all'altro di essi. Le malattie carbonchiose ponno passare in tutti gli animali e nell'uomo; e così pure l'idrofobia: ed anche una sorta di scabbia si vide assalire animali di varie specie (1). Sicchè nè meno un tal carattere a buon diritto può starsene colla pura idea di contagio.

XV. E perchè il male sia contagioso, non fa mestieri nè pure che passi dall'uno all'altro individuo direttamente. Ne possono trasportar i germi anche quelli che rimangono sani. E potendosi fare tale trasporto, avviene molto sovente che non si giunga a discoprire gli anelli della catena di trasmissione che il contagio si forma; per cui dubitino i meno accorti sulla possibilità di essa, e neghino eziandio il passaggio del male, ed insieme che sia contagioso. Gli avveduti per altro, e conoscitori dell'ordinario procedere di natura, i quali vedendo nuova pianta in un luogo, benchè non abbiano discoperto come la semente siavisi recata, pure sanno che in qualche modo vi si debbe esser recata, capiscono tosto che anche la traslazion del contagio debb'essere avvenuta, per quanto occulta ne sia la strada, per quanto complicata la trafila, e per quanto disparati i punti, ne' quali esso compare: poichè gli avveduti, che ragionano sopra sodi principii, non si lasciano aggirare dalle fallaci apparenze.

XVI. Quantunque si dica passare il contagio dall'uno all'altro individuo per contatto immediato o mediato, e per ciò appunto siasi chiamato contagio; pure siccome a piccole distanze, come quelle cui giungon gli odori, e massimamente ne' luoghi chiusi, dove i malefici germi sieno molto accumulati, possono questi trasportarsi anche dal-

(1) Dictionnaire de Médécine Vétérinaire par M. Hurtrel d'Arboval; alla voce *Gale*.

l' aria; vuolsi tener per contagio anche il morbo che si comunica eziandio per questo modo, quantunque propriamente esso non paia entrare nella etimologia della parola. Ove le distanze sien grandi, se avviene comunicazione, ella avviene pel mezzo accennato nell' antecedente paragrafo, e non per quello dell' aria; poichè accolti che sieno i germi infettanti nell' atmosferico vortice, più non ritengono la facoltà produttiva, sia che ne muoiano come avvenir suole de' parassiti fuori dell' ente ad essi appropriato, o pur si disperdano e si distruggano. Ond' è che l' aria libera e aperta, lungi dal poter mai essere punto sospetta d' infettamento, è anzi il migliore *disinfettante* che si conosca; e basta che gli oggetti sieno bene esposti all' azione di essa per esserne appieno purificati.

XVII. E in proposito di contatto facciam anche osservare, che, sebbene sia questo il proprio mezzo per cui si trasmette il mal contagioso; pur nondimeno il dire che quelli che si trasmettono per inoculazione, essendovi in essa qualche cosa più del contatto, cioè l' introduzione visibile della materia, non abbiano ed esser contagi, terrebbe assai del sofistico: poichè dovendo il germe, per tornar effettivo, sempre realmente introdursi nell' organismo, poco importa che s' introduca in questa guisa od in quella. E quindi non cesseranno di essere veri contagi le malattie carbonchiose, e l' idrofobia, e gli altri se pur havvene di somiglianti, benchè per comunicarsi generalmente abbisognino di un deciso innesto, o che sia di qualche modo sfiorata la pelle, ove l' infettante materia viene applicata.

XVIII. Nè, quantunque i contagi aver possano sintomi loro proprii, molto ragionevole sarebbe il dire, che se un male si mostri che n' abbia in comune con altri, non debba per ciò essere contagioso; poichè, tacendo pur che la comunanza di qualche sintomo non può influire sulla natura contagiosa o non contagiosa, noi veggiamo anzi che molti contagi hanno un male di apparenza consimile non appiccaticcio, con cui per qualche tratto eziandio, se non facciasi esame accuratissimo, si confondono. Il cimurro del cavallo fino a un certo punto può confondersi pe' sintomi colla corizza; la febbre ungarica del bue, colla perniciosa; la polmonera, colla comune peripneumonia; il

colera asiatico, coll'indigeno: e così di altri parecchi. Oltracciò è già noto, come i contagi vestano alle volte le forme delle malattie dominanti, o per meglio dire uniscansi ad esse; per cui misti pur ne tornano i sintomi. E per l'una o l'altra di queste ragioni succede sì spesso, che all'apparir d'un contagio molte controversie ne insorgano tra le stesse persone dell'arte anche più illuminate; per cui esso ha l'agio di diffondersi, prender piede e menare strage pria che si convenga di sua natura; e se ne convenga allor solamente che più non è tempo di mettervi l'opportuno riparo. La somiglianza per tanto ne' sintomi d'un male con quelli d'un altro non contagioso, non sarà mai ragione valevole per far dichiarare anch'esso non contagioso.

XIX. E noi avviseremmo eziandio doversi tener puramente contagiosa la malattia, che altri pretendesse venire e per contagio e per altra causa. Perciocchè quando egli è provato che la malattia si comunica per contagio, avvi una causa certa di essa: che venga d'altronde non è sì agevole il dimostrarlo. E quando di due cose havvene una provata e l'altra no, ragion vuole che si stia soltanto colla prima. E in secondo luogo, allorchè di un fenomeno naturale ci si presenta chiara una cagione, il supporne anche un'altra è inutile sovrabbondanza che s'oppone all'adagio *non sunt multiplicanda entia sine necessitate.* Molto meno poi l'altra causa si direbbe esser l'aria, ossia un che d'ignoto sparso per essa. Conciossiachè l'accusar di contagio l'aria libera senta pur alquanto del contraddittorio, essendo essa anzi de' contagi distruggitrice (n.° XVI.): e que' medesimi che incolpavano l'aria nel morbo asiatico, non mancavano di lodare le situazioni da essa più dominate, e di raccomandare la ventilazione. Oltracciò vuolsi considerare, come tutti gli esseri che han vita, avendola sottoposta e coordinata all'azione dell'aria nell'ordinario normale suo stato. non potrebbesi intendere come questa si avesse ad alterare per guisa da tornar perniciosa e letale ad una specie, senza che le altre punto se ne risentano; e come quelli della stessa specie potessero venire in un luogo sì malmenati, mentre in un vicino, che pur è dominato dall'aria medesima, godono la miglior salute; e come nello stesso luogo alcuni si ammorbassero tanto da essere fin tratti a morte, ed altri

che l' aria identica pure respirano e da essa trovansi circondati, rimanessero al tutto illesi. Queste considerazioni, ed altre somiglievoli che per brevità si tralasciano, debbono renderci molto guardinghi nell' accusare come fonte di morbi sterminatori quel fluido, cui dalla natura affidossi tanta parte nella conservazion delle vite. E queste medesime e le antidette pur fanno che quando un male è provato essere contagioso, non s' abbia da imputarne altra cagione. Laonde il solo comunicarsi del male, non pure dimostrerebbe esser desso contagioso, come s' è accennato dianzi; ma dimostrerebbe eziandio essere soltanto contagioso.

XX. Col ritenere che la sola comunicabilità del male formi il contagio, la cosa si trova ridotta all' ultima sua precisione. E questo carattere oltr' essere il più semplice e vero che si abbiano i contagi, il solo essenziale alla loro natura, quello che propriamente li costituisce, è pure il solo che più importi alla pratica, a motivo delle precauzioni e dei sanitarii provvedimenti da prendersi. Pel sociale vantaggio, pel comun bene, poco rileva se un male abbia o no questo o quell' altro carattere: ma rileva moltissimo il sapere se sia comunicabile, affine di poterlo cansare.

XXI. E per lo contrario ammettendo altri caratteri, siccome i mentovati precedentemente, chi poi gli chiami ad esame, come noi abbiam fatto, ritrovandoli falsi o non generali, è costretto a rifiutarli, ricredersi e riformar le sue idee. E chi di simil esame non si prenda la cura, e senza pensare più là, tenga tali caratteri per sicuri ed infallibili; esclude in forza di essi dai contagi ogni male che non li presenta: a somiglianza del naturalista, che avendo in prima adottato certa arbitraria e mal fondata classificazione di piante o di animali, avvenendosi in alcune specie che coi caratteri di essa non convenissero, volesse inferirne che dunque i nuovi oggetti non appartengono alle piante, non agli animali.

XXII. Della qual foggia di ragionare in materia di contagione usano senz' avvedersene anche personaggi distinti, i quali pubblicano opere ad altrui ammaestramento. E per ricordarne qualcuno, ho mostrato in altro scritto, come a torto dall' essere tornati vani gli sperimenti d' ino-

culazione tentati nella *polmonera* de' buoi, il sig. prof. Brugnolo volesse trar prova che questa malattia non è contagiosa [1]. Il sig. Vincenzo Giolo veterinario di Rovigo, pretende che la malattia epizootica de' buoi con *afte* od *ulceri in bocca* non sia contagiosa, perchè avendola inoculata in altre parti non vide che si appiccasse. Ecco le sue stesse parole: » Dicesi contagio quello che in qualunque parte introdotto sia di un sano organismo, è capace a generare una malattia » simile a quella da cui ebbe origine. Io mi provai ad inoculare in » varii punti del corpo di più animali la materia secreta delle ulceri » dominanti, e non m' ebbi nissun risultato negli inoculati [2]». Su di che oltre di opporre al sig. Giolo ciò che antecedentemente (N. XI.) abbiamo osservato sul non potersi trarre in proposito nissuna conseguenza dal tornar senza effetto le inoculazioni, e che pur vale contro la suddetta deduzione del sig. prof. Brugnolo; notiamo qui l' irragionevole pretendere che il male per potersi dir contagioso abbia da svilupparsi in qualunque parte sia inoculato. Noi sappiamo al contrario che i contagi, come gli altri parassiti, ponno ed essere proprii di questa o di quella parte, di questo o di quell'organo, di questo o di quel tessuto; ed aver eziandio la via rispettiva d'introduzione; ond'è contro natura il presumere che si diportino altrimenti.

XXIII. Nella pregevole sua opera sulla Rabbia testè pubblicata in Milano, il sig. dott. Cataneo, coll' appoggio del romano sig. prof. Cappello, ed in parte anche del chimico bassanese sig. Toffoli, non vorrebbe contagiosa questa malattia, scrivendo così: » Per poco si prendano ad esame le diverse storie di rabbia, è facile il persuadersi » che questa malattia è semplicemente velenosa, e differisce dalle affezioni contagiose pei seguenti caratteri:

1. » Ogni morbo contagioso presenta nel suo decorso sintomi particolari invariabili, che lo caratterizzano; nè è facile cosa che nascano confusioni tra i singoli morbi contagiosi: nella rabbia invece, » come abbiamo veduto, alcuni suoi sintomi sono proprii di altre ma-

(1) Relazione delle Memorie lette nell' I. R. Accademia di Padova negli anni 1841 e 1842 pag. 82 e 83.

(2) Osservazioni sulla Epizoozia dei bovi del 1833 — 34. Rovigo 1834.

» lattie; e non di raro mancano i fenomeni caratteristici della me-
» desima.

2. » I contagi producono sempre delle eruzioni od efflorescenze cu-
» tanee, dalle quali deducesi la specie delle affezioni contagiose: nes-
» suna eruzione si osserva nella rabbia.

3. » I contagi sotto sfavorevoli circostanze climatiche ed alimen-
» tari, si diffondono maggiormente e spiegano un carattere più male-
» fico: invariabile decorre la rabbia sotto favorevoli od avverse in-
» fluenze di clima e d' igiene.

4. » Le affezioni contagiose, ancorchè dominanti con un genio il più
» malefico, risparmiano dall' esito mortale alcuni degl' individui che ne
» sono attaccati: la rabbia una volta sviluppata, frange inesorabilmente
» la vita di coloro che per somma sventura furono da essa colpiti.

5. » Si diffondono i contagi per contatto immediato o mediato. Il
» virus idrofobico, benchè funestissimo, non può spiegar la sua azione
» deleteria che innestato nell' organismo, o portato in parti ferite, pia-
» gate od anche semplicemente abrase ed escoriate, come si è già ve-
» duto altrove».

6. Il sesto argomento addotto dall' autore, a stringerlo in poche parole, viene ad essere, che i contagi han per carattere essenziale d' andarsi riproducendo: ma non la rabbia, la quale se comunicata più non si comunica.

Sicchè il sig. Cataneo pretenderebbe non essere contagiosa la rabbia o idrofobia, primamente e perchè alcuni suoi sintomi sono proprii anche di altre malattie, e perchè non di rado mancano i fenomeni suoi caratteristici. Essendosi da noi precedentemente risposto alla prima parte di questo argomento (N. XVIII.), qui notiamo rispetto alla seconda, che se talvolta mancano i fenomeni caratteristici della malattia, sarà perchè di veramente caratteristici non ne ha nissuno, variando essa molto secondo la specie degli animali, e non poco eziandio secondo gl' individui, e caratterizzandosi ella più dal complesso di varii sintomi, che da singoli sintomi speciali. E in ogni modo poi non vedrebbesi come questo potesse togliere di essere contagioso ad un morbo, quando il suo comunicarsi mostrasse evidentemente che è tale. Preten-

derebbe il sig. Cataneo in secondo luogo che la rabbia non fosse contagiosa, perchè i contagi producono sempre eruzioni cutanee, ed essa non mai. Noi però abbiamo avvertito esservi anche molti degli altri contagi che non producono eruzione cutanea (N. X.); e qui aggiungiamo, che quando pur tutti gli altri contagi avessero l'eruzione, e la sola idrofobia n' andasse priva, questo non sarebbe ragion sufficiente per dire che non è contagiosa: direbbe soltanto che in ciò essa differisce dagli altri contagi.

In terzo luogo asserisce il sig. Cataneo che gli altri contagi hanno influenza dal clima e dagli alimenti; e non punto l'idrofobia. La qual cosa se pur fosse vera, metterebbe, come è detto qui sopra, una differenza fra gli altri contagi e questo male, ma punto non mostrerebbe che non è contagioso: e diciamo se fosse vera, poichè non è ben provato nè che tutti gli altri contagi ricevano influenza dal clima, e assai meno che tutti la ricevano dagli alimenti; nè che non ricevane alcuna l' idrofobia.

In quarto luogo il sig. Cataneo deduce non essere contagiosa la rabbia, perchè a differenza degli altri contagi è sempre mortale. Ma questo dinota soltanto che essa di sua natura colpisce direttamente e malmena l' organo più importante da cui la vita dipende; e nulla ha che fare col non essere contagiosa.

La quinta ragione dal sig. Cataneo allegata, per levare dai contagi la rabbia, si è ch' essa per comunicarsi abbisogna d' inoculazione, o sia che si tolga l' ostacolo dell' epidermide. Il che se pur fosse senza veruna eccezione, e non si comunicasse alle volte anche per semplice leccamento, come lo stesso sig. Cataneo confessa, punto non proverebbe che non è contagiosa, siccome s' è già accennato più sopra (N. XVII.).

Per ultimo argomento il sig. Cataneo dice non essere contagiosa la rabbia, perchè la comunicata più non si comunica. Circa alla quale asserzione in prima si nota, essere mera supposizione contraria alle più accurate osservazioni, e ad una legge conosciutissima di natura, che siavi la rabbia *spontanea*, come abbiamo provato distesamente in uno scritto consacrato a questo solo intendimento. E appresso giova

osservare essere appieno falso che la rabbia comunicata non si comunichi, siccome in altro apposito scritto abbiamo pur dimostrato; e come il dimostrano anche sperimenti a bella posta recentemente istituiti da medici e veterinarii valentissimi, quali sono il Magendie e il Brechet, il De Maria e il Rey (N. XI.): contro i quali fatti positivi e pienamente conformi alla retta ragione, per nulla valgono i negativi di qualche altro che ad essi volle appoggiarsi.

XXIV. E senza che adduciamo altri esempii, da questi pochi bastantemente si scorge di qual tempera sien le ragioni, che a' nostri giorni si accampano per dire che non sono contagiosi que' mali, che fino ad ora furono sempre riconosciuti per contagiosi. Le quali ragioni o false in se medesime, od estranee all' argomento e inconcludenti, mentre offendono il diritto che anche le scienze naturali hanno di esser trattate con aggiustatezza di raziocinio, tendono a privarci di quella eredità preziosissima, che, con lunghe ed attente sperienze raccolta, ci tramandarono i nostri maggiori a preservamento di nostre vite e di quelle degli animali, che il nostro sostentamento formano e la nostra ricchezza: tendono a tor di mezzo quelle cautele, a levar quei ripari con tanta saggezza e provvidenza trovati e posti in esecuzione contro gl' insidiosi contagi, che sembrano attender soltanto l' occasion di deludere l'umana vigilanza per uscire dai loro aguati, e la divisione degli umani pareri per infierire a lor grado senza che loro pongasi ostacolo.

XXV. E pur se v' ha tempo, nel quale i sanitarii riguardi debbono più rispettarsi, in cui le precauzioni e i provvedimenti spettanti ai contagi vogliono aversi maggiormente in onore, egli è questo. Per l' addietro le stesse naturali barriere, le scarse e difficili comunicazioni tra paese e paese, tra nazione e nazione, poteano contribuire a mantener ogni morbo appiccaticcio nel luogo di sua creazione, ove non suole spiegare sopra i suoi terrazzani tanta ferocia, quanta ne spiega sui forestieri e ponendosi in viaggio per estranee contrade. Ma ora che le comunicazioni si vanno rendendo per tutto e sì frequenti e sì rapide, si facilita eziandio in proporzione il passaggio e la diffusion de' contagi. Che i contagi vivano di comunicazione e soltanto di comunica-

zione, ella è cosa che sempre fu, e sempre sarà, poichè la natura non usa cambiar tenore: e il nome stesso contagio non suona in fine, se non comunicazione. Già mostravaci, col saldo appoggio della storia, il dotto e benemerito sig. dott. Giuseppe Montesanto [1], che Venezia sarebbe stata costretta ad abbandonare le relazioni sue coll' oriente (sì spesso ella veniva malmenata da pestilenze!), se non ritrovava il ripiego di quelle regole di Sanità che tanto chiara la resero, e furono poi anche adottate da tutte le incivilite nazioni. Il solo mezzo di conciliare fra loro i due grandi interessi *Commercio e pubblica Salute* d' uomini e d' animali, dimora unicamente nell' esatto adempimento dei ben concepiti sanitarii provvedimenti.

XXVI. Vedendo io per tanto come il ragionare di molti a' nostri dì sui contagi, tornava per una parte ingiurioso alla scienza, fondandosi sopra non retti principii; e tornar poteva, per l' altra, di sommo danno quanto alla pratica, poichè sempre funesto essendo l' errore, funestissimo è poi allorchè tende alla distruzion delle vite; e vedendo come questo nasceva dal non aversi giusta e precisa la fondamentale idea del contagio, io cercai rettificarla: e dietro l' esame qui riportato mi parve conchiudere, che rigettando tutti gli altri caratteri come falsi o non generali, si debba ritenere semplicemente che *il male comunicabile sia il contagioso, e il contagioso* poi *non sia che contagioso;* essendo quest' idea non solamente la più vera e più naturale, ma eziandio la più utile sì per la pratica, sì perchè mettendo i contagi alla condizione medesima degli altri esseri già conosciuti che sempre si riproducon gli stessi, ne lascia intendere meglio il procedimento in ogni altro riguardo.

(1) Intorno alle antiche dottrine italiane sulla contagione. Padova 1836.

(*Letta nel giorno* 28 *Dicembre* 1846)

# STUDII ULTERIORI

## INTORNO

## ALLA RELAZIONE DELLA FORZA RIPULSIVA

## VERSO

## LA GRANDEZZA DELLE MOLECOLE DE' CORPI (*)

DEL

PROF. BARTOLOMMEO BIZIO

### §. I. *Nozioni fondamentali che si richiamano.*

Que' fatti medesimi, i quali evidentemente ci mostrarono la materia dotata di forza ripulsiva, ci chiarirono altresì che ne' corpi diversi la predetta forza s' incontra d' intensione differentissima; avvegnachè veggiamo gli olii volatili risospingere gli olii grassi; l' alcoole l' acqua, e così seguitamente di mano in mano che la forza degli uni verso quella degli altri raffrontiamo: cotalchè deesi generalmente concludere che la forza ripulsiva de' corpi differenziasi tanto nell' intensione quanto diversifica la medesima natura de' corpi. Primi fra' corpi, che sono dotati di grande forza ripulsiva, sono i metalloidi, i metalli degli alcali e tutti gli altri che ai predetti meglio si accostano. Indi vengono gli acidi minerali, e quegli fra gli organici, che consi-

(*) Vegg. Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Tom. I. pag. 329.

stono nella più semplice composizione e medesimamente i corpi idrogenati. Se non che malagevole sarebbe assai, se non al tutto impossibile l' additare le relazioni della forza ripulsiva de' corpi gli uni rispetto agli altri, e da pochissimi in fuori, che gli altri evidentemente vantaggiano, basta sapere che differenziano, senza volerne precisare il quanto della differenza.

Ora gli effetti, che questa forza, esistente in gradi differenti nei corpi diversi, adopera nelle minute masse, consistono in rarefazioni ed attenuazioni delle masse medesime; cotalchè, dove in un corpo che in confronto d'un altro, la forza ripulsiva sia più grande, e quindi la materia dee riuscire altresì più efficacemente divisa, cioè a dire, in particelle vie più minute risoluta. Ma allorchè la predetta forza adopera nella materia gli effetti suoi ripulsivi, essa la dirada ed espande progressivamente con tale decremento di massa nell'estremo perimetro che quivi la materia diradata si muore in ispigolo; adunque dee avvenire che lo spigolo torni tanto più acuto quanto si è più grande la forza ripulsiva di un dato corpo. Ma quanto lo spigolo è più acuto e tanto a proporzione è minore la quantità di materia, che ne costituisce l' estrema assottigliazione; quindi dee avvenire altresì, che l'acutezza degli spigoli torni tanto maggiore quanto è più grande la forza ripulsiva: donde se ne deduce che la quantità di materia, onde gli spigoli sono costituiti, decrescerà a misura che ne' corpi aumenterà la forza ripulsiva e converso. Ma la materia, che scaturisce degli spigoli in condizione precisamente elastica e quindi ripulsiva, quella è che compone l' estrema assottigliazione degli spigoli (perchè quivi solo le dimensioni della materia pervengono ad uguagliare le dimensioni delle sue molecole), dee seguirne ancora che la massa delle molecole sia tanto più piccola quanto è più grande la forza ripulsiva del corpo, cioè le masse molecolari dover essere inversamente proporzionali alla forza ripulsiva.

## §. II. *Particolarità contemperanti la forza ripulsiva delle molecole.*

Le molecole, nella loro propria condizione di particole disgregate, per quello che in altro luogo abbiamo mostrato, consistono in un numero indefinito di minutissime particelle materiali, dotate allora di forza ripulsiva, per cui fuggendosi dal centro per la direzione de' raggi, e reagendo in contrario della direzione onde fuggono, costituiscono quivi un minutissimo centro fisico, formato dall' aggregazione di un dato numero delle predette particelle ripulsive, le quali per la cagione mentovata non bastano a fuggirsene congiuntamente alle compagne. Da ciò quindi ne segue che le predette particole non per altro adoperano la qualità loro ripulsiva se non perchè signoreggianti una sola molecola; ma si tengono sempre subordinate e proclivi all' attrazione ogni volta che un impulso qualunque permanente le risospinga verso al centro, e quivi le obblighi a rimanersene, come ne rimane sempre quel ristretto numero che conferisce alla molecola il centro attrattivo. Dunque nelle predette particole, che potremo intitolare di *secondo ordine,* vi ha altresì l' attributo attrattivo capace di entrare in atto mediante cagioni sempre estrinseche, che si adoperino verso una sola molecola. Ma anche l' attraimento di queste particole secondarie dee essere differente d' intensione ne' corpi diversi, come veggiamo differire ne' varii corpi la coesione medesima delle masse solide e liquide: donde si mostra che le particole secondarie delle molecole esistenti ne' corpi solidi e liquidi deggiono essere più o meno strettamente congiunte secondo l' intensione della forza loro attrattiva. Ma la cagione determinante l' aggregamento delle prefate particole secondarie è per lo meno l' urto d' una molecola muoventesi in contrario con eguale velocità, onde nell' urto, schiacciandosi entrambe le predette molecole, le particole secondarie sono vicendevolmente risospinte al centro, e quivi dalla subentrante attrazione insieme annodate e permanentemente serbate: donde si scorge che le particole secondarie deggiono quivi essere più o meno strettamente congiunte non solo in grazia dell' at-

trazione propria, ma altresì della quantità dell' urto onde furono obbligate a serrarsi più o meno a' centri. Ne verrà in oltre da ciò che la coesione delle molecole non solo sarà più o meno grande secondochè sarà più o meno grande la forza attrattiva unente le particole secondarie, ma secondochè altresì più o meno grande sarà stata la gagliardia dell' urto che a' centri le sospinse. Ora quando nelle minute masse, o ne' sistemi attrattivi, adoperano cagioni disgregatrici di tal maniera che le minute masse entrino in condizione molecolare, siccome allora piglia predominio e si pone in atto la forza ripulsiva, questa dee vincere la coesione delle particole secondarie, e quanto questa coesione sarà più grande e tanto avremo una perdita maggiore nella forza ripulsiva impiegata a vincerla; sicchè gli effetti ripulsivi torneranno tanto meno pronti ed energici quanto più grande e serrata è l'aggregazione delle particole secondarie costituenti le molecole. Da questa considerazione ne conseguita che, se diamo, esempigrazia, di avere molecole spettanti a due corpi diversi, le cui masse molecolari fossero eguali, come ne abbiamo in più corpi che grandemente si accostano, ed eguale fosse pur anche l' intensione della forza ripulsiva; ma che in uno le particole secondarie fossero molto meno strettamente unite, sicchè le molecole riuscissero in un volume più grande; in queste molecole deggiono tornare altresì più grandi gli effetti della forza ripulsiva. Ma il divario che avremo in queste due molecole diverse unicamente si stringerebbe alla densità loro relativa, quindi ne viene che la forza ripulsiva delle molecole è inversamente proporzionale alla densità delle molecole stesse, cioè a dire, la forza ripulsiva è tanto più grande quanto è minore la densità delle molecole.

Vero è che, laddove le investigazioni de' chimici ci fornirono cognizioni preziose intorno alla massa molecolare o degli equivalenti, nulla sappiamo di preciso circa al volume delle molecole o degli equivalenti medesimi; giacchè vane riuscirono tutte le vie finora tentate; e le determinazioni medesime alle quali il Kopp e parecchi altri [1] si studiarono di pervenire, non escono dalla cerchia ipotetica e quindi non ispirano la desiderata fiducia. Senza che tale investigazione sem-

(1) Vegg. Rapport annuel del Berzelius anno 1843 pag. 1, anno 1846 pag. 22.

bra essere attraversata da impedimenti sì malagevoli a superare da lasciarci ancora lungo tempo nel desiderio di venire in conoscenza del prefato volume, mediante il quale avremmo quindi incontanente la densità relativa delle molecole o degli equivalenti. In fatti il Berzelius si esprime così: « Più volte mi è venuto in acconcio di favellare della » determinazione del volume atomico dei corpi semplici tanto guardati » fuori di qualunque combinazione, quanto fra loro chimicamente uniti; » da che il volume non è eguale in ambedue i casi. Siccome questo » è argomento della massima importanza teoretica, così mi piacque ri- » condurvimi a quando a quando, ed ho già mostrato che il volume » atomico de' corpi in istato di semplicità, cioè svincolati da qualunque » combinazione, è sempre più grande di quello che ci vien fatto d' in- » contrare allorchè il determiniamo mediante una combinazione. Questa » differenza rinvenuta procede evidentemente da ciò che un corpo sem- » plice, solido e svincolato da ogni combinazione, consiste in un ag- » gregato di atomi semplici riuniti dalla coesione, e separati da inter- » valli, che la forza attrattiva, il particolare collocamento geometrico » degli atomi e la temperie circoscrivono. L' esperienza ci ammaestrò » che la coesione ne' corpi semplici diversi adopera inegualmente i » suoi effetti a temperie eguale; donde ne conseguita che la distanza » degli atomi nei corpi semplici solidi dee essere differente, e che per- » ciò non basta conoscere il volume dell'aggregato per inferirne quello » di ciascun atomo che il compone.

» Allorchè gli elementi si combinano mediante la chimica affinità » e ne venga un corpo solido, le condizioni cangiano stante l' inter- » vento di una *nuova forza* (1), la quale, a quanto sembra, accosta gli » elementi di tal maniera che si toccano, od almeno nel formare gli » atomi composti, gli serba in una distanza incomparabilmente più » piccola di quella che è allora quando gli unisce mediante la coe- » sione, onde ne viene un congiugnimento, il quale si compie a di-

(1) Il Berzelius mette qui l'affinità chimica in conto d'una *nuova forza* e dichiara la differenza degli effetti che produce quasi contrassegnandone di tal maniera la diversità, mentre noi abbiamo evidentemente mostrato la diversità non consistere che nella diversa qualità delle molecole, che cozzano insieme, rimanendo sempre unica la forza.

» stanze differenti che procedono dalla differente forza attrattiva, dalla » forma geometrica e dalla temperie. Laonde ogni volta che si dia » opera a determinare il volume di un atomo elementare, il quale pro- » babilmente non varia finchè non entri in combinazione, quando è » combinato intervengono a contemperarne il volume più fattori, dei » quali non se ne può precisare il valore, e ne' quali nondimeno si » fonda il risultamento meccanico della investigazione. Quindi non fa » meraviglia che gli autori diversi, i quali entrarono in queste ricer- » che, siano pervenuti a risultamenti differentissimi. Tuttavia molto im- » portanti si vogliono sempre estimare tutte le investigazioni che si di- » rigono a questo fine; imperocchè deesi portar fiducia che arrivi un » giorno, per quantunque lontano voglia essere, in che avremo cono- » scenza esatta di tal subbietto.....

» Il sig. Avogadro imprendendo a trattare questo argomento ci » fornì un lavoro molto importante. Egli fonda il principio che da » quanto spetta al volume degli atomi degli elementi non si può venire » a nessuna illazione per ciò che risguarda i volumi delle molecole, » cioè a dire, della riunione degli atomi elementari, che costituiscono » la forma solida o liquida di un elemento; ma doversi indagare sem- » pre i volumi atomici nelle combinazioni. Egli si accinse a provare » che il volume atomico, quale ci viene incontrato nelle combinazioni, » è differente negli elementi diversi, e che quindi il volume dell' os- » sigeno, cioè a dire, dell' elemento il più elettronegativo, è il più pic- » colo di tutti, aumentando di mano in mano negli altri fino al sodio » e al potassio, cioè fino agli elementi i più elettropositivi, ne' quali il » volume torna massimo. Ora ammettendo che quello dell' ossigeno, il » quale, giusta l' Avogadro, è il più piccolo di ogni altro, sia uguale » ad 1,00, i volumi degli elementi più eminentemente elettropositivi » deggiono di poco eccedere la quantità espressa dalla cifra 6,00....[1]».

Che le molecole del potassio, del sodio, del calcio e di altri metalli analoghi eminentemente elettropositivi, dovessero consistere in un volume assai notevole a confronto di quelle di altri corpi, io il de-

(1) Vegg. Rapport annuel 31 Marzo 1846 pag. 22 e 23.

duceva fino dall' anno 1842 [1], fermandomi unicamente alla considerazione degli effetti operati dalla forza ripulsiva delle molecole dei prefati corpi, il che aggiugne nuova importanza all' evidente particolarità di quella forza ed alla natura degli effetti che ne accompagnano la sua manifestazione.

§ III. *Considerazioni circa l' intima costituzione della materia conducenti a ravvisare le difficoltà che si oppongono alla determinazione de' volumi molecolari.*

Fra le moltissime cose che ignoriamo una è di qual maniera la materia sia intimamente coordinata. Il fatto delle proporzioni definite condusse i chimici alla creazione degli *atomi*, corpuscoli indivisibili e quindi assolutamente resistenti; e il fenomeno della ripulsione corpuscolare contrapponentesi all' attrazione diede origine al concetto degl' imponderabili e principalmente del *calorico*. Veduto che gli atomi, dopo essersi, mediante l' attrazione, accozzati e legati insieme originando le masse, ad ogni anche menomo variar di temperie si dilungano, e, se le masse più o meno fortemente si scaldano gli atomi prima aggregati si disgiungono, si è immaginato che i corpuscoli anzidetti sieno circondati da una atmosfera calorifica, la quale costantemente ne li accompagni eziandio allorchè si accozzano per comporre le masse solide; cotalchè la solidità medesima non è che il risultamento o l' effetto del predominio attrattivo sopra la virtù ripulsiva della circostante atmosfera calorifica. Di qua ne conseguita che eziandio allora quando gli atomi sono strettamente aggregati ne' corpi i più solidi vi sono sempre interposte fra atomo ed atomo le concomitanti atmosfere calorifiche in guisa che gli atomi non pervengono giammai a toccarsi, e in questa supposizione sono mai sempre disgiunti. Egli è perciò che il Berzelius dice, come abbiamo allegato poc' anzi, *l' esperienza ci ammaestrò che la coesione ne' diversi corpi semplici adopera inegualmente i suoi effetti a temperie eguali, donde ne conseguita che la distanza degli atomi ne' corpi semplici solidi dee*

(1) Vegg. Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti Tom. I. pag. 334.

*essere differente;* sicchè gli atomi non solo sono sempre fra loro distanti, e separati da intervalli occupati dalle atmosfere calorifiche ed eziandio dalle elettriche, ma la predetta distanza varia secondo che varia la natura de' corpi. Giusta questo concetto ipotetico ci viene quindi rappresentata l' intima costituzione de' corpi quale un viluppo reticolare, in cui gli atomi raffigurano le maglie o vuoti delle reti, e le fila intrecciate gli spazii che li partiscono. Laonde la determinazione de' volumi atomici, o degli equivalenti, principalmente de' corpi semplici, si fonda in questo principio, il quale ci dà gli atomi non solo incapaci d' intrinseca variazione per la natura medesima dell' atomo, ma altresì per la difesa delle circostanti atmosfere, le quali, non che impedire gli urti e gli schiacciamenti, o qualunque altra materiale modificazione, gli guardano per fino dal menomo reciproco toccamento.

Abbiamo dal Berzelius [1], il Faraday essere entrato recentemente a discorrere sopra la *natura della materia*; « e lui osservare che la » teorica atomica, la quale suppone la materia formata di atomi indi- » visibili serbati fra loro, mediante alcune forze, ad una certa distanza » sicchè non si tocchino, essere una mera ipotesi utile se non anche » indispensabile a cagione della luce, ch' essa ci arreca allorchè ce ne » gioviamo per ispiegare i fenomeni chimici; ma tuttavia rimanersi entro » la cerchia di una ipotesi, di cui ne mostra la poca verisimiglianza. » L' obbiezione ch' egli contrappone alla probabilità di questa teorica consiste in ciò, che la teorica atomica risguarda la materia siccome » formata di piccole particelle separate le une dalle altre mediante in- » tervalli di grandezza ineguale. Di qua avviene che quello che noi di- » ciamo materia solida consiste in minute parti solide separate da spa- » zii, cioè, la materia venire a guisa d' una rete cellulare, le cui cel- » lette sono empite dagli atomi materiali, e le pareti, che le cellette » circoscrivono, raffigurano gli spazii vuoti, o gli intervalli onde gli ato- » mi rimangono fra loro disgiunti. Ora se la materia di tal maniera » intimamente coordinata noi facciamo di considerarla per rispetto alla » corrente elettrica, veggiamo la ragione onde l' oro, l' argento, il ra- » me, il ferro lasciano facilmente passare questa corrente, quantunque

(1) Vegg. Rapport annuel, 31 Marzo 1845 pag. 1.

» questa facilità riesca differente secondo che diversificano i metalli. » In fatti è lo spazio non occupato dagli atomi, il quale, comechè con- » tinuo nella materia, consente agevole transito alla corrente.

» Ora se questo medesimo ragionamento il trasportiamo alla gom- » malacca ci troviamo incontanente avviluppati, perciocchè troviamo » quivi la corrente elettrica insufficiente a penetrare e valicare questo » corpo, e quindi siamo costretti d' inferire che lo spazio nella gom- » malacca, comechè continuo, si oppone vigorosamente al passaggio » dell' elettrico. Laonde se la teorica atomica fosse vera, lo spazio da- » rebbe passaggio alla corrente in ambedue i casi; sicchè la teorica è » inammissibile: senza che quel medesimo che ci ha provato la gomma- » lacca, ce lo prova presso a poco il rame, il quale in uno spazio dato » comprende allo incirca il medesimo numero di atomi che il ferro » in uno spazio eguale, e non ostante conduce la corrente $\frac{61}{3}$ volte me- » glio che non faccia il ferro.

» Dopo che il Faraday, seguita il Berzelius, diede questo crollo alla » teorica atomica, reca innanzi altre imponenti difficoltà. In fatti fa os- » servare che l' idrato potassico fuso ed il nitro fuso contengono nel » medesimo spazio a confronto del potassio $\frac{11}{2}$ volte più di atomi; nu- » mero che ascende a $\frac{41}{2}$ volte altrettanto dove si aggiungano gli ato- » mi dell' ossigeno e dell' idrogeno e quest' ultimo addoppiato. Che se » badiamo al nitro fuso, il numero degli atomi del potassio è all' in- » circa lo stesso; ma facendo di aggiungerci quelli dell' ossigeno e del- » l' azoto esso torna 7 volte più grande che non ci venga incontrato » nel potassio in condizione metallica».

Nulladimeno il Berzelius amico e difensore possente della teorica » atomica continua così: « Non si può negare che la teorica atomica » sia una ipotesi; ma essa è la conseguenza necessaria d' innumerevoli » fatti, la cui cagione fugge ai nostri sensi; e se la teorica non calza » aggiustatamente ci dee essere un' altra cagione (1), la quale satisfac- » cia del pari a' risultamenti dell' esperienza, onde fino a tanto che non » ci sia dato di rinvenire questo nuovo lume, dobbiamo lasciarci scor- » gere a quello che possediamo », e quindi aggiugne: « Le pruove ca-

(1) Vegg. l'Op. cit. pag. 2.

» vate dalla corrente elettrica provano nulla per sè medesime; perciocchè avanti di cavarne una illazione fa mestieri sapere in che consista la corrente elettrica. In fatti è dessa un fluido imponderabile, il quale s' insinua negli interstizii della materia, ovvero consiste in uno scambio delle elettricità opposte fra le particole materiali, il quale scambio può avvenire anche a distanza, e senza che punto faccia mestieri un reale toccamento? Qui è facile vedere la difficoltà di porre in chiaro il primo avvenimento; cotalchè dove il secondo fosse probabile, avremo incontanente la cagione della corrente elettrica nella natura medesima degli atomi materiali, e quindi l' obbiezione verrebbe in conferma dell' idea ch' essa piglia a combattere. Circa poi al fatto straordinario che le combinazioni chimiche contengano entro il medesimo spazio un numero più grande di atomi materiali che non contengono i corpi elementari, io mi limito, dice il Berzelius, ad osservare che più chimici, i quali proferirono il loro avvisamento sopra questo particolare, tutti dimenticarono che ne' corpi semplici gli atomi sono accozzati dalla coesione ch' è forza debole; laddove nelle chimiche combinazioni è l' affinità che lega insieme gli atomi elementari differenti, e quivi probabilmente senza che fra gli atomi corrano intervalli, mentre la coesione congrega insieme gli atomi composti in guisa che per ogni intorno a ciascun atomo avremo spazio vuoto ».

Ognuno vede quali rigorosissime obbiezioni si potrebbono contrapporre alle ragioni allegate dal Berzelius in difesa della teorica atomica, quando tale fosse il fine onde qui si adducono i pensamenti del Faraday circa la *natura della materia*. Esempigrazia, egli vorrebbe indebolire, se non al tutto annullare, l' importanza del fatto, che pure appella *straordinario*, onde entro lo stesso spazio le combinazioni chimiche contengono un maggior numero di atomi che non contengano i corpi elementari, adducendo la debolezza della coesione a confronto della chimica affinità, ch' è argomento erroneo e di niun valore. La coesione in fatti è debole o possentissima secondo la natura de' corpi in che adopera i suoi effetti, com' è gagliarda o fievolissima l' affinità secondo la natura delle molecole eterogenee che congiugne. Diremo

forse debole la coesione che stringe insieme le molecole del ferro, dell'acciaio, del bronzo, de'porfidi, de' quarzi, del diamante e di altri corpi innumerevoli che non si memorano; ovvero diremo possente l' affinità che lega l' ossigeno all' oro nell' acido aurico, al manganese nell' acido manganico, il cloro e l' iodio all' azoto nel clorido ed iodido azotici, oppure gli elementi ne' composti fulminanti, ne' quali il blandissimo tocco di una piuma basta repentinamente a disgiungerli?

Noi sappiamo oggigiorno abbisognare *l' arco voltaico*, non che a vincere totalmente, solo ad indebolire la coesione del diamante (1). laddove una mitissima corrente elettrica risolve l' acqua ne' suoi elementi. È dunque vano il provarsi a difendere la teorica atomica dagli argomenti che la combattono; perciocchè contro la possanza del vero falliscono le armi anche in mano dei più valenti. Basti però fin qui; perciocchè ora non a questo fine allegai i pensamenti del Faraday circa la *natura della materia*, ma sì perchè fosse chiaramente veduto come i chimici ed i fisici tengano al presente l' intima costituzione della materia, e quali ragioni sussistano sufficienti a mostrar erronea quella teorica; la quale perciò male si presterebbe a guida di chi voglia indagare il volume degli equivalenti, dovendosi prima conoscere accertatamente i temperamenti, che incontrano le molecole allorchè si accozzano insieme o mediante la coesione, o per opera dell' affinità.

Il principio dinamico ci dà l' intima costituzione della materia in tutt' altra maniera da quella, che i chimici ed i fisici l' ebbono finora ideata. Siccome, o che abbia luogo la coesione o l'affinità, fa prima mestieri che le molecole sieno elastiche, e così elastiche urtino fra loro, si schiaccino, si attraggano, sicchè nell' un caso e nell' altro vi ha sempre intimo contatto, nè vigono più le atmosfere elettriche e calorifiche che le partiscano; così l' intima costituzione della materia ci è rappresentata da un accozzamento di molecole che in più tratti si toccano ed esattamente combaciano, lasciando de' pori o degli spazii vuoti che forse tortuosamente continuano, ma senza veruna necessità che il vacuo sia continuo nella materia. E posciachè tanto la coesione

(1) Vegg. Annali di Fisica, Chimica ec., del Maiocchi. Tom. XXVI pag. 287.

che la chimica combinazione è il risultamento dell' urto delle molecole, il quale per più cagioni può riuscire differentemente modificato; così i temperamenti dell' unione molecolare possono notevolmente diversificare eziandio nello stesso corpo siccome un esempio ragguardevole ce lo dà il carbonio.

Ma l' opera dell'urto, onde la coesione e le combinazioni si effettuano, non produce solamente l' intimità de' contatti molecolari, ma altresì un costipamento, un addensamento delle particole secondarie formanti le molecole, onde riesce notevolmente modificato il volume delle molecole o degli equivalenti; cioè a dire, più o meno aumentata la densità molecolare. Da questo serramento più o meno efficace, che provano le particole secondarie, allorchè le molecole perdono lo stato elastico ed eziandio durante questo stato, se una cagione qualunque bastevole riesce a spegnere alquanto la virtù ripulsiva, costrignendole verso a' centri, ne deriva la condizione isomerica ed allotropica de' corpi, che oggigiorno in più circostanze s' incontrano. Laonde troppo si fa manifesto per quanti modi e cagioni il volume delle molecole può riuscire variato, e quindi tornare malagevole, se non inravvisabile, l' esatta determinazione.

Tale è dunque l' intima costituzione della materia quale c' induce a ravvisarla il principio dinamico; e laddove le osservazioni del Faraday combattono ed atterrano la teorica atomica per quella parte che essa piglia nell' accozzamento degli atomi, tornano in contrario in isplendida conferma della ragione dinamica in guisa che i medesimi fatti, che alla teorica atomica si oppongono, divengono conseguenze accessorie del congiugnimento delle molecole prodotto dall' urto, e modificante sempre il volume delle molecole stesse.

§ IV. *Fatti comprovanti la forza ripulsiva delle molecole venire tanto più grande quanto è più piccola la massa molecolare.*

Il modo onde la forza ripulsiva manifesta l' opera sua nell' attenuazione della materia ci condusse ad inferire che in que' corpi nei quali la predetta forza si manifesta più energica, quivi le masse molecolari deggiono essere minori a confronto di quelli ne' quali la ripulsione torna fievole. Ora se il fatto de' pesi molecolari, o degli equivalenti si accordasse a puntino co' fenomeni di ripulsione, sarebbe efficacemente avverata la ragione dinamica; e qui veggiamo che tra' corpi dotati di molta forza ripulsiva primi ad entrare innanzi sono l' idrogeno, l' ossigeno, l' azoto, il sodio, il litio, l' ammonio, il calcio, il bario, il magnesio, l' alluminio, il glucinio, e generalmente i metalli più elettropositivi; mentre quelli che notevolmente scadono di vigoria rispetto alla predetta forza sono l' oro, l' iridio, il platino, l' argento, il mercurio, l' urano ed altri parecchi, che spettano a metalli più elettronegativi. E se adesso raffrontiamo l' efficacia e la debolezza della ripulsione manifestata da' predetti corpi col peso delle molecole, o degli equivalenti, troviamo precisamente che que' corpi, le cui molecole sono costituite da una piccola massa, posseggono grande e vigorosa la forza di ripulsione, e quelli ne' quali questa forza di ripulsione è fievole la massa delle molecole ci viene incontrata notevolissima. Per iscorgere ad un tratto l' esattezza di questo riscontro porrò qui in serie il peso degli equivalenti de' corpi semplici quale ci è dato dal Berzelius, e senza tener conto d' alcune recenti correzioni, che sopra taluni esperienze ulteriori apportarono; perocchè le minute differenze nel valore di una cifra niente nuocono all' esattezza della presente dimostrazione. E nell' allegarli non seguirò altro ordine che l' alfabetico, riservandomi appresso alcuni raffrontamenti e considerazioni valevoli a chiarire il subbietto; sicchè il peso degli equivalenti e delle molecole de' corpi semplici viene come segue:

| Nome della sostanza | Suo equivalente | | Nome della sostanza | Suo equivalente | |
|---|---|---|---|---|---|
| Alluminio | 171 | 17 | Molibdeno | 598 | 52 |
| Ammonio | 113 | 48 | Nichelio | 369 | 68 |
| Antimonio | 806 | 45 | Nitrogeno od Azoto | 177 | 04 |
| Argento | 1351 | 61 | Oro | 1243 | 01 |
| Arsenico | 470 | 04 | Osmio | 1244 | 49 |
| Bario | 856 | 88 | Ossigeno | 100 | 00 |
| Bismuto | 886 | 92 | Palladio | 665 | 90 |
| Boro | 136 | 20 | Piombo | 1294 | 50 |
| Bromo | 978 | 31 | Platino | 1233 | 50 |
| Cadmio | 696 | 77 | Potassio | 489 | 92 |
| Calcio | 256 | 02 | Rame | 395 | 70 |
| Carbonio | 76 | 44 | Rodio | 651 | 39 |
| Cerio | 574 | 70 | Selenio | 494 | 58 |
| Cloro | 442 | 65 | Silicio | 277 | 31 |
| Cromo | 865 | 93 | Sodio | 290 | 90 |
| Cobalto | 368 | 99 | Stagno | 735 | 29 |
| Ferro | 339 | 21 | Stronzio | 547 | 29 |
| Fluoro | 116 | 90 | Tantalo | 1153 | 72 |
| Fosforo | 196 | 14 | Tellurio | 801 | 76 |
| Glucinio | 331 | 26 | Titano | 303 | 66 |
| Idrogeno | 12 | 48 | Torio | 744 | 90 |
| Iodio | 1579 | 50 | Tungusteno | 1185 | 00 |
| Iridio | 1233 | 50 | Urano | 2711 | 36 |
| Ittrio | 402 | 51 | Vanadio | 856 | 89 |
| Litio | 80 | 33 | Zinco | 403 | 23 |
| Magnesio | 158 | 35 | Zolfo | 201 | 17 |
| Manganese | 345 | 89 | Zirconio | 420 | 20 (1) |
| Mercurio | 1265 | 82 | | | |

(1) Fu qui pretermessa l'indicazione de' metalli più recentemente scoperti soprabbastando i presenti de' quali certamente sono meglio precisati gli equivalenti.

Ora basta gittare l'occhio sovra le cifre qui addotte, dinotanti il peso molecolare de' singoli corpi, per iscorgere a un tratto che in quelli, ne' quali la forza ripulsiva è notevole, le masse molecolari sono le più esigue. Per quello che si è precedentemente dimostrato chiaro apparisce che noi diciamo essere in un corpo vigorosa la forza ripul-

siva, allorchè è grande la sua tendenza ad entrare in istato elastico e quindi a stringersi in combinazione con altri corpi; perciocchè è condizione essenzialissima che un corpo per entrare in chimica combinazione prima si conduca in istato elastico, nè può trapassare in quello stato se non in virtù della propria forza ripulsiva. Laonde noi abbiamo detto perciò essere grande la forza ripulsiva dell' ossigeno, dell' idrogeno, dell' azoto, del fluoro, del fosforo, del zolfo, del potassio, del sodio, del calcio e di più altri, e noi veggiamo di tutti questi corpi essere piccolissime le masse molecolari. In fatti pretermettendo le cifre centesimali, che al caso nostro non mettono, veggiamo il peso della molecola dell' ossigeno =100; dell' idrogeno =12; dell' azoto o nitrogeno =88; del fluoro =116; del fosforo =196; del zolfo =201; del potassio =490; del sodio =291; del calcio =256; e così seguitamente se più altri ne riandiamo; e sempre veggiamo diminuire le masse molecolari di mano in mano che cresce la forza ripulsiva e converso. In fatti se fermiamo per un istante l' attenzione nostra all' oro, all' iridio, al platino, all' argento, al mercurio, all' urano, nei quali la forza ripulsiva è debolissima, troviamo subito che la massa molecolare aumenta notevolmente; avvegnachè incontriamo quella dell' oro =1245; dell' iridio =1233; del platino =1233; dell' argento =1351; del mercurio =1265; dell' urano =2711; per cui troviamo il fatto aggiustarsi esattamente alle ragioni della teorica.

Nè ciò si stringe, o limita a' corpi semplici, ma anzi comprende ed abbraccia ogni maniera di composti, in guisa che la forza ripulsiva del composto torna costantemente più energica e vigorosa quanto è più piccola la massa molecolare degli elementi onde il composto trae origine, e quanto è più ristretto il numero degli equivalenti che si associano. Cotalchè dove un elemento si congiunga a un altro in più proporzioni differenti, quello è dotato di più forza ripulsiva, che consiste nella più semplice proporzione, cioè a dire, quando è una molecola eterogenea congiunta ad un' altra; perchè quivi è sempre più piccola la massa.

Gli acidi generalmente parlando sono corpi dotati di molta forza ripulsiva; ma vedremo anche in questa numerosa categoria di corpi

che la predetta forza ci verrà trovata costantemente grande sino a tanto che riesca piccola la massa; che se in contrario la massa verrà aumentata sino al termine di tornare ingente, vedremo subito indebolita per modo la forza ripulsiva di questi corpi da non ravvisare, quasi dissi, più la qualità di acido. Gettiamo perciò lo sguardo sovra il ristretto numero ch' io qui adduco:

| Qualità dell' Acido | Suo equivalente | | Qualità dell' Acido | Suo equivalente | |
|---|---|---|---|---|---|
| Acido solforico | 501 | 16 | Acido malico | 730 | 71 |
| —— solforoso | 401 | 16 | —— tartarico | 830 | 71 |
| —— nitrico | 677 | 04 | —— succinico | 630 | 71 |
| —— nitroso | 477 | 04 | —— clorico | 942 | 65 |
| —— fosforico | 892 | 28 | —— fluoridrico | 123 | 14 |
| —— fosforoso | 692 | 28 | —— cianidrico | 171 | 20 |
| —— fulminico | 429 | 91 | —— cloridrico | 227 | 57 |
| —— cianico | 429 | 91 | —— solfocianidrico | 372 | 36 |
| —— selenico | 794 | 58 | —— bromidrico | 495 | 29 |
| —— silicico | 577 | 31 | —— iodidrico | 795 | 99 |
| —— carbonico | 276 | 44 | —— gallico | 1072 | 50 |
| —— ossalico | 452 | 87 | —— mucico | 1321 | 02 |
| —— borico | 436 | 20 | —— urico | 1909 | 96 |
| —— formico | 465 | 35 | —— margarico | 3393 | 38 |
| —— acetico | 643 | 19 | —— oleico | 6599 | 40 |
| —— citrico | 730 | 71 | —— stearico | 6686 | 76 |

Laonde se adesso fermiamo l' attenzione nostra sovra le singole masse dei predetti acidi, e che badiamo insieme alle energiche proprietà chimiche di che sono forniti e alla tendenza alla elasticità, di cui specificamente sono forniti, riscontriamo che tanto meglio ne sono provveduti, quanto la massa è più esigua, cioè venire in ciascuno tanto più grande la forza ripulsiva quanto è più piccola la massa.

§. V. *Considerazioni intorno alla relazione della forza ripulsiva verso la densità delle molecole, la quale viene tanto più grande quanto è più piccola la densità.*

Nel mostrare testè la relazione della forza ripulsiva colle masse molecolari, raffrontando il peso relativo delle molecole de' corpi diversi, abbiamo evidentemente avvalorato il principio dedotto dagli attributi della predetta forza, cioè venire essa tanto più grande quanto le masse sono più piccole. Nulladimeno non possiamo celare esserci incontrati in alcune eccezioni, le quali mostrerebbero la teorica scostarsi talvolta dal posto principio. In fatti a tutta prima c' imbattiamo nel potassio, metallo sovra ogni altro fornito di possente virtù ripulsiva sì pel suo pronto trascorrere allo stato elastico, come eziandio per la gagliardia della sua azione chimica, e nondimeno il peso della sua molecola ci venne trovato =490, cioè a dire superiore a quello del nichelio (370), del ferro (369), del rame (396), del zinco (403) e del titano (304), metalli che a confronto del potassio scadono enormemente in energia ripulsiva. Qui ci dee essere adunque una cagione inducente questo divario notevole, e noi diciamo venire dal volume relativo delle molecole, che veggiamo grandissimo nel potassio e in paragone piccolo assai negli altri mentovati metalli.

Vorremmo perciò avere qualche fondamento positivo per dedurre alcun che di certo circa il volume delle molecole, ed abbiamo dianzi veduto le gravi difficoltà, che attraversano fino al presente una tale determinazione. Nulladimeno il poterci ora attenere ad un modo diverso di scorgere l' intima costituzione della materia ci sembra poterci fornire una via approssimativa per arguire fondatamente qualche cosa anche intorno al volume delle molecole. Fino a tanto che nella materia aggregata gli atomi erano veduti assolutamente disgiunti, e correre fra essi un vacuo continuo indeterminato, le gravità specifiche de' corpi dicevano nulla rispetto al volume degli atomi, da che la differenza del peso in ispezie, oltrechè riferirsi alla differente densità degli atomi diversi, si rapportava altresì alla differente grandezza del

vacuo continuo indeterminato, onde gli atomi diversi, tanto semplici che composti, erano gli uni dagli altri disgiunti. Ma ora la ragione dinamica ci chiama a risguardare l' intima costituzione della materia in tutt' altro modo. Cacciati via gli atomi di una immutabile densità, sottentrano le molecole, capaci per intrinseca virtù propria di espandersi e di contraersi; contrazione però che nello stato di solidità, allorchè sia venuto nelle medesime circostanze, può tenersi costantemente la stessa. Se non che da questo attributo molecolare ne conseguita un dato che ci fornisce un plausibile fondamento per trarre qualche luce dalle gravità in ispezie relativamente al volume delle molecole. Esse in fatti non che tenersi vicendevolmente lontane, nell'aggregarsi vigorosamente si schiacciano e quindi si tengono unite per tratti più o meno estesi delle lor superficie; sicchè non solo scompare il vacuo continuo, ma rimangono soli pori, nulli al paragone della scomparita vacuità. Laonde nel divario delle gravità in ispezie fra corpi diversi molto resta da attribuire al volume delle molecole; sicchè potremo con molto aggiustata approssimazione ritenere più grande il volume in que' corpi, ne' quali, essendo pressochè eguale la massa molecolare, troviamo scadere la gravità specifica.

Posto ciò, se ora torniamo al potassio badando alla sua vigorosissima forza ripulsiva troviamo, è vero, questa poco confarsi col peso della sua molecola (490): ma quando ci richiamiamo ch' è un metallo di sì mirabile e stravagante singolarità per rispetto alla sua gravità in ispecie da venire solamente trovata $=0,865$, veggiamo subito la ragione della sua possanza ripulsiva; anzi ne deduciamo una pruova convincente che essa aumenta secondo che si menoma la densità delle molecole. Verità, la quale ci viene riconfermata dalla gagliarda forza ripulsiva di tutti i metalloidi, e de' metalli degli alcali e delle terre, la cui leggerezza in ispecie o scade o di poco vantaggia quella dell' acqua. Nulladimeno essendovi fra' metalli propriamente detti di quelli che grandemente si accostano fra loro nella grandezza delle masse molecolari e non ostante si differenziano notevolmente gli uni rispetto agli altri in conto della forza ripulsiva, farò qui di allegare alcuni con porvi a canto le relative gravità in ispecie, affinchè meglio appaia come la forza ripulsiva aumenti sempre quando si menoma la densità molecolare.

# CORPI RELATIVAMENTE DOTATI

| DI MAGGIOR FORZA RIPULSIVA | | | | | DI MINOR FORZA RIPULSIVA | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nome del corpo | Equivalente | | Gravità specifica | | Nome del corpo | Equivalente | | Gravità specifica | |
| Potassio | 489 | 92 | 0 | 865 | | | | | |
| | | | | | Selenio | 494 | 58 | 4 | 32 |
| | | | | | Arsenico | 470 | 04 | 5 | 70 |
| Sodio | 290 | 90 | 0 | 972 | Zinco | 403 | 23 | 6 | 86 |
| | | | | | Nichelio | 369 | 68 | 8 | 27 |
| | | | | | Rame | 395 | 70 | 8 | 85 |
| | | | | | Arsenico | 470 | 04 | 5 | 70 |
| | | | | | Zinco | 403 | 23 | 6 | 86 |
| Selenio | 494 | 58 | 4 | 32 | Nichelio | 369 | 68 | 8 | 27 |
| | | | | | Rame | 395 | 70 | 8 | 85 |
| | | | | | Zinco | 403 | 23 | 6 | 86 |
| | | | | | Ferro | 339 | 21 | 7 | 84 |
| | | | | | Manganese | 345 | 89 | 8 | 01 |
| Arsenico | 470 | 04 | 5 | 70 | Cobalto | 368 | 99 | 8 | 53 |
| | | | | | Nichelio | 369 | 68 | 8 | 27 |
| | | | | | Rame | 395 | 70 | 8 | 85 |
| | | | | | Ferro | 339 | 21 | 7 | 84 |
| | | | | | Manganese | 345 | 89 | 8 | 01 |
| Zinco | 403 | 23 | 6 | 86 | Cobalto | 368 | 99 | 8 | 53 |
| | | | | | Nichelio | 369 | 68 | 8 | 27 |
| | | | | | Rame | 395 | 70 | 8 | 85 |
| | | | | | Telluro | 801 | 76 | 6 | 38 |
| | | | | | Antimonio | 806 | 48 | 6 | 70 |
| Cromo | 865 | 90 | 5 | 90 | Bismuto | 886 | 92 | 9 | 83 |
| | | | | | Rodio | 651 | 39 | 11 | 00 |
| | | | | | Palladio | 665 | 90 | 11 | 80 |
| | | | | | Antimonio | 806 | 48 | 6 | 70 |
| | | | | | Bismuto | 886 | 92 | 9 | 83 |
| Telluro | 801 | 76 | 6 | 38 | Rodio | 651 | 39 | 11 | 00 |
| | | | | | Palladio | 665 | 90 | 11 | 80 |
| | | | | | Bismuto | 886 | 92 | 9 | 83 |
| Antimonio | 806 | 48 | 6 | 70 | Rodio | 651 | 39 | 11 | 00 |
| | | | | | Palladio | 665 | 90 | 11 | 80 |
| | | | | | Mercurio | 1265 | 82 | 13 | 56 |
| | | | | | Argento | 1351 | 61 | 10 | 47 |
| | | | | | Osmio | 1244 | 49 | 10 | 00 |
| Piombo | 1294 | 50 | 11 | 44 | Iridio | 1233 | 50 | 15 | 65 |
| | | | | | Tungusteno | 1185 | 00 | 17 | 22 |
| | | | | | Oro | 1243 | 01 | 19 | 65 |
| | | | | | Platino | 1233 | 50 | 21 | 53 |
| | | | | | Argento | 1351 | 61 | 10 | 47 |
| | | | | | Osmio | 1244 | 49 | 10 | 00 |
| Mercurio | 1265 | 82 | 13 | 56 | Iridio | 1233 | 50 | 15 | 65 |
| | | | | | Tungusteno | 1185 | 00 | 17 | 22 |
| | | | | | Oro | 1243 | 01 | 19 | 65 |
| | | | | | Platino | 1233 | 50 | 21 | 53 |
| | | | | | Osmio | 1244 | 49 | 10 | 00 |
| | | | | | Iridio | 1233 | 50 | 15 | 65 |
| Argento | 1351 | 61 | 10 | 47 | Tungusteno | 1185 | 00 | 17 | 22 |
| | | | | | Oro | 1243 | 01 | 19 | 65 |
| | | | | | Platino | 1233 | 50 | 21 | 53 |

A chi piaccia portare l' occhio sopra questa tavola trova di leggeri di che convincersi che la forza ripulsiva de' corpi è tanto più grande quanto sono più piccole le densità molecolari, facendo che queste densità, per le ragioni allegate, strettamente si attengano alla densità de' corpi. Quelli fra' metalli che alcun poco torcono dalla dirittura di questa legge sono i tre ultimi posti in serie, cioè il piombo, il mercurio e l' argento, l' ultimo de' quali è alcun poco specificatamente più lieve del primo e notabilmente più del secondo, cioè del mercurio, la cui gravità in ispecie lo porrebbe ultimo della serie, mentre nol consente la sua tendenza alla elasticità, nè il temperamento della sua azione chimica a confronto dell' argento, comechè assai vicino. Nulladimeno il divario che incontriamo nel mercurio in paragone dell' argento e se vogliamo del piombo medesimo e di altro metallo, credo che si debba ascrivere alla sua naturale condizione liquida, la quale ne induce a ravvisare nelle particole secondarie delle sue molecole una notevole forza ripulsiva a petto della grandezza della massa medesima, la quale ripulsione energica delle particole secondarie del mercurio ci è riconfermata dalla particolarità del suo vapore, nel quale troviamo la molecola dimezzata, o divisa in due, spartimento che dobbiamo al potere ripulsivo delle particole secondarie il quale si fa eccessivamente energico mediante quello scaldamento che compete al mercurio per entrare e mantenersi in condizione di vapore. Laonde se la molecola dimezzata del vapore potesse altresì pigliar parte nelle chimiche combinazioni, vedremo nel mercurio altra energia di azione chimica, e perciò a questo accidente delle sue molecole teniamo doversi ascrivere la piccola eccezione che si contrappone al regolare procedimento della forza ripulsiva sempre più grande in que' corpi ne' quali le molecole sono meno dense.

## §. VI. *Considerazioni intorno alla relazione del calorico specifico colla grandezza delle molecole.*

Quantunque qui non sia il luogo in che io mi debba accingere a provare il calorico altra cosa non essere che un attributo insito alle molecole, nondimeno mi conviene soffermarmi alcun poco sopra questo importante fenomeno per dilucidare una sua attinenza verso le molecole o gli equivalenti. L'attributo della ripulsione che noi troviamo spettare in proprio alle molecole, esclude l'idea di *calorico* quale specialità di sostanza, e perciò la partecipazione del calorico ad un corpo, cioè il suo riscaldamento, non è che una partecipazione di movimento vibratorio ripulsivo impresso alle molecole, onde le particole secondarie, indebolita perciò la vicendevole attrazione che le strigne reciprocamente si dilungano per la via de' raggi e più o meno energicamente si scaldano: brevemente lo scaldamento altra cosa non è che una comunicazione di moto ripulsivo. Ma noi abbiamo mostrato che la forza ripulsiva de' corpi è naturalmente tanto più grande quanto le molecole sono più piccole, sicchè ne verrebbe che incontrandosi la stessa vibrazione ripulsiva, ovvero la medesima temperie, in due corpi le cui molecole fossero inegualmente grandi, esempigrazia, il litio (80) e l'oro (1243), dovremmo rinvenire nel primo, siccome pendente assai a trascorrere in condizione ripulsiva, la causa inducente il moto ripulsivo più piccola che nel secondo, cioè dovremmo trovare che per indurre in entrambi una medesima vibrazione, dovrebbe nel primo occorrere una comunicazione di moto ripulsivo molto minore che nel secondo. In fatti facciasi che la forza ripulsiva del litio sia $=100$, e che si abbia in esso una vibrazione ripulsiva corrispondente ad una temperie $=200$; la quantità di calorico abbisognataci per conseguire la predetta temperie, ovvero la quantità del moto vibratorio ripulsivo partecipato sarà $=2$. Diamo adesso che la forza ripulsiva dell'oro, come notevolmente più piccola di quella del litio, sia $=10$, e che si abbia in esso egualmente una vibrazione ripulsiva corrispondente ad una temperie $=200$; ne verrà che la quantità del calorico, cioè

la quantità del moto vibratorio ripulsivo comunicato sarà = 20, cioè a dire la causa inducente una data quantità di vibrazione nel litio starà a quella che medesimamente opera nell' oro :: 1 : 10, cioè nel litio non aggiugnerà che a un decimo di quella che è nell' oro. Questa causa inducente la vibrazione se la rechiamo, come fanno oggigiorno i fisici e i chimici, a realità di sostanza, essa è il calorico specifico de' corpi, e la nostra argomentazione si accorda aggiustatamente coll' esperienza, cioè, il calorico specifico di quantità uguali in peso de' corpi diversi differisce costantemente come differisce la natura de' corpi stessi. Ma questa concordanza non procede d' accordo col fatto, se non fino a tanto che ci atteniamo a quantità eguali in peso di materie diverse, e discorda subitamente allorchè ci richiamiamo alla legge dei sig. Petit e Dulong, la quale svelandoci il calorico specifico spettante alle molecole, o agli equivalenti, ci porge un fatto il quale a prima giunta sembra disconvenire col principio dinamico. In fatti noi abbiamo precedentemente veduto che i corpi consistono nell' aggregazione di un numero indefinito di molecole, le quali differiscono in peso come differisce la natura de' corpi diversi, esempigrazia molecole lievissime abbiamo rinvenute nell' idrogeno (12) ed a confronto enormemente pesanti nel platino (1233). Ne conseguita quindi da ciò che le molecole pesando differentemente secondo la natura diversa de' corpi, se prendiamo quantità eguali di due corpi diversi, avremo in ciascuno un numero di molecole tanto più grande quanto il peso molecolare sarà più piccolo, e converso un numero di molecole tanto più piccolo quanto il peso molecolare sarà più grande, cioè il numero delle molecole in ciascuno dei predetti corpi sarà in ragione inversa del peso molecolare o degli equivalenti; cotalchè tornando all' addotto esempio di due quantità eguali d' idrogeno e di platino, avremo nel primo precisamente un numero di molecole tanto più grande quanto il peso delle sue molecole è più piccolo a confronto di quello del platino mentovato.

Posto ciò, se ora veniamo al calorico specifico de' corpi se ne ha il singolare risultamento ch' è mostrato nella tavola che segue.

| Nome dei corpi | CALORICO SPECIFICO secondo il Regnault | CALORICO SPECIFICO secondo il Dulong | CALORICO SPECIFICO secondo il De La Rive e Marcet | Peso molecolare ordinario | Peso molecolare cangiato dal Regnault | Prodotto del peso molecolare pel calorico specifico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zolfo | 0, 20259 | 0, 1880 | . . . | 201. 17 | . . . . | 40, 754 |
| Fosforo | 0, 1887 | 0, 385 | . . . | 196, 14 | . . . . | 37, 024 |
| Carbone | 0, 2411 | 0, 250 | 0, 165 | 76, 44 | 152, 88 | 36, 873 |
| Diamante | . . . | . . . | 0, 1192 | . . . . | . . . . | . . . |
| Bromo | . . . | . . . | 0, 135 | . . . . | . . . . | . . . |
| Iodio | 0, 05412 | 0, 089 | . . . | 789, 75 | . . . . | 42, 703 |
| Selenio | 0, 08370 | . . . | 0, 0874 | 494, 56 | . . . . | 41, 403 |
| Arsenico | 0, 08140 | 0, 081 | . . . | 470, 04 | . . . | 38, 261 |
| Tungusteno | 0, 03636 | 0, 035 | . . . | 1183, 00 | . . . . | 43, 022 |
| Molibdeno | 0, 07218 | 0, 0659 | . . . | 598, 52 | . . . | 43, 163 |
| Telluro | 0, 05155 | 0, 0912 | . . . | 801, 75 | . . . | 41, 549 |
| Antimonio | 0, 05077 | 0, 0507 | . . . | 806, 45 | . . . | 40, 944 |
| Oro | 0, 03244 | 0, 0298 | . . . | 1243, 00 | . . . . | 40, 328 |
| Platino | 0, 03243 | 0, 0314 | . . . | 1233, 50 | . . . . | 39, 993 |
| Iridio | 0, 03683 | . . . | . . . | 1233, 50 | . . . . | 45, 428 |
| Palladio | 0, 03927 | . . . | . . . | 665, 90 | . . . . | 39, 468 |
| Argento | 0, 05701 | 0, 0557 | . . . | 1351, 60 | 675, 80 | 38, 527 |
| Mercurio | 0, 03332 | 0, 0318 | . . . | 1265, 82 | . . . . | 42, 129 |
| Bismuto | 0, 03084 | 0, 0288 | . . . | 886, 92 | 1330, 40 | 41, 028 |
| Urano | 0, 06190 | . . . | . . . | 2711, 36 | 677, 84 | 41, 960 |
| Rame | 0, 09515 | 0, 0949 | 0, 095 | 395, 70 | . . . | 37, 849 |
| Piombo | 0, 03140 | 0, 0293 | . . . | 1294, 50 | . . . . | 40, 647 |
| Stagno | 0, 05633 | 0, 0514 | 0, 0514 | 735, 25 | . . . . | 41, 345 |
| Zinco | 0, 09555 | 0, 0927 | . . . | 403, 25 | . . . . | 38, 526 |
| Cadmio | 0, 05669 | 0, 0576 | . . . | 696, 77 | . . . . | 39, 502 |
| Nichelio | 0, 10863 | 0, 1035 | . . . | 369, 68 | . . . . | 40, 160 |
| Cobalto | 0, 10696 | 0, 1498 | 0, 1472 | 368, 99 | . . . | 39, 468 |
| Ferro | 0, 11379 | 0, 1100 | . . . | 339, 21 | . . . . | 38, 297 |
| Manganese | 0, 14411 | . . . | . . . | 345, 89 | . . . . | 40, 848[1] |

(1) Vegg. *Rapport annuel* del Berzelius, anno 1842 pag. 4.

Qui adunque chiaramente apparisce che il calorico specifico differisce bensì fra corpi diversi finchè ci riferiamo alle masse, ma subito che ci rapportiamo alle molecole o agli equivalenti troviamo che,

qualunque sia la natura del corpo, il calorico specifico delle molecole è sempre eguale, perchè multiplicando il calorico specifico pel peso delle molecole n' esce in tutti un valore prossimamente eguale, da che di quanto è minore il peso della molecola e di tanto aumenta il calorico specifico; sicchè ha costantemente una misurata compensazione. Ma come in un corpo aumenta il calorico specifico e del pari cresce il numero delle molecole, dunque ciascuna molecola, qualunque sia la natura del corpo, ha il medesimo calorico specifico. È vero che sovente c' incontriamo in differenze ne' prodotti che ne risultano da ispirare qualche diffidenza verso l' esattezza della legge; nulladimeno se badiamo alle imponenti difficoltà che lo sperimentatore dee affrontare in sì delicate e sottili investigazioni, troviamo agevole il concedere gli svarii a que' piccoli errori di osservazione impossibili ad evitare, e perciò non possiamo non sentirci portati a convenire con la posta legge.

Tuttavia nessuno qui disconverrà che il valore reale di questa legge consista nella nuda vibrazione molecolare se è vero che l' opera calorifica spetti in proprio alla molecola, come noi ne siamo intimamente convinti. Per avere il preciso valore della legge nella nuda vibrazione molecolare è cosa ch' implica lieve o niuna difficoltà a' chimici ed a' fisici in generale, i quali veggono nell' intima costituzione della materia una vacuità continua e quindi, per quantunque prevalga il dominio dell' attrazione, le circostanti atmosfere calorifiche, che circonvallano i singoli atomi e gli serbano dissociati e liberi, sono preste a risentirsi di ogni benchè menoma aggiunta calorifica e perciò a indurre l' atomo ad effettuare la competente vibrazione ed a serbare l' egualità manifestata dalla legge; ma daremmo in una difficoltà notevole se la vibrazione spettasse all' atomo; perciocchè non sapremmo scorgere in qual modo la medesima quantità di forza valesse a produrre il medesimo movimento in masse cotanto differenti come sono differenti le masse delle molecole de' corpi diversi; ma l' atomo per sè è ozioso, e la vibrazione spetta alla circostante atmosfera; sicchè la difficoltà scompare. Non potremo però con la medesima agevolezza conciliare l' egualità del calorico specifico nelle molecole di-

verse attenendoci a quella costituzione della materia che ci dà il principio dinamico; perciocchè quivi le molecole, non che toccarsi, per ampii tratti combaciano e per attrazione insieme si stringono, sicchè prima di venire a segno di compiere le volute vibrazioni fa mestieri che l' attrazione competentemente s' indebolisca. Omettiamo per ora il considerare che, per avere l' esatta comparazione della vibrazione molecolare in corpi diversi, farebbe prima mestieri che in ciascuno la coesione fosse portata al medesimo grado d' indebolimento; ma fermiamoci solo a indagare quanto voglia essere maggiore la coesione che il calorico o la partecipazione del moto dee vincere od affievolire in que' corpi ne' quali le molecole sono più piccole. In fatti dove le molecole sono più piccole ivi si moltiplicano notevolmente le superficie e dove si moltiplicano le superficie e quivi altresì crescono a proporzione i tratti onde le superficie medesime si attengono fra sè, cioè a dire, aumenta ragguardevolmente la relativa coesione molecolare in que' corpi ne' quali le molecole sono più piccole. Raffrontiamo fra loro l' idrogeno (12) e l' oro (1243): veggiamo subito bisognare 103 molecole d' idrogeno perchè equiponderino una sola molecola dell' oro; e se quella dell' oro medesimo la confrontiamo al litio, troviamo volerne oltre 15 del litio per farne una dell' oro; sicchè, a prescindere eziandio dal maggior volume delle molecole dell' idrogeno e del litio a petto di quelle dell' oro, veggiamo chiaramente eccessivo l' aumento di superficie e quindi di combaciamento in che le molecole si attengono per attrazione in tutti que' corpi, che consistono in menomi equivalenti. Ora se dove gli equivalenti o le molecole sono piccole resta a vincere o ad affievolire molto più di attrazione molecolare, che non in que' corpi che derivano dall' aggregazione di notevoli molecole, affinchè esse pervengano a quel termine di libertà voluto ad effettuare le competenti vibrazioni; ciò dinota che l' uguaglianza additataci dalla legge dei sig. Petit e Dulong procede da una misturata compensazione fra la maggior forza ripulsiva insita alle piccole molecole e la maggiore forza attrattiva che quivi rimane a vincere, onde le risultanti vibrazioni molecolari tornano eguali sì nelle piccole che nelle grandi molecole.

Questa verità ci è altresì riconfermata da alcuni risultamenti sperimentali dei medesimi ricercatori del calorico specifico. Non curiamo qui l' aumento di calorico specifico venuto al mercurio dalla sua condizione liquida; ma badiamo solamente a quello fornitoci dal diamante a confronto del carbone ordinario. Il sig. De La Rive e Marcet rinvennero nel diamante solo la metà di quel calorico specifico che il Regnault ebbe a incontrare nel carbone di legna (1). Donde questo divario notevole? Niuno, io credo, vorrà dubitare che ciò non venga dalla possente coesione del diamante a confronto di quella del carbone, la prima delle quali non già a vincere, ma solo a indebolire occorre la gagliarda forza disgregatrice dell' arco voltaico (2). Senza che alla medesima influenza della coesione estimiamo doversi ascrivere la necessità in cui si trovò il Regnault quando di raddoppiare, quando di dimezzare alcune molecole affinchè i risultamenti sperimentali si accordassero con la legge (3): nè reputiamo che la totalità delle differenze ne' prodotti de' calorici specifici pegli equivalenti sovente ragguardevoli, come nel carbone esempigrazia, non ostante il suo raddoppiato equivalente venuto $=36,875$ a confronto dell' iridio risultato $=45,428$, sia per intero da concedersi alle difficoltà de' cimenti, ma sì una gran parte estimiamo doversi attribuire alla coesione, e quindi la forza ripulsiva delle molecole in ogni caso mostrarsi tanto più grande quanto sono più piccole le masse molecolari.

A principio in pigliare a discutere questo argomento, quantunque gli esempii si possano a talento trascegliere e moltiplicare, mi limitava a paragonare fra sè, per rispetto alla quantità della forza ripulsiva, l' oro (1243) e il litio (80). Siccome non abbiamo una misura relativa di questa forza, altro non sappiamo se non che è grandissima nel litio e piccola assai nell' oro; perciò abbiamo fatta quella del litio $=100$ e quella dell' oro solamente $=10$, le quali cifre, comechè arbitrarie, tuttavia non escono da' limiti del vero. Messa questa supposizione abbiamo veduto conseguitarne che per avere il medesimo

(1) Vegg. *Rapport annuel* del Berzelius anno 1842 fig. 3.

(2) Vegg. Annali di Fisica, Chimica ec. del Majocchi Tom. XXVI. pag. 287.

(3) Vegg. Op. cit. ec. e seguenti.

movimento vibratorio, dinotatoci dalla temperie, in quantità eguali di entrambi i corpi, basta nel litio una partecipazione di forza ripulsiva $= 2$, ed $= 20$ nell' oro; sicchè nel valore di questi numeri noi abbiamo recato innanzi una maniera di simbolo dinotanteci la differenza del calorico specifico di quantità eguali di corpi diversi. Ma fermandoci alla quantità di forza ripulsiva che nell' addotto esempio intrinsecamente spetta a ciascuno dei mentovati corpi, veggiamo il litio avere una quantità eguale 102, e solo $= 30$ l' oro; sicchè quando una cagione qualunque ripulsiva, mediante l' indebolimento della coesione, giunga a porre in atto in entrambi la forza ripulsiva, essa in un tempo dato dovrà compiere un numero tanto più grande di vibrazioni eguali, quanto è maggiore la forza ripulsiva che in proprio spetta al corpo; laonde le molecole o gli equivalenti del litio, posciachè più piccole e quindi dotate di maggior forza ripulsiva, deggiono effettuare in egual tempo un numero di vibrazioni tanto più grande a confronto di quello dell' oro quanto è più grande la propria forza ripulsiva. Ma a questo maggior numero di vibrazioni eguali dee corrispondere un maggior effetto calorifico, che potrebbe venire rappresentato da una data quantità di ghiaccio fuso o d' acqua tepificata fino a un dato termine od altro; adunque quell' effetto che dicesi calorico specifico de' corpi, dee non già uguale in tutte le molecole, ma venirci trovato maggiore nelle più piccole, ch' è legge insita alla manifestazione della forza ripulsiva.

L' egualità calorifica trovata, mediante la legge dianzi esposta, serbarsi sempre la stessa negli equivalenti di qualunque fatta di corpi, recò necessariamente i chimici a concludere che gli equivalenti o gli atomi, qualunque sia la maniera del corpo, hanno tutti la medesima *capacità pel calorico*. Non si faccia caso di questa bizzarra prerogativa degli atomi onde piccoli o grandi che sieno hanno tutti una medesima *capacità* pel calorico; ma arrestiamoci a considerare qualcuna delle conseguenze che ne verrebbero qualora, senza verun rispetto alla natura del corpo, tutti gli atomi avessero la medesima *capacità* calorifica; imperocchè se gli attributi che conferiamo a' corpi e ai lor atomi disconvengono colle proprietà più palesi che i corpi medesimi manifestano,

abbiamo forse ragione di credere che il rinvenimento delle nostre leggi e gli speziosi attributi che ravvisiamo sieno mere illusioni. In fatti tutti convengono, perchè i fatti più evidenti il palesano, che gli atomi diversi posseggono differente energia attrattiva: la sola coesione tanto differente dal diamante all' idrogeno ce ne fornisce la più irrepugnabile pruova. Eppure l'atomo, dopo la facoltà attrattiva, che forse anche questa piglia a imprestanza dalla atmosfera elettrica che il circonda, non ha attitudine a muoversi, e nondimeno ne' corpi diversi il veggiamo manifestare differentissimi gradi di energia ripulsiva, che per la immutabile sua inerzia egli deve per intero all'attorniante atmosfera calorifica che ne lo accompagna e sospinge. D'onde ciò se posseggono tutti una medesima *capacità* calorifica? Ne verrebbe che negli atomi la medesima causa produrrebbe effetti differentissimi e quindi gli effetti non sarebbono più proporzionali alle loro cagioni.

Diceva poc' anzi che per avere la voluta comparazione de' calorici specifici de' corpi diversi farebbe prima mestieri di avere in ciascuno il medesimo indebolimento di coesione molecolare, e quindi partire da questo termine per dedurre i calorici specifici, o le intensioni delle vibrazioni calorifiche spettanti alle molecole diverse. Quando l' opera sperimentale potesse accertare questo limite onde partire; io oso anticipatamente affermare che non vedremo più l' egualità fornitaci dalla legge, ma sì gli effetti calorifici venire tanto più energici quanto sono più piccole le molecole, ch' è quello che sperimentalmente incontriamo sempre quando, non essendoci consentito di operare sulle molecole che non sono palpabili e suddite a' sensi, operiamo sopra le masse de' corpi.

(*Letta il giorno* 29 *Dicembre* 1847).

# ESPERIENZE CHIMICHE

# SU FLUIDI DI PERSONE

## CHE USARONO INTERNAMENTE

# PREPARAZIONI D'IODIO

## MEMORIA

DEL DOTT. GIACINTO NAMIAS

Nelle urine di chi usa internamente preparazioni d' iodio, mediante la reazione dell' amido e cloro, hannosi cospicui indizii di quel metalloide. Vennero istituiti parecchi esperimenti per determinare il tempo in cui più l' iodio non si discopre dopo che fu preso l' ultima volta. Codesto tempo varia secondo le differenti preparazioni di quello che internamente si ministrano. Suol essere di trentasei ore all' incirca per l' idroiodato di potassa, e più breve per le emulsioni iodate. Ciò ha notato il dott. Foucart (1) e di ciò io pure addussi pruove sperimentali in alcuni miei confronti tra l' emulsioni iodate e l' idroiodato di potassa che la R. Accademia medico-chirurgica di Torino ha pubblicati nell' aprile 1850 del suo Giornale. Il Foucart per altro, non meno che il dott. Marchall erroneamente dedussero da tali fatti

(1) Gaz. des hopitaux n.° 13, 1848.

che l' iodio delle emulsioni iodate più lungamente dell' idroiodato di potassa rimanesse nei corpi. Affermarono di non aver trovato iodio nelle materie fecali di chi beveva emulsioni iodate e inferirono che dalla sua più lunga permanenza nel corpo procedesse il minore passaggio nelle urine. Eglino per altro non hanno considerato l' espulsione dell' iodio non avvenire soltanto per la strada de' reni. Tutte le volte ch' esso appariva, anco in mediocre quantità nelle urine, io lo trovai nell' umore salivale della bocca, e talora scomparso più tardi in questo che in quelle. Dovevano quindi i nominati sperimentatori cercarlo pure ne' fluidi d' altre secrezioni che quella de' reni, e poi le indagini su le feci evacuate non davano argomento di pruova per quelle restanti nelle circonvoluzioni intestinali. Mancano così le ragioni della loro illazione, la quale anche per generici argomenti parevami appoggiata ad assai scarse probabilità. L' olio di mandorle infatti dev' essere più difficilmente assorbito dell' acqua, e i principii disciolti in questa deggiono per conseguenza più di leggieri che i principii trasportati da quello penetrare nel torrente della circolazione. Sa ognuno quanto gli olii pesino sul ventricolo, riescano, come a dire, malagevoli alla digestione; e per contrario bevasi l'acqua in gran copia senza qualsisia patimento. L' una per mezzo de' reni è rapidamente separata dal sangue, gli altri accelerando le escrezioni dell'alvo mostrano che più notevoli ostacoli si frappongono al loro ingresso ne' vasi. « L' esperienza, dice (1) quell' infaticabile scrutatore dell' orga» nismo animale che è il Magendie, insegna le bibite quasi tutte es» sere assorbite nel ventricolo innanzi oltrepassare il piloro ». È dunque a presumere che l' idroiodato di potassa sciolto nell' acqua si mescoli co' fluidi animali in maggior copia che l' iodio delle emulsioni iodate, e perciò meno presto scompaia dalle urine. Io posso dire con argomenti esperimentali che quell' idroiodato in estraordinarii casi di protratta sua permanenza negli umani organismi si rinviene nella saliva e nelle urine, non che per 36 ore come accade ordinariamente, per assai giorni e per settimane. Una donna malata di albuminuria, presi due scrupoli d' idroiodato di potassa per molti dì, cessava d'es-

(1) Art. *Absorption* del *Dict. de médecine.*

pellerlo nelle urine soltanto sedici giorni dopo averne lasciato l'uso. Tale inferma da me sottoposta a varie pruove con quel rimedio presentò per più o meno tempo l'anzidetto fenomeno secondo la dose che le ne venne prescritta. Fattolo continuare 14 giorni e portato ad uno scrupolo, lo discoprii nelle urine per dieci dì, e soltanto pel tempo ordinario di circa 36 ore, quando per una volta ne ministrai tre grani sciolti in tre oncie di acqua. L'emissione durò oltre tre giorni allorchè l'ammalata ne bevve 14 grani in 24 ore. L'idroiodato adunque per lungo tempo rimaneva nel corpo, per lungo tempo usciva da quello mediante la secrezione renale, e tanto più alla lunga, quanto più cresceva la dose ingoiata. Ne' liquidi delle secrezioni esso non manca di comparire quando è nelle macchine umane, e sembra trattenervisi estraordinariamente in casi di ostacolo alla sua uscita per quelle vie. Invero accade nelle albuminurie che i reni si guastino a modo da perdere l'attitudine alla separazione dell'urea, e forse non ponno allora dare passaggio a principii eterogenei, come l'idroiodato, nella debita quantità. Ne seguirebbe una più lenta e protratta espulsione, in conseguenza una più lunga dimora di quello nella macchina umana. Gli altri organi secretori potrebbero in qualche foggia sopperire alla sua emissione, lo che non mi fu dato nell'esposto caso indagare, ma in uno più recente d'albuminuria.

Nelle persone per altri malori da me curate con l'idroiodato o le emulsioni iodate rinvenni iodio, non che nelle urine, nella saliva, costantemente però in minor abbondanza e meno alla lunga in questa che in quelle. Una donna invece che ai 31 luglio dell'anno scorso entrò allo spedale con anasarca e albuminuria, bevuta a dosi crescenti la soluzione d'idroiodato di potassa per diciasette giorni, e lasciatala dopo aver presi in 24 ore 30 grani di questo sale, che fu la massima quantità, proseguì per sedici giorni a darne traccie nelle urine e per diecinove nella saliva, tre giorni cioè più a lungo che in quelle, al contrario di quanto ho sopra avvertito e suole accadere comunemente. Dalla quale osservazione deducesi trovare i reni cooperazione in altri organi per iscacciare l'iodio dal corpo, ma la precipua parte di tale uffizio restare ad essi affidata anche in circostanze di

malattia che li renda a ciò meno idonei. Perchè venuta a morte questa inferma, vidi nel suo cadavere alterata la tessitura di molta parte della sostanza corticale e tubulare de' reni, rimanendo alcune isole di aspetto uniforme, lardaceo, circondate da altre parti dell' organo conformi a natura. Le ghiandole salivari con più operosità che non sogliano liberarono il sangue di molecole eterogenee; ma non bastò a spogliarnelo l' azione loro o di altri organi secernenti nel tempo ordinario di men che due giorni, e fu mestieri che per sedici si protraesse l' escrezione dell' idroiodato per mezzo de' reni, alle cui regolari funzioni ostava la descritta lesione. Tali esperienze non solo confermano che quando nelle assimilazioni iodio ancora si trova ne sono impregnate le urine, e confutano le argomentazioni de' sig. Foucart e Marchall, che non iscoprendolo in queste inferivano una sua più lunga permanenza ne' corpi, ma danno inoltre un importante pratico avvertimento.

Notai in due casi d' albuminuria che, lasciato l' uso delle preparazioni iodate, 17 giorni dopo scorgevansi ancora nell' urina le ultime orme di esse; che il metalloide pertanto fermavasi entro i meandri organici, fuor delle leggi ordinarie, per più settimane. Il medesimo è probabile in altri guasti renali; deesi almeno indagare se quelli difficultino la uscita dell' iodio per le vie delle urine e si prolunghi in queste la sua comparsa, acciocchè ne vengano diminuite le dosi e la durata della cura. La mia inferma, siccome accennai, non sorpassò in 24 ore trenta grani d' idroiodato, cui era lentamente giunta in 17 giorni dall' incominciamento del rimedio, tenuto così a mediocrissime quantità rispetto a quelle che si prescrivono generalmente. Eppure allora bisognò abbandonarlo per la sopravvenienza di febbre e dolore al capo e alle gengive, i quali fenomeni che derivano da assai differenti cagioni io non dirò con sicurezza che fossero effetti dell' iodio. Avvertirò unicamente che questo dal Coindet, dallo Zink, dall' Hufeland (1) fu osservato capace a produrli; che la mia inferma per lievissime unzioni mercuriali incontrò salivazione e i formidabili sintomi che origina lo smodato uso del mercurio; e conchiuderò essere di

(1) Bayle, Travaux thérapeutiques. Tom. I. pag. 197.

grande rilievo l' esame delle urine di chi viene curato coll' iodio. Imperocchè tale esame può dimostrare una insolita permanenza di quello ne' corpi, e una necessità di moderarne o lasciarne l' uso, al fine che non apportino danni quantità che sarebbero ne' casi ordinarii innocentissime.

Nella seconda malata d' albuminuria, di cui finora io parlai, non fuvvi soltanto la ripetizione de' fenomeni della prima, e quindi una riprova de' principii che ho statuiti, ma altri nuovi e specialissimi fatti non ancora, a quanto io sappia, per lo innanzi veduti. Una successione di morbi avea sfabbricata la sua macchina, depauperate le assimilazioni, condotta agli estremi giorni la vita per lenta consumazione del corpo, oltre sei settimane dopo che cogli anzidetti reagenti nella scialiva e nelle urine io trovava per l' ultima volta iodio, passati cioè più di due mesi dalla cessazione di questo rimedio. Ricercai se anco allora si mantenessero albuminose le urine, e versando in queste poco acido nitrico l' albumina immediatamente si rappigliò. Cadutevi a caso varie altre goccie dell' acido si ridisciogliева parte dell' albumina coagulata, e vicino ad essa svolgevasi un colore azzurrognolo simile a quello portato dall' iodio nelle soluzioni amilacee. Continuando a versarne scompariva affatto l' albumina e ogni coloramento del liquido. Raccolsi di nuovo le urine per iterare l' esperimento innanzi la morte di quella infelice, nè la descritta serie di fenomeni venne mai meno, e fu anzi più pronunziata l' ultima volta. Lungi dal rinfrancarla rendevala meno cospicua il decotto d' amido mescolato alle urine.

Le due parti del fenomeno, la coagulazione cioè dell' albumina e il coloramento della materia per eccesso d' acido nitrico, l' osservare che si facevano più specialmente azzurrognoli i fiocchi albuminosi, che l' azione dell' acido finiva col distruggere e colore e albumina rappigliata mi persuasero che in questa l' iodio si nascondesse e per la dissoluzione di essa libero momentaneamente e manifesto si facesse con tinta azzurrognola fino alla sua trasformazione negli acidi che gli son proprii. Ho pregato il mio amico dott. Giovanni Bizio figlio, valentissimo chimico, di rifermare con pruove dirette su l' albumina codesti sperimentali risultamenti, e qui adduco le sue istesse parole. « Esposi l' orina all' azione del fuoco, raccolsi l' al-

» bumina coagulata, la lavai con acqua distillata e disseccata al bagno » d' acqua, la spinsi al fuoco della lampada in un crogiuolo di pla- » tino, in modo da averne un carbone che, lisciviato con tenue quan- » tità d' acqua distillata, dava una soluzione nella quale col *liquore di* » *prova* del Cantù si scopriva la presenza dell' iodio. Evaporato ap- » presso il liquido, dal quale erasi separata l' albumina e sciolto il re- » siduo in piccolissime quantità d' acqua distillata, non si rinvenne in » questo la più piccola traccia d' iodio. Questo corpo adunque accom- » pagnò l' albumina, anzichè rimanere nel liquido».

Io aveva raccolta di questa urina per farne, o colleghi, esperimento dinanzi a voi. Ma dopo un mese la putrefazione se ne impadronì, e il liquido divenne torbido, intensamente azzurro, lasciando su le pareti del bicchiere qualche grumetto pultaceo con caratteri fisici simili a quelli della materia amilacea su cui l' iodio avesse reagito. La filtrai e restò su la carta un tenue velamento azzurro; il liquore passato pel filtro era limpido, con tinta leggiermente nerastra. Alcune goccie d' acido nitrico fecero rappigliare poca albumina, l' aggiunta di altre parve alquanto oscurarla e darle lieve colorito azzurrognolo, nè molte abbisognarono a discioglierla interamente. Fu manifesto che la putrefazione e la filtrazione aveano separati in gran parte i principii e tolte nel liquido filtrato le condizioni influenti a generare il sopraddetto fenomeno. Fu manifesto inoltre che la putrefazione lo produceva al pari dell' acido nitrico liberando l' iodio dalle intime unioni con gli elementi costitutivi dell' albumina. Non fu egualmente manifesto come in questa si sviluppassero le apparenze della reazione dell' iodio sopra le materie amilacee. Mi sorse dubbio da prima di una particolare alterazione dell' albumina che la rendesse, per effetto dell' acido nitrico o della putrefazione, capace di reagire sull' iodio alla maniera dell' amido. Ma le ricerche da me fatte in parecchi casi d' idrope sopra le urine albuminose non mi dettero mai indizio che la loro albumina differisse per qualche carattere dall' albumina naturale del sangue. Gli acidi acetico e fosforico non producono in quella alcuna precipitazione, e quest' ultimo disseccato di fresco, vetrificato e risciolto nell' acqua, seguendo la generale legge degli acidi, coagula

la loro albumina. L' acido fosforico e il parafosforico forniti della stessa chimica composizione, o come dicono d' isomeria, danno adunque il singolare fenomeno, il primo di non coagulare, il secondo di coagulare l' albumina tanto del siero separato dal sangue, quanto delle urine albuminose. E queste in più di un caso io cimentai con l' ossido di rame idrato, e aggiungendo qualche goccia di potassa o soda sciolta nell' acqua vidi il liquido assumere quel leggiadro colore violetto che in simili circostanze l' albumina genera costantemente, invertendo le proprietà degli ossidi metallici, rendendoli cioè solubili in mestrui ov' essi sono per sè medesimi insolubili.

Ho per altro considerato che se ordinariamente l' albumina delle urine non si allontana dalle proprietà inerenti a questo materiale del sangue, poteva nell' ultimo caso da me osservato per individuali cagioni allontanarsene, e con particolari indagini ricercai se questa supposizione trovasse appoggio nell' esperienza. Quelle urine, che la putrefazione e la filtrazione aveano quasi interamente spogliate d' iodio, contenevano ancora albumina, e se questa per ispeciale alterazione fosse stata ridotta a reagire sull' iodio come le materie amilacee, forse sarebbesi rivivificato il fenomeno con la mescolanza d' una preparazione di quel metalloide. Aggiunsi pertanto una soluzione d' idroiodato di potassa, e versandovi poi acido nitrico si coagulò l' albumina, e il liquore prese il colorito bronzino sbiadato, che per quest' acido suol prendere la soluzione d' idroiodato di potassa, senza traccia del colore azzurro, che tali urine prima della putrefazione mediante lo stesso acido nitrico presentavano. Non trovando così alcun fatto che fiancheggi l' idea di mutazioni nelle proprietà dell' albumina, preferirei di attribuire il fenomeno al nascente iodio libero, il quale svincolato, per azione dell' acido nitrico, da' suoi legami con quella, venga meccanicamente ritenuto dagli stracci albuminosi.

Io non amo disputare di supposizioni che trasandino i fatti, e non mi fermo con ragionamenti a corroborare la mia, alla quale sarò pago se altre ne vengano sostituite di più probabili che spieghino il fenomeno da me notato. Il quale ancor meglio delle precedenti osservazioni testifica per quanto lungo tempo si possa discoprire iodio nei

materiali solidi o liquidi di persone che usarono idroiodato di potassa, e quanto giovi intorno a quelli ripetere e variare gli esperimenti.

Mi mancarono occasioni di estenderli a casi di albuminuria curati con emulsioni iodate, ma mostrai già nel citato Giornale dell'Accademia di Torino queste penetrare in minore abbondanza che la soluzione d'idroiodato di potassa ne' vasi sanguiferi, e per tale motivo meno alla lunga discoprirsi iodio nelle urine. Lo che non toglie più proficue di quello riuscir esse in alcune malattie giusta le osservazioni che da medici francesi e da me vennero raccolte. Perchè le predette emulsioni trasportano ne' vasi un principio fornito di tutt' altre chimiche proprietà, iodio cioè disciolto nell'olio di mandorle, il quale non passa, alla condizione di puro metalloide, ne' liquidi delle secrezioni, che iteratamente vidi non esercitare reazione su l'amido. A rendere manifesto l'iodio io avea pure uopo del cloro, ond' era evidente in quelli la sua presenza allo stato di acido o di sale. Con la tintura alcoolica d'iodio feci la stessa osservazione. Questa tintura diluita con acqua s'iniettò nel peritoneo, al fine di conseguire la guarigione radicale di un'idrope. Poco appresso procuratane l'uscita, il decotto d'amido (1) non indusse mutazione nel fluido raccolto, che divenne azzurro-cupo appena aggiunti cloruro di calce e qualche goccia d'acido nitrico.

Nuovi studii si richieggono per conoscere le trasformazioni che i farmachi incontrano ne' nostri corpi, o le strade che tengono per uscirne e il tempo che impiegano a trascorrerlo; e solo allora che simili circostanze di fatto cesseranno d'essere conghietture, potremo vantarci d'aver innalzata la materia medica al livello delle altre scienze naturali. I medici italiani non mai ultimi ne' positivi avanzamenti si posero ardentemente in questa via. Per tacere del Cantù, del Kramer, del Panizza, ricorderò che il prof. Cattanei di Como cercando in umori di morbosa secrezione alcune sostanze medicinali inorganiche (2) trovò iodio nella marcia di un ascesso e nel siero tratto da idrocele di persone, cui da alcuni giorni si amministrava l'idroiodato di potassa.

(1) Giornale Veneto di Scienze Mediche Tom I. pag. 89.

(2) Ved. i suoi studii pubblicati a Pavia nel 1849.

Non aggiungerò parole a mettere in evidenza l' utilità che da siffatti studii ritrae la pratica medicina, e do fine a questa Memoria con poche illazioni derivanti dalle riferite esperienze.

1.° L' idroiodato di potassa penetra più facilmente nella circolazione che le emulsioni iodate.

2.° Non è giusta la dottrina de' sigg. Foucart e Marchall, che dalla minore comparsa dell' iodio nelle urine inferiscono le emulsioni iodate più dell' idroiodato trattenersi ne' corpi.

3.° Le emulsioni iodate operano tuttavia più energicamente dell' idroiodato di potassa in alcuni malori attese le speciali proprietà che posseggono.

4.° In chi usa internamente l' idroiodato si può discoprirlo nelle urine e nella saliva, ma più alla lunga in quelle che in questa.

5.° Fu veduto il contrario in casi di guasti renali; tuttavolta l' azione vicaria delle ghiandole salivali non bastò a liberare del principio eterogeneo l' animale economia, e i reni continuarono a separarlo con le urine per sedici giorni dopo che ne venne lasciato l' uso.

6.° I reni hanno la parte precipua nell' espulsione dell' idroiodato di potassa, ed è agevole nelle loro malattie una sua estraordinaria permanenza ne' corpi.

7.° In tali casi i medici che lo prescrivono sono in dovere di prendere in esame le urine, perchè trovandosi in queste il rimedio oltre il tempo naturale dopo la sua cessazione è palese la più lunga dimora di esso nel corpo e la necessità di abbandonarlo per sempre o ministrarlo in più tenui quantità.

8.° Può accadere per la più lunga sua permanenza, o per particolari condizioni de' corpi, ch' esso entri nella costituzione de' materiali immediati organici.

Queste io credo legittime deduzioni de' miei sperimenti, anzi un' espressione di essi; e desidero che ulteriori studii di altri e di me diano a quelle maggiore estensione sì rispetto all' iodio, come ad altre sostanze che si usano in medicina.

(*Letta nel giorno 18 Gennaio 1852*).

# INDICE

## DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME


Avvertimento . . . . . Pag. v

*Cenni sopra il terreno di sedimento superiore delle Provincie venete, e descrizione di alcune specie di Polipai fossili ch' esso racchiude,* del Prof. Tomaso Antonio Catullo . » 3

*Dei fenomeni elettrici della Macchina di Armstrong e delle cause loro assegnate dai Fisici,* del Prof. Francesco Zantedeschi . . . . . » 45

*Idea d' una Statistica civile per il Veneto,* del Prof. Baldassare Poli . . . . . » 75

*Sull' esistenza dell' Organo del gusto in alcune specie di cani marini,* del Dott. Gio. Domenico Nardo . . . . . » 109

*Sopra di un Gallinsetto delle foglie del Salice,* del Co. Nicolò Contarini . . . . . » 115

*Intorno al calcolo dell' azione dinamica del vapore nella Locomotiva avuto riguardo alle circostanze della precessione,* del Prof. Carlo Conti . . . . . » 135

*Rinvenimento dell' Achilleina e dell' acido achilleico nell' Assenzio ombellifero, e nuovi Studii sopra queste sostanze,* di Bartolomeo Zanon . . . . . » 201

*Alcune considerazioni sugli effetti dell' attrito e sul modo di calcolarli,* del Prof. Giusto Bellavitis . . . . . » 213

*Saggio sull' Algebra degli immaginarii,* del Prof. Giusto Bellavitis . . . . . Pag. 245
*Sulla coltivazione dei Gelsi e de' Filugelli e sul modo di diffondere le buone pratiche nelle Provincie venete,* di Gherardo Freschi . . . . . » 343
*Sul Porto di Malamocco,* di Giovanni Casoni . . . . . » 375
*Esperienze ed Osservazioni sulla cultura del trifoglio incarnato,* del Cav. Agostino Dott. Fapanni . . . . . » 391
*Sull' idea generale di Contagio,* di Giulio Sandri . . . . » 419
*Studii ulteriori intorno alla relazione della forza ripulsiva verso la grandezza delle molecole de' corpi,* del Prof. Bartolomeo Bizio. . . . . » 435
*Esperienze chimiche su fluidi di persone che usarono internamente preparazioni d' iodio,* del Dott. Giacinto Namias » 465

TIPOGRAFIA

DEL SEMINARIO DI PADOVA

1852